MARIAN GROTOWSKI

WYKŁADY FIZYKI

TOM I

MECHANIKA I CIEPŁO

Wydanie drugie niezmienione

SPÓŁDZIELNIA WYDAWNICZA «CZYTELNIK»
1947

M. GROTOWSKI

WYKŁADY FIZYKI

M. GROTOWSKI

WYKŁADY FIZYKI

Książka ta została wydrukowana w Szwecji jako dar Rządu Szwedzkiego dla kulturalnej odbudowy w Polsce.

MARIAN GROTOWSKI

WYKŁADY FIZYKI

TOM I
MECHANIKA I CIEPŁO

Felix qui potuit
rerum cognoscere causas
VERGILIUS

Wydanie drugie niezmienione

SPÓŁDZIELNIA WYDAWNICZA «CZYTELNIK»
1947

Wydanie pierwsze 1937

Wydanie drugie niezmienione odbite sposobem fotomechanicznym 1947

STOCKHOLM

ALB. BONNIERS BOKTRYCKERI 1947

OD AUTORA

Książka niniejsza powstała z wykładów dla słuchaczów pierwszego roku wydziału matematyczno-przyrodniczego Wolnej Wszechnicy Polskiej w Warszawie i w Łodzi. Tym się tłumaczy zarówno wybór, jak i układ materiału. Z uwagi na trudności, jakie zazwyczaj sprawia słuchaczom rozpoczynającym studia stosowanie rachunku różniczkowego i całkowego, w pierwszych rozdziałach rachunek ten wcale nie jest używany, w następnych zaś wprowadzany stopniowo, przy czym wszelkie nieco trudniejsze wywody matematyczne są podane w oddzielnych ustępach, wyodrębnionych od reszty tekstu innym drukiem, a które czytelnik, nie władający rachunkiem wyższym, może bez szkody dla zrozumienia dalszych rozdziałów tego tomu opuścić. Terminologia została możliwie uzgodniona z terminologią klasycznych już dzisiaj w naszej literaturze naukowej podręczników Witkowskiego, Natansona i Frankego.

SPIS RZECZY

WSTĘP

1. UWAGI OGÓLNE

Podstawą poznania świata zewnętrznego są nasze wrażenia zmysłowe, których źródło upatrujemy w przedmiotach, rozmieszczonych w otaczającej nas przestrzeni i w zjawiskach w niej zachodzących. Ta „obiektywizacja" naszych subiektywnych wrażeń nie jest rzeczą ani prostą, ani łatwą. Zazwyczaj opiera się ona nie na jednym oddzielnym wrażeniu, lecz na ich zespole, wymaga sprawdzenia przez wrażenia doznawane za pośrednictwem innych zmysłów, przez porównywanie z wrażeniami innych ludzi, i wreszcie, co najważniejsze, przez pracę umysłu, porządkującego i scalającego oddzielne, rozproszone z natury rzeczy wrażenia. Na tej żmudnej drodze, której badaniem zajmują się odpowiednie działy filozofii i psychologii, powstają nasze wyobrażenia świata zewnętrznego.

Tworzymy je sobie przede wszystkim w doświadczeniach życia codziennego, posługując się prostymi rozumowaniami, nie ujętymi w żadne reguły metodyczne. Ten sposób postępowania, wrodzony każdemu człowiekowi, a który można by nazwać badaniem przednaukowym, stanowi konieczną podwalinę badania naukowego, towarzyszy pierwszym próbom poznawania otaczającej nas rzeczywistości, nie ogarnia jednak i ogarnąć nie może całego bogactwa zjawisk wzrastającego w miarę coraz dokładniejszego zapoznawania się ze światem zewnętrznym.

2. ZADANIA I PODZIAŁ NAUKI

Dla zdania sobie z nich sprawy, dla uporządkowania nagromadzonych już wiadomości, metody badania „codziennego" nie wystarczają. Obraz świata, wytworzony na tej drodze, jest nie tylko niezupełny, lecz często skażony błędnymi lub niedostatecz-

nymi obserwacjami. A od „prawdziwości“ tego obrazu zależą, że przytoczymy tu słowa Helmholtza, ostateczne wskazania co do wyniku naszych czynów w stosunku do świata zewnętrznego oraz trafność wyciąganych przez nas wniosków co do zmian, jakich możemy w nim oczekiwać. Dążenie do poznania prawdy, która nie tylko ma nam pomóc w zaspokojeniu potrzeb utylitarnych, lecz również i nade wszystko wskazać miejsce, jakie zajmujemy we wszechświecie, jest wystarczającym całkowicie uzasadnieniem konieczności drugiego etapu w poznawaniu świata zewnętrznego — konieczności badania naukowego.

Aby osiągnąć swój cel, musi nauka narzucić sobie z góry pewne ograniczenia. Zjawiska, z którymi zapoznały nas doświadczenia życia codziennego, ukazują się nam tak wzajemnie splątane, że objęcie ich w całości wydaje się prostym niepodobieństwem. Staje się przeto niezbędne mniej lub więcej sztuczne wyodrębnienie badanego zjawiska spośród innych oraz poprzestanie na badaniu go z pewnego tylko punktu widzenia.

Zależnie od rodzaju badanego zjawiska i od wybranego punktu widzenia rozróżniamy różne dziedziny nauki, o swoistych, często bardzo różniących się metodach badania. Nie miejsce tutaj na rozpatrywanie tego podziału, wystarczy stwierdzić, że zachodzące w świecie zewnętrznym zjawiska możemy badać, albo zwracając główną uwagę na to, co wyróżnia dane zjawisko spośród innych zjawisk, nieraz na pierwszy rzut oka bardzo do niego podobnych, a więc na to, co sprawia, że każde na ogół zjawisko jest niepowtarzalne, — albo też, przeciwnie, wyszukując podobieństwa między zjawiskami i starając się ustalić te cechy, które w różnych zjawiskach się powtarzają. Tę drugą metodę badania stosują nauki przyrodnicze, do których należy fizyka i chemia.

Tych dwu działów nauk przyrodniczych nie można ściśle rozgraniczyć. I jeden, i drugi posługują się zbliżonymi, a ostatnio, przy badaniu bardzo obszernej grupy zjawisk, identycznymi metodami; obydwa mają na celu zbadanie tych zjawisk, które mogą zachodzić zarówno w świecie materii zorganizowanej, jak i niezorganizowanej. Zjawiska charakteryzujące procesy życiowe, niespotykane w świecie przyrody martwej, nie są, ściśle biorąc, przedmiotem badań fizyko-chemicznych; stanowią one dziedzinę nauk biologicznych. Ten ostatni podział jest, być może,

chwilowy: nie jest rzeczą wyłączoną, że dalszy rozwój nauk przyrodniczych podda i zjawiska wyłącznie biologiczne prawom fizyki i chemii, jest jednak również możliwe, że ustali ich całkowitą samodzielność. W każdym bądź razie dzisiaj te dwie dziedziny zjawisk musimy rozważać odrębnie.

3. ZASADA PRZYCZYNOWOŚCI

Naczelną zasadą, na której opiera się fizyka, jest zasada przyczynowości, którą podajemy tutaj w następującym sformułowaniu:

W tych samych warunkach zachodzą te same zjawiska.

Ścisłego udowodnienia tej zasady podać nie możemy; jest bowiem rzeczą graniczącą z niemożliwością dokładne odtworzenie po raz drugi warunków, w jakich zaszło po raz pierwszy dane zjawisko. Uzasadnienie jej widzimy w fakcie stwierdzanym dowolnie często przez codzienne doświadczenie, że im większe jest podobieństwo warunków, w jakich dane zjawiska zachodzą, tym bardziej podobny jest przebieg samych zjawisk. Dowodem pośrednim, lecz nie mniej ważnym, jest zgodność z doświadczeniem wniosków, które formułujemy opierając się na zasadzie przyczynowości. Odrzucając ją, uniemożliwilibyśmy sobie jakiekolwiek, choćby przybliżone, przewidywanie zjawisk; obraz świata zewnętrznego byłby dla nas zbiorem oddzielnych, niczym ze sobą nie związanych wrażeń zmysłowych.

4. PRAWO FIZYCZNE

W przytoczonym powyżej sformułowaniu zasady przyczynowości pojęcie tożsamości warunków i związanej z tym tożsamości przebiegu zjawiska jest pozostawione bez bliższego określenia. Różne działy nauk przyrodniczych różnych na ogół co do tego używają kryteriów, zależnie od możliwego do osiągnięcia stopnia ścisłości. Największą ścisłość osiągamy wtedy, gdy zmiany zachodzące w warunkach jak również w przebiegu samego zjawiska uda nam się wyrazić za pomocą liczby. Tak właśnie postępuje fizyka, opisując przebieg zjawiska i warunki, w jakich ono zachodzi, przy pomocy pojęć mających cechy wielkości fizycznych, tzn. takich pojęć, które możemy powiązać przede wszystkim ze zmianami ilościowymi.

Z punktu widzenia fizyki zbadanie zjawiska sprowadza się do wykrycia i ustalenia wielkości fizycznych, niezbędnych i wystarczających do opisu wszystkich szczegółów jego przebiegu, do wyrażenia ich wartości odpowiednimi liczbami, otrzymanymi jako wynik pomiaru, tzn. porównania z dokładnie oznaczonymi wartościami wielkości tego samego rodzaju przyjętymi za jednostkę, i wreszcie do powiązania ich odpowiednim wzorem matematycznym. Ustalony na tej drodze związek funkcjonalny między liczbowymi wartościami wielkości fizycznych stanowi p r a w o f i z y c z n e.

5. USTALENIE PRAW FIZYCZNYCH NA DRODZE DOŚWIADCZALNEJ

W pewnych przypadkach związek ten można wyprowadzić bezpośrednio z danych otrzymanych w doświadczeniu. Wtedy sposób postępowania jest zazwyczaj następujący. Spomiędzy wielkości charakteryzujących dane zjawisko wybieramy dwie, które oznaczamy np. przez A i B. Zmieniając wartości B i zachowując możliwie stałe wartości wszystkich wielkości pozostałych, badamy, w jaki sposób zmienia się A. Mierząc za każdym razem wartości B, otrzymujemy szereg liczb $b_1, b_2, b_3 \ldots b_n$; każdej z tych liczb odpowiada jedna z liczb szeregu $a_1, a_2 \ldots a_n$, wyrażającego wartości, jakie przybiera A na skutek zmian wartości B. Szukamy wtedy takiej funkcji $a = f_1(b)$*, która by po podstawieniu jednej ze zmierzonych wartości B, np. b_1, dała na A liczbę mało różniącą się (zależnie od stopnia wymaganej dokładności) od otrzymanej z pomiaru liczby a_1.

Ściśle biorąc, wzór taki jest jedynie ujęciem w dogodny do zapamiętania skrót wyników pomiarów. Aby stał się czymś więcej, pomiary, na których się opiera, muszą czynić zadość pewnym warunkom.

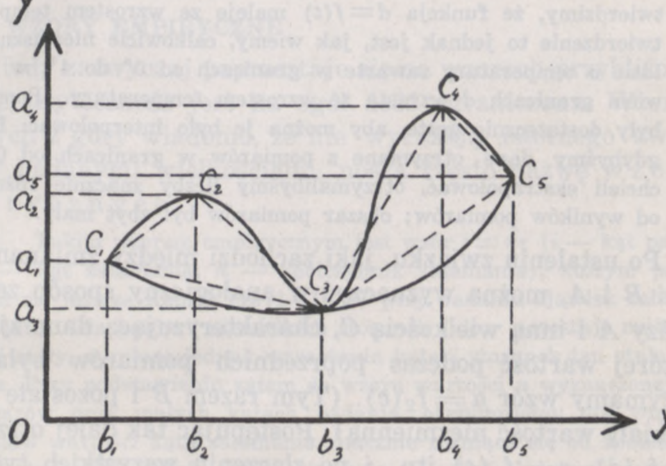
Przede wszystkim muszą być d o s t a t e c z n i e g ę s t e, tzn., że różnice między kolejnymi mierzonymi przez nas wartościami wielkości B muszą być dostatecznie małe. Wtedy dopiero mamy podstawę do przypuszczania, że wzór stosować się będzie i do tych wartości B, które nie były bezpośrednio mierzone, a które zawarte są w granicach wartości mierzonych. Możliwość

---

* (gdzie f_1 jest znakiem funkcji).

stosowania takiej interpolacji znakomicie zwiększa znaczenie danego wzoru, pozwala bowiem znaleźć bez dodatkowego pomiaru wartość A dla dowolnej wartości B, zawartej między b_1 i b_n.

Załóżmy, że, jak to często bywa, wynik pomiarów przedstawiamy graficznie. Odkładamy na osi poziomej Ox (osi odciętych) odcinki proporcjonalne do liczb b_1, b_2..., na osi pionowej Oy (osi rzędnych) odcinki proporcjonalne do liczb a_1, a_2... (rys. 1). Szukamy funkcji $a = f_1(b)$, której czyniłyby zadość dowolne wartości b, zawarte w granicach odcinka b_1 b_5. To równanie będzie spełniała pewna krzywa, leżąca w płaszczyźnie xy, taka, że odległość a dowolnego jej punktu od osi x będzie związana z odległością b od osi y wzo-



rys. 1

rem $a = f_1(b)$. Do wykreślenia tej krzywej pomiary dają nam punkty c_1, c_2... c_5, przez które krzywa musi, oczywiście, przechodzić. Gdy punkty c połączymy odcinkami linii prostych, otrzymamy linię łamaną, o której zakładamy, że w granicy, w miarę coraz większego zbliżania się wzajemnego punktów c, przechodzi w poszukiwaną krzywą. To założenie może się jednak okazać całkowicie fałszywe, gdy punkty c są od siebie odległe. Tak np., gdy pominiemy pomiary b_2, b_4, otrzymamy linię łamaną, której granicą będzie zgoła inna krzywa. Pomiary zatem b_1, b_3, b_5 nie są dostatecznie gęste, aby opartą na nich zależność między a i b można było interpolować.

Gdy obszar pomiaru, tzn. różnica skrajnych wartości b_1, b_n, jest dostatecznie wielki i gdy stopień przybliżenia, jaki otrzymujemy, porównywając wartości obliczone ze wzoru, z wynikiem

pomiarów, jest prawie ten sam dla wartości początkowych b_1, co i dla wartości końcowych b_n, możemy wzór ekstrapolować, tzn. stosować go do takich wartości b, które leżą poza granicami liczb, otrzymanych w doświadczeniu.

Na ogół jednak zarówno interpolacją, jak i ekstrapolacją należy posługiwać się bardzo ostrożnie. Jak bowiem widzieliśmy, warunki, w jakich można je stosować, nie poddają się ścisłemu oznaczeniu.

Przykładem może tu być wyznaczanie zależności gęstości wody od temperatury. Załóżmy, że pomiary wykonywamy co 10°: w temperaturze 0° otrzymujemy liczbę 0,9998676; w temperaturze 10° — 0,9997271, w temperaturze 20° — 0,9982303 itd. Na tej podstawie twierdzimy, że funkcja $d = f(t)$ maleje ze wzrostem temperatury; twierdzenie to jednak jest, jak wiemy, całkowicie niesłuszne, o ile idzie o temperatury zawarte w granicach od 0° do 4°, w tych bowiem granicach d wzrasta ze wzrostem temperatury. Pomiary nie były dostatecznie gęste, aby można je było interpolować. Podobnie, gdybyśmy dane otrzymane z pomiarów w granicach od 0° do 4° chcieli ekstrapolować, otrzymalibyśmy liczby znacznie różniące się od wyników pomiarów; obszar pomiarów był zbyt mały.

Po ustaleniu związku, jaki zachodzi między zmianami wielkości B i A, można wyznaczyć w analogiczny sposób zależność między A i inną wielkością C, charakteryzującą dane zjawisko, a której wartość podczas poprzednich pomiarów była stała. Otrzymamy wzór $a = f_2(c)$. (Tym razem B i pozostałe wielkości miały wartość niezmienną). Postępując tak dalej otrzymamy $a = f_3(d)$, $a = f_4(e)$ itp., i po złączeniu wszystkich tych wzorów w jeden

$$a = f(b, c, d, e...).$$

O ile dalsze pomiary wykażą, że istotnie po podstawieniu do powyższego wzoru dowolnych wartości B, C, D... obliczone wartości A tym mniej różnić się będą od wartości wyznaczonych w doświadczeniu, im dalej posunięta będzie dokładność pomiaru, będzie można uważać wzór powyższy za wyraz prawa fizycznego.

Taka jednak wyłącznie empiryczna droga w nielicznych zaledwie przypadkach prowadzi do pożądanego celu; zazwyczaj wtedy tylko, gdy związek między badanymi wielkościami można ująć w proste wzory matematyczne, jak np. w prawie Boyle'a—Mariotte'a lub Gay—Lussac'a. W przypadkach bardziej złożonych na przeszkodzie stanąć może, między innymi, trudność

w znalezieniu odpowiedniej funkcji dla wyrażenia wyników pomiarów.

Tej trudności nie zdołał np. przezwyciężyć Ptolomeusz (70—147), którego zadziwiająco dokładne pomiary załamania światła w wodzie i szkle dawały, jak na to zwrócił uwagę Bouasse, dostateczną podstawę do sformułowania prawa wstaw, odkrytego, jak wiadomo, dopiero przez Snelliusa (1591—1626). Z podanych przez Ptolomeusza w jego „Optyce" wartości kątów padania i załamania możemy dziś bez trudu wyprowadzić stałość stosunku wstaw kąta padania i kąta załamania, równą przeciętnie, z niewielkimi odchyleniami w poszczególnych pomiarach, dla wody: 1,38, dla szkła: 1,48, a więc bliską tym wartościom, jakie według pomiarów współczesnych posiadają spółczynniki załamania żółtej linii sodu (linia *D*): dla wody — 1,330, dla szkła (lekki crown) — 1,501.

6. WZORY EMPIRYCZNE

Wtedy zazwyczaj poprzestaje się na wzorach przybliżonych, których użyteczność jest na ogół dość ograniczona. Wzory te, o których z góry wiadomo, że nie wyrażają istotnego związku między badanymi wielkościami, noszą często nazwę wzorów empirycznych.

Takim wzorem empirycznym jest wzór $i = nr$ (i — kąt padania, r — kąt załamania, n — spółczynnik załamania), którym posługiwał się jeszcze Kepler (1571—1630) przy badaniu zjawisk załamania światła. Dla kątów i niewielkich stosunek i do r pozostaje mniej więcej stały, w miarę jednak wzrastania kąta i stosunek ten stale wzrasta. Przy podstawieniu zatem do wzoru wartości n wyznaczonej z pomiarów przy małych kątach padania, otrzymujemy dla większych kątów wartości kąta załamania znacznie różniące się od znalezionych doświadczalnie. Wzór $i = nr$ nie może więc być ekstrapolowany.

Nazwę wzorów empirycznych nadajemy często również wzorom dotyczącym przypadków, gdy badana wielkość A zależy nie tylko od wielkości $B, C, D...$, lecz i od czynników, których nie umiemy wyrazić przy pomocy wielkości fizycznych.

Tak np., gdyby z przytoczonych wyżej pomiarów gęstości wody w różnych temperaturach udało się nam ustalić z wymaganą dokładnością kształt funkcji $d = f(t)$, funkcja ta byłaby wzorem empirycznym, wyrażałaby bowiem zależność nie między gęstością w ogóle i temperaturą, lecz między gęstością pewnego ciała (wody) i temperaturą. Pomiary, wykonane z inną cieczą (np. rtęcią), doprowadziłyby do zgoła innej funkcji, zależność bowiem gęstości od temperatury jest różna dla różnych rodzajów ciał. A tej różnicy nie umiemy wyznaczyć w taki sposób, w jaki wyznaczamy zależność od temperatury.

7. TEORIE FIZYCZNE

Nakreślony wyżej pokrótce sposób badania stanowi pospolicie pierwszą początkową jego fazę. Pozwala on w pewnych prostych przypadkach wyznaczyć dokładnie zależność między wielkościami, charakteryzującymi dane zjawisko, w innych bardziej złożonych prowadzi do przybliżonych lub ułamkowych wyznaczeń tej zależności, na ogół zaś ściślej, niżby tego mogła dokonać powierzchowna obserwacja, ustala warunki, w jakich dane zjawisko może zachodzić.

Dopiero rozporządzając takim materiałem, można porównywać ze sobą grupy zjawisk, wykrywać ich cechy wspólne i próbować na tej podstawie szukania praw ogólniejszych.

Wzór tego rodzaju metody postępowania daje mechanika, termodynamika, teoria zjawisk elektrycznych i magnetycznych Maxwella i Hertza, teoria względności.

Można również próbować znaleźć prawa rządzące zjawiskami złożonymi, a więc nastręczającymi większe trudności przy badaniu, zakładając, że są one widomym przejawem zespołu bardzo wielu odpowiednio dobranych zjawisk prostszych, których nie możemy bezpośrednio obserwować. Założenia co do przebiegu tych zjawisk i praw, jakim podlegają, powinny wtedy być tak dobrane, aby odtwarzały przebieg zjawiska bezpośrednio przez nas obserwowanego.

Taki charakter ma tzw. a t o m i s t y c z n y sposób ujmowania zjawisk, który i dziś jeszcze często przeciwstawiany jest pierwszej metodzie postępowania, nazywanej zazwyczaj f e n o m e n o l o g i c z n ą, tzn. taką, w której do praw ogólniejszych dochodzimy wyłącznie na podstawie danych dostarczonych przez doświadczenie. W rzeczywistości jednak różnica tych dwu metod jest mniejsza, niżby się mogło wydawać, i w miarę rozwoju teorii atomistycznych zmniejsza się coraz bardziej.

Dalszy jednak sposób postępowania jest w obydwu przypadkach taki sam. Zarówno prawa ogólne wyrażające wspólne cechy badanej grupy zjawisk, jak i załozenia dotyczące prostych zjawisk, do których chcemy sprowadzić badane zjawiska, są punktem wyjścia teorii fizycznych, stanowiących dedukcyjne ich rozwinięcie i zastosowanie do przypadków szczególnych. Rola doświadczenia ulega wtedy pewnej zmianie: staje się ono raczej sprawdzianem prawidłowości wnioskowania oraz słuszności po-

czynionych założeń. Im lepsza okazuje się zgodność wywodów teoretycznych z doświadczeniem, im większą dziedzinę zjawisk możemy podporządkować danej teorii, tym większe staje się prawdopodobieństwo słuszności czy to uogólnionych praw, które wtedy przybierają charakter z a s a d, czy też poczynionych założeń. Jeżeli jednak nowe doświadczenia doprowadzają do wyników nie mieszczących się w ramach dawnej teorii, wtedy następuje albo odrzucenie założeń, na których opierała się dawna teoria, albo też takie ich przekształcenie, które by niezgodność usunęło. Nowa teoria, z natury rzeczy, jest od poprzedniej ogólniejsza; większa bowiem niż poprzednio dziedzina zjawisk podlega wnioskom wyprowadzonym z nowych zasad lub założeń, leżących u jej podstawy.

Łącząc w ten sposób coraz to większe grupy zjawisk fizyka, krok za krokiem, dąży do idealnego i, być może, nieosiągalnego celu wyprowadzenia wszystkich zasad z jednej tylko zasady ogólnej, stworzenia jednej teorii fizycznej, w której ramach mieściłyby się wszystkie zjawiska fizyczne świata zewnętrznego.

Tak np. odkrycie równoważności ciepła i pracy, obalając teorię cieplika, pozwoliło uważać ciepło za jeden z rodzajów energii i zastąpić dwie niezależne zasady: zasadę zachowania energii mechanicznej i zasadę zachowania cieplika — jedną — zasadą zachowania energii. Teoria względności, przypisując energii masę, prowadzi do dalszego jeszcze uogólnienia, łącząc w jedną dwie na różnych zupełnie drogach ustalone zasady: zachowania energii i zachowania masy.

8. UKŁADY JEDNOSTEK. RÓWNANIE WYMIARÓW

Liczby $a, b, c, d...$ związane wzorem

$$a = f\ (b, c, d, ...)$$

otrzymujemy, jak o tym była wyżej mowa, z pomiarów, tzn. z porównania wartości, jaką w danym przypadku posiadają wielkości $A, B, C, D...$, z pewnymi odpowiadającymi ściśle oznaczonym warunkom wartościami tych samych wielkości, wartościami, które przyjmujemy za jednostki. Przy zmianie jednostek kształt funkcji $f\ (b, c, d...)$ pozostanie taki sam, jak poprzednio, prawo bowiem fizyczne, którego wyrazem jest dana funkcja, nie może zależeć od dowolnego wyboru jednostek. Zmienią się, rzecz prosta, liczby $a, b, c, d...$ i, co za tym idzie, i spółczynniki liczbowe przy wyrazach zawierających te wielkości, oraz war-

tość wyrazów stałych, gdyż prawa strona wzoru będzie musiała być zawsze równa stronie lewej.

Tak np. z prawa Ohma wiemy, że zmieniając opór przewodnika i różnicę potencjałów na jego końcach, otrzymujemy na wartości natężenia prądu liczby, których stosunek do ilorazu liczb, wyrażających odpowiednie wartości różnicy potencjałów i oporu, jest stały. Związek zatem między tymi wielkościami możemy ująć w postać następującą:

$$\frac{i}{\frac{V_1 - V_2}{r}} = k \text{ lub } i = k\,\frac{V_1 - V_2}{r},$$

gdzie i oznacza liczby, otrzymane z porównania danych w doświadczeniu wartości natężenia prądu z pewnym natężeniem, przyjętym za jednostkę, V_1, V_2 oraz r — liczby wyrażające odpowiednie wartości różnicy potencjału i oporu. Przypuśćmy, że przy wybranych w pewien sposób jednostkach tych trzech wielkości otrzymaliśmy liczby takie, które wartość k ustaliły jako równą 100. (Tzn., że stosunek liczby, wyrażającej wartość natężenia prądu do ilorazu liczb V_1—V_2 i r, jest stale równy 100). Jeżeli teraz jednostkę natężenia prądu zwiększymy dziesięciokrotnie, każda z liczb szeregu, zawierającego wyniki pomiarów natężenia prądu, będzie dziesięć razy mniejsza, wobec czego i wartość stosunku i do $\frac{V_1 - V_2}{r}$ zmniejszy się dziesięciokrotnie pozostając jednak i w tym przypadku stałą dla wszystkich wartości natężenia prądu.

Jeżeli jednak odwrotnie nadamy tym spółczynnikom pewne wartości stałe, wtedy wybór przynajmniej jednej z jednostek będzie uwarunkowany przez wybór jednostek pozostałych.

Tak np. nadając we wzorze wyrażającym prawo Ohma, spółczynnikowi k wartość stałą, równą, przypuśćmy, 10, uzależniamy jednostkę natężenia prądu od jednostek różnicy potencjału i oporu. Istotnie, gdy wartość różnicy potencjału zmierzoną w dowolnych jednostkach, wyrazimy liczbą 1, i gdy wartość oporu przewodnika, z którym wykonywamy doświadczenie, też przyjmiemy za równą jednostce, otrzymana wartość natężenia prądu będzie musiała być równa 10. Aby taką wartość istotnie otrzymać z pomiarów, musimy za jednostkę natężenia prądu wziąć wartość natężenia dziesięć razy mniejszą od tej, jaką otrzymujemy przy wartościach różnicy potencjału i oporu, równych jednostce.

Na tej drodze możemy powiązać ze sobą jednostki różnych wielkości w ten sposób, aby wybór niewielkiej ilości jednostek — j e d n o s t e k w i e l k o ś c i p o d s t a w o w y c h lub j e d n o-

stek podstawowych — wyznaczał jednoznacznie jednostki wszystkich innych wielkości — *jednostki wielkości pochodnych* lub *jednostki pochodne*. Wybór, a nawet, przy pewnych dodatkowych założeniach, i liczba wielkości, których jednostki przyjmujemy za podstawowe, są całkowicie dowolne. W praktyce jednak za jednostki podstawowe wybiera się takie, które można najłatwiej odtworzyć i które w możliwie prosty sposób pozwalają wykonywać pomiary wielkości pochodnych. Tym warunkom w mechanice odpowiada najlepiej układ, w którym jednostkami podstawowymi są jednostki długości, czasu i masy. Układ ten, zazwyczaj nazywany *bezwzględnym*, służyć może również do określenia jednostek wielkości niemechanicznych, w przeważającej bowiem ilości przypadków pomiar wielkości fizycznych sprowadza się do pomiaru pewnych wielkości mechanicznych. Wtedy jednak często uzupełnia się podane wyżej jednostki podstawowe dwiema innymi: stopniem temperatury, gdy idzie o zjawiska cieplne, i jednostką jakiejś wielkości elektrycznej lub magnetycznej, gdy chodzi o zjawiska elektromagnetyczne.

Układ bezwzględny nie jest jedynym układem jednostek, używanym w fizyce. Czasami warunki pomiaru są tego rodzaju, że jest rzeczą wygodniejszą zastąpić jednostkę pochodną inną wartością danej wielkości, która wtedy, rzecz prosta, staje się podstawową. Tak np. w mechanice obok pochodnej jednostki siły, wyznaczonej przez jednostki długości, czasu i masy, spotykamy się z tzw. jednostką *ciężarową*, określoną jako ciężar pewnego ciała w oznaczonym miejscu na ziemi, a więc niezależną całkowicie od wyżej podanych jednostek podstawowych. Stosunek tej nowej jednostki do pochodnej jednostki tej samej wielkości wyznaczany jest na drodze doświadczalnej, może przeto w miarę wzrostu ścisłości pomiarów ulegać zmianie. Podobnie w elektryczności obok pochodnych jednostek natężenia prądu i oporu używane są tzw. *międzynarodowe*: amper i om, których stosunek do jednostek pochodnych bezwzględnych noszących te same nazwy jest bardzo bliski jedności.

Te nowe jednostki podstawowe tworzą w związku z innymi nowe układy jednostek. W pierwszym przypadku jest to układ oparty na jednostkach długości, czasu i siły, w drugim na jednostkach długości, czasu, natężenia prądu i oporu. We wszystkich jednak układach zachowane są, jako jednostki podstawowe, jednostki długości i czasu.

Wzory, służące do wyznaczenia związku między jednostkami pochodnymi i podstawowymi, zazwyczaj sprowadzają się do jed-

nego wyrazu. W najprostszym więc przypadku, gdy dana wielkość pochodna A związana jest bezpośrednio z wielkościami podstawowymi, do określenia jednostki służyć będzie wzór

$$a = k \,.\, l^{\alpha} m^{\beta} t^{\gamma},$$

gdzie l, m, t oznaczają wartości długości, masy i czasu, odpowiadające danej wartości a, k — jest spółczynnikiem stałym, α, β, γ liczbami, które równie dobrze mogą być całkowitymi, jak i ułamkowymi, dodatnimi, jak i ujemnymi.

Gdy założymy, że $k = 1$, wtedy jednostką wielkości A jest ta jej wartość, której odpowiadają jednostkowe wartości długości, masy i czasu.

Jeżeli jednostkę długości zmienimy, np. zwiększymy n_1 razy, wynik pomiarów tej samej długości, co poprzednio, wyrazi się liczbą $l_1 = \frac{l}{n_1}$. Podstawiając ją do wzoru, otrzymamy inną liczbę na tę samą wartość A

$$a_1 = l_1^{\alpha} m^{\beta} t^{\gamma} = \left(\frac{l}{n_1}\right)^{\alpha} m^{\beta} t^{\gamma}$$

i stąd

$$n_1^{\alpha} a_1 = l^{\alpha} m^{\beta} t^{\gamma} = a$$

Gdy teraz l, m, t będą równe jednostce, a_1 będzie równe $\frac{1}{n_1^{\alpha}}$; nowa więc jednostka wielkości A, otrzymana przy zwiększeniu n_1 razy jednostki długości, jest n_1^{α} razy większa od poprzedniej.

Analogicznie znajdziemy, że przy zwiększeniu n_2 razy jednostki masy i n_3 razy jednostki czasu jednostka A zwiększy się odpowiednio n_2^{β} i n_3^{γ} razy.

Oznaczmy dawne jednostki długości, masy, czasu i wielkości A symbolicznie przez L, M, T i $[A]$, nowe zaś przez L_1, M_1, T_1 i $[A]_1$. Wobec tego, że

$$\frac{[A]_1}{[A]} = n_1^{\alpha} n_2^{\beta} n_3^{\gamma}$$

i że

$$\frac{L_1}{L} = n_1; \quad \frac{M_1}{M} = n_2; \quad \frac{T_1}{T} = n_3,$$

mamy

$$\frac{[A]_1}{[A]} = \left(\frac{L_1}{L}\right)^{\alpha} \left(\frac{M_1}{M}\right)^{\beta} \left(\frac{T_1}{T}\right)^{\gamma} \tag{1}$$

Możemy przeto zależność jednostki A od jednostek podstawowych wyrazić symbolicznym wzorem, nazywanym r ó w n a n i e m w y m i a r u lub w y m i a r e m wielkości A.

$$[A] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} \tag{2}$$

Gdy jednostkę pochodnej wielkości C wyznaczamy ze wzoru, ustalającego jej związek z wielkościami również pochodnymi A i B, których równania wymiarów znamy, wtedy, rozumując w ten sam sposób, co poprzednio, dochodzimy do wzorów typu

$$[C] = [A]^{\delta} [B]^{\varepsilon},$$

z których po podstawieniu wymiarów

$$[A] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} \text{ i } [B] = L^{\alpha_1} M^{\beta_1} T^{\gamma_1},$$

otrzymujemy równanie wymiaru wielkości C

$$[C] = L^{\alpha\delta+\alpha_1\varepsilon} M^{\beta\delta+\beta_1\varepsilon} T^{\gamma\delta+\gamma_1\varepsilon} = L^{\zeta} M^{\eta} T^{\vartheta}.$$

Z rozważań powyższych wynika, że każdy wzór fizyczny musi być j e d n o r o d n y, tzn. że wszystkie jego wyrazy po podstawieniu do nich zamiast liczb wymiarów odpowiednich wielkości muszą mieć ten sam wymiar. Gdyby bowiem tak nie było, przy zmianie jednostek podstawowych prawa strona wzoru przestałaby być równa lewej.

Pojęcie wymiaru wprowadził do fizyki J. Fourier (1768—1829) w swej „Teorii analitycznej ciepła", wydanej w 1822 r.

9. JEDNOSTKA DŁUGOŚCI

Wybór jednostki długości na pozór trudności nie nastręcza. W świecie nas otaczającym spotykamy często ciała, których rozmiary liniowe pozostają zawsze w tym samym mniej więcej stosunku, co nas doprowadza do wniosku, że są one na ogół niezmienne. Moglibyśmy przeto długość jakiegokolwiek z tych c i a ł s t a ł y c h, któremu dla dogodności pomiaru nadalibyśmy kształt np. pręta lub sztaby, wziąć za jednostkę długości. Otrzymalibyśmy tym sposobem w z o r z e c jednostki długości, który, oczywiście, można odtworzyć w dowolnej ilości kopii. Dla pomiarów niezbyt dokładnych wzorzec taki byłby nieraz wystarczający. Trudności rozpoczynają się dopiero wtedy, gdy przechodzimy do pomiarów ściślejszych. Doświadczenie przekonywa nas, że nawet najstaranniej wykonane kopie wzorca przestają przy zmianie warunków, w jakich się znajdują, mieć tę samą długość, co wzorzec. Jeżeli jedną z nich np. ogrzejemy, stanie się ona zazwyczaj nieco dłuższa od tej, która ogrzewana nie była. Podobnie, jeżeli jedną z nich poddamy większemu ciśnieniu, stwierdzimy znów przez porównanie z wzorcem zmianę stosun-

ków ich długości. Wzorzec więc jednostkowy (czy też jego kopia) posiada oznaczoną wartość jedynie w oznaczonych warunkach. Za każdym przeto razem, gdy używamy go do pomiarów, musimy dokładnie odtwarzać jednakowe warunki. Jak o tym była wyżej mowa (ust. 3), jest to niemożliwe. Wyjście może być dwojakie: albo odrzucić tego rodzaju jednostki i uciec się do tzw. jednostek naturalnych, to znaczy za jednostkę przyjąć jakąś długość, nie przez nas mniej lub więcej sztucznie skonstruowaną, lecz daną nam bezpośrednio w świecie nas otaczającym i przy tym taką, o której mamy dostateczne podstawy mniemać, że posiada w warunkach doświadczenia wartość stałą; albo też, korzystając z faktu, stwierdzonego doświadczalnie, że nie wszystkie ciała w jednakowym stopniu zmieniają swe rozmiary liniowe przy zmianie czynników zewnętrznych, zbudować wzorzec z takiego ciała, w którym by zmiany te były najmniejsze, a więc którego długość przy niecałkowicie dokładnym odtworzeniu warunków pierwotnych ulegałaby stosunkowo małej zmianie.

Próby wprowadzenia naturalnych jednostek długości sięgają czasów stosunkowo bardzo dawnych. Im, niewątpliwie, zawdzieczamy takie nazwy jednostek, jak: łokieć, sążeń, mila rzymska (mille passuum) itp. Wartość jednak tych jednostek, związanych z wymiarami ciała ludzkiego, zbyt była zmienna, aby mogła służyć jako podstawa pomiarów. Toteż z biegiem czasu nazwy te zaczęły oznaczać jednostki wzorcowe o długościach, równych przeciętnym wartościom odpowiednich jednostek naturalnych.

Z naukową próbą dania naturalnej jednostki spotykamy się, o ile pominiemy wcześniejszy projekt Huygensa (1673 r.) oparty jednak na innych zgoła założeniach, dopiero w końcu XVIII wieku, gdy za jednostkę długości postanowiono wziąć $\frac{1}{40.000.000}$ część długości południka paryskiego. Jednostkę tę nazwano metrem.

Gdyby ziemia była kulą, pomiar długości południka, tj. linii krzywej otrzymanej z przecięcia powierzchni ziemi płaszczyzną, przechodzącą przez oś ziemi i kierunek pionowy w danym miejscu ziemi, byłby rzeczą stosunkowo łatwą. Wystarczyłoby zmierzyć przy pomocy dowolnej jednostki na powierzchni ziemi odległość dwu punktów, leżących na tym samym południku, i wyznaczyć różnicę ich szerokości geograficznych. Ziemia jednak, jak wiemy, kulą nie jest. Długość

łuku odpowiadającego 1° różnicy szerokości geograficznej nie jest jednakowa we wszystkich punktach południka; na ogół wzrasta od równika do biegunów. Wyznaczenie przeto długości południka wymaga wielu pomiarów w różnych punktach globu ziemskiego. Przy tym południki, przechodzące przez różne punkty ziemi, są różnej długości; stąd konieczność oznaczenia, którego południka długość przyjmujemy za podstawę.

Pomysł podziału ćwierci południka na 10 000 000 części miał swe źródło w próbie wprowadzenia i do pomiarów kąta układu dziesiętnego. Kąt prosty miał być dzielony nie na 90, lecz na 100 części, nazywanych tak, jak i poprzednie, stopniami. (W terminologii francuskiej $\frac{1}{90}$ część kąta prostego oznaczana jest nazwą degré, $\frac{1}{100}$ część — grade). Stopień dzieli się na 100 minut, minuta na 100 sekund. Kąt prosty zawierałby zatem 100×100×100 sek. = 1 000 000 sekund. Długości łuku 1000 metrów na powierzchni ziemi odpowiada kąt środkowy 100 sekund = 1 minucie. Taki podział kąta nie znalazł jednak powszechnego zastosowania.

Tej jednostce długości miała być równa w temperaturze 0° długość wzorcowej sztaby platynowej o przekroju kwadratowym. Pomiary jednak geodezyjne, wykonywane w wieku XIX z coraz to większą dokładnością, przekonały, że ten metr wzorcowy, tzw. metr archiwalny (mètre des archives), różni się nieco od dziesięciomilionowej części ćwierci południka.

Według Bessela (1837 r.) długość ta wynosi 10 000 856 m, według pomiarów nowszych jest o mniej więcej 1000 m większa od obliczonej przez Bessela.

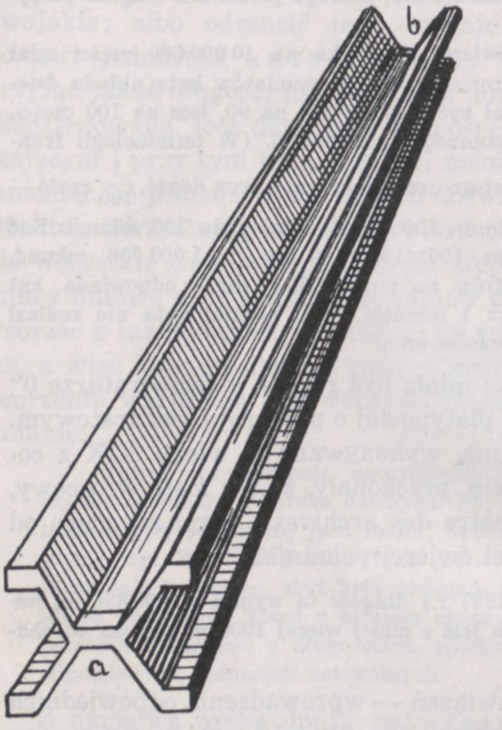
Z dwu możliwych rozwiązań — wprowadzenia odpowiednich poprawek do wszystkich pomiarów długości, wykonanych przy pomocy metra archiwalnego lub jego kopii, albo też przyjęcia długości tego metra za obowiązującą jednostkę — wybrano ze względów praktycznych drugie, zastępując jednak wzorzec poprzednio używany innym, mniej niż poprzedni zależnym od przypadkowych nagłych zmian warunków zewnętrznych.

Nowy ten wzorzec jest wykonany ze stopu platyny (90%) i irydu (10%), wobec czego spółczynnik jego rozszerzalności, a co za tym idzie, zależność jego długości od niewielkich zmian temperatury jest nieco mniejsza, niż metra archiwalnego.

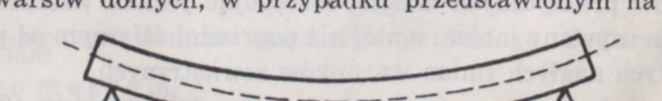
Długość sztaby platynowej zmienia się (w granicach od 0° do 85°) według wzoru $l_t = l_0 (1 + 8{,}901 . 10^{-6}\, t + 1{,}21 . 10^{-9}\, t^2)$, gdzie t — stopnie skali gazowej; zmiany długości sztaby, wykonanej ze

stopu platyny z irydem, o składzie wyżej podanym, wyraża wzór
$l_t = l_0 (1 + 8{,}651 \cdot 10^{-6}\, t + 1{,}00 \cdot 10^{-9}\, t^2)$.

Przekrój jego nie jest kwadratowy, lecz przypomina kształtem literę *H* (rys. 2). Na powierzchni *ab* dwie kreski, umieszczone w pewnej odległości od końców wzorca, ograniczają długość, równą prawie dokładnie długości metra archiwalnego (różnica nie przekracza 10^{-7} metra). Sztaba wzorcowa jest przeto nieco od metra dłuższa. W ten sposób unika się błędu, jaki mógłby powstać wskutek nieuniknionego ścierania się końców sztaby przy porównywaniu wzorca z kopiami. Powierzchnia *ab* tworzy tzw. w a r s t w ę o b o j ę t n ą sztaby wzorcowej. Nazwę tę dajemy warstwie, która przechodzi przez środek ciężkości sztaby i której długość przy zginaniu się pręta pod działaniem jego własnego ciężaru ani się nie zwiększa, jak warstw dolnych, w przypadku przedstawionym na rys. 3,



rys. 2



rys. 3

gdzie zresztą odkształcenie dla jasności rysunku jest ogromnie powiększone, ani się nie zmniejsza, jak warstw górnych, lecz pozostaje niezmienna (por. ust. 5 rozdz. V).

Wzorzec ten nazwany metrem międzynarodowym został przyjęty za urzędową jednostkę długości przez znaczną liczbę państw, między innymi i Polskę, z których każde posiada dokładną jego kopię, periodycznie porównywaną ze wzorcami roboczymi, przechowywanymi, podobnie jak i wzorzec podstawowy, tzw. prototyp, w Międzynarodowym Biurze Wag i Miar (Bureau International des Poids et Mesures), mieszczącym się w Sèvres pod Paryżem.

Obecnie więc nazywamy metrem odległość, w temperaturze topniejącego lodu, osi dwu kresek wyrytych na prototypie. Wielokrotności metra oznaczamy, dodając liczebniki greckie, ułamki — aż do pewnej granicy — dodając liczebniki łacińskie. Mamy więc:

1 miriametr (mrm) $= 10\,000$ m $= 10^4$ m
1 kilometr (km) $= 1\,000$ m $= 10^3$ m
1 hektometr (hm) $= 100$ m $= 10^2$ m
1 dekametr (dm) $= 10$ m $= 10^1$ m
1 metr (m) $= 1$ m $= 10^0$ m
1 decymetr (dcm) $= 0{,}1$ m $= 10^{-1}$ m
1 centymetr (cm) $= 0{,}01$ m $= 10^{-2}$ m
1 milimetr (mm) $= 0{,}001$ m $= 10^{-3}$ m $= 10^{-1}$ cm
1 mikron (μ) $= 0{,}000\,001$ m $= 10^{-6}$ m $= 10^{-4}$ cm
1 milimikron ($\mu\mu$ lub mμ) $= 0{,}000\,000\,001$ m $= 10^{-9}$ m $=$ $= 10^{-7}$ cm
1 angström (Å) $= 0{,}000\,000\,000\,1$ m $= 10^{-10}$ m $= 10^{-8}$ cm

W fizyce za jednostkę długości bierzemy zazwyczaj 1 cm. Uniezależnienie jednostki długości od jednostek naturalnych posiada jednak pewne złe strony. Nie możemy bowiem być pewni, czy na długość wzorców metrowych nie mają wpływu i nieprzewidziane przez nas przy określaniu długości metra czynniki zewnętrzne.

Że takie przypuszczenia nie są zupełnie bezpodstawne, dowiodło porównanie w 1919 r. wzorców narodowych ze wzorcami roboczymi Międzynarodowego Biura Wag i Miar. Okazało się wtedy, że długości tych wzorców zmieniły się w stosunku, który każe przypuszczać powstanie pewnego wydłużenia wzorców roboczych w granicach od $0{,}3\mu$ do $0{,}5\mu$. Przyczyna tego wydłużenia nie jest dotychczas wyjaśniona. Według Guillaume'a było nią, być może, częste czyszczenie wzorców roboczych.

Ważną jest przeto rzeczą związanie tej dowolnej, w gruncie rzeczy, jednostki z jednostką, której niezmienność w warunkach doświadczeń ziemskich byłaby mniej podległa wątpliwościom. Taką jednostką jest, jak na to zwrócił uwagę Maxwell, długość fali linii widmowej, wysyłanej przez oznaczony pierwiastek, pobudzany do świecenia w dokładnie określonych warunkach. Pierwszą próbę tego rodzaju wykonali w 1892 r. Michelson i Benoît, wyrażając długość fali czerwonej linii kadmu λ_c w jednostkach układu metrycznego.

Z pomiarów ich wynika, że w powietrzu o temperaturze 14°,93 skali gazowej pod ciśnieniem 760 mm rtęci

$$\lambda_c = 0{,}643\,847\,22\ \mu$$

i stąd $$1\ \mathrm{m} = 1\,553\,163{,}5\ \lambda_c$$

Dokładniejsze pomiary, wykonane w 1913 r. przez Benoîta, Fabry'ego i Pérota, dały wartości następujące:

$$\lambda_c = 0{,}643\,846\,96\ \mu$$
$$1\ \mathrm{m} = 1\,553\,164{,}13\ \lambda_c.$$

10. JEDNOSTKA CZASU

Za jednostkę czasu można by, oczywiście, użyć dowolny przeciąg czasu, równy czasowi trwania jakiegoś zjawiska, zachodzącego zawsze w tych samych warunkach, a więc np. zjawiska, powtarzającego się okresowo w sposób identyczny. Z tych zjawisk, niewątpliwie, najbardziej uderzającym nasze zmysły jest okresowy powrót dnia i nocy oraz pór roku. Toteż od dawna jednostkę czasu związano ze zjawiskami astronomicznymi, a przede wszystkim z ruchem obrotowym ziemi, który możemy wyznaczyć z obserwacji zmian położenia tzw. gwiazd stałych na sklepieniu niebieskim.

Ustawmy lunetę w płaszczyźnie południka ziemskiego i skierujmy ją na jakąkolwiek gwiazdę, przechodzącą w danej chwili przez tę właśnie płaszczyznę — jest to *górowanie* gwiazdy. Gwiazda wkrótce zniknie z pola widzenia lunety i pojawi się w nim dopiero po upływie pewnego, dość długiego, czasu. Ten przeciąg czasu, w ciągu którego ziemia wykonała całkowity obrót dookoła osi, nazywamy *dniem gwiazdowym*.

Zakładamy tutaj, że kierunek lunety w przestrzeni przez ten czas się nie zmienia. Jest to założenie niesłuszne, ruch bowiem ziemi dookoła słońca z konieczności powoduje pewną zmianę tego kierunku.

Poprawka jednak, którą wskutek tego należy wprowadzić, jest na ogół bardzo mała; tym mniejsza, im bardziej jest od nas oddalona obserwowana gwiazda.

Przyjmując ruch obrotowy ziemi za jednostajny, możemy dzień gwiazdowy podzielić na części, odpowiadające ułamkom całkowitego obrotu. Czas, w którego ciągu ziemia wykonywa $\frac{1}{24}$ część obrotu całkowitego, a więc obraca się o 15°, nosi nazwę godziny gwiazdowej, $\frac{1}{60}$ godziny, odpowiadająca obrotowi ziemi o 15′, — nazwę minuty gwiazdowej (od łacińskiego terminu — pars minuta prima), $\frac{1}{60}$ minuty, odpowiadająca obrotowi ziemi o 15″ — nazwę sekundy gwiazdowej (od łacińskiego terminu — pars minuta secunda).

Możemy uwolnić się od konieczności ciągłego wykonywania pomiarów astronomicznych, jeżeli ustalimy związek między tymi jednostkami a czasem trwania odpowiednio dobranego zjawiska ziemskiego. Do tego dobrze nadaje się wahadło, ktorego wahania powtarzają się w danym miejscu ziemi w jednakowych odstępach czasu (mierzonych, oczywiście, w jednostkach gwiazdowych), o ile tylko postaramy się o to, aby największy kąt odchylenia wahadła od pionu pozostawał zawsze przy kolejnych wahaniach ten sam. Można tak dobrać długość wahadła, że w ciągu dnia gwiazdowego wahadło wykona dokładnie 86400 wahań. Wtedy okres jednego wahnięcia równy jest 1 sek i może służyć jako jednostka czasu.

Oparcie jednak rachuby czasu o dzień gwiazdowy posiada tę niedogodność, że codzienne nasze życie związane jest nie z pozornym ruchem gwiazd, lecz z pozornym ruchem słońca. Za jednostkę zatem należałoby raczej przyjąć czas, jaki upływa między dwoma kolejnymi górowaniami słońca (dwoma południami). Ten prawdziwy dzień słoneczny różni się jednak od dnia gwiazdowego. Wahadło, którego okres wahań byłby równy 1 sek. gwiazd., wykonałoby w ciągu prawdziwego dnia słonecznego więcej niż 86 400 wahań. Ruch bowiem ziemi dookoła słońca powoduje pozorne przesuwanie się tej gwiazdy na niebie w kierunku z zachodu na wschód, co w związku z ruchem obrotowym ziemi w tym samym kierunku wywołuje codzienne opóźnianie się

górowania słońca. Przyjmując ruch obrotowy ziemi za jednostajny, nie możemy uważać ruchu pozornego słońca również za jednostajny; wahadło, którego okres równy jest jednej sekundzie gwiazdowej, wykonywa w ciągu prawdziwego dnia słonecznego coraz to inną liczbę wahnięć. Wobec tego przy pomiarze czasu zastąpiono pozorny ruch słońca rzeczywistego pozornym ruchem słońca urojonego, które, poruszając się po równiku niebieskim ruchem jednostajnym, odbywa całkowitą drogę dookoła ziemi w przeciągu tego samego czasu, co słońce rzeczywiste. Czas między dwoma kolejnymi górowaniami tego słońca urojonego, w pewnych porach roku większy, w innych mniejszy od prawdziwego dnia słonecznego, nosi nazwę średniego dnia słonecznego, oznaczanego literą *d* (dies — dzień). Dzień ten dzielimy, podobnie jak dzień gwiazdowy, na 24 godziny, oznaczane literą *h* (hora — godzina), które znów dzieli się na minuty i sekundy.

Pomiędzy dniem gwiazdowym i średnim dniem słonecznym istnieje następujący związek:

$1^d = 1$ dz. gwiazd $+ 3$ min. gw. 56,555 sek. gw.

1 dz. gw. $= 1^d - 3^{m.}\,55^{sek.},909$

Większą jednostką jest rok, tj. czas, jaki upływa między dwoma kolejnymi przejściami ziemi przez punkt wiosennego porównania dnia z nocą, leżący na przecięciu orbity ziemskiej z równikiem niebieskim.

Rok zawiera 365, 242 średnich dni słonecznych i o jeden więcej dni gwiazdowych.

W fizyce za jednostkę czasu przyjmuje się sekundę średniego czasu słonecznego, a więc jednostkę, opartą, jak to wynika z rozważań poprzednich, na założeniu stałości dnia gwiazdowego i jednostajności ruchu obrotowego ziemi.

Przy sprawdzaniu słuszności tego założenia możemy się opierać, podobnie jak w przypadku wzorca długości, jedynie na porównywaniu stosunku między wybraną jednostką czasu a czasem trwania zjawisk zachodzących w oznaczonych dokładnie warunkach. Najdogodniejsze pod tym względem są zjawiska ruchu ciał niebieskich. Zasady mechaniki oraz prawo powszechnego ciążenia pozwalają w bardzo wielu przypadkach dokładnie obliczyć położenie, jakie dana gwiazda będzie zajmowała na niebie po upływie pewnego czasu. Z porównania obliczonego czasu z tym, jaki otrzymujemy z bezpośrednich pomiarów, można zdać sobie sprawę ze zmiany stosunku danego przeciągu czasu

do wybranej przez nas jednostki. Jeżeli we wszystkich obserwowanych przypadkach stosunek ten zmienia się w ten sam mniej więcej sposób, to albo prawa, które nam służyły na podstawę rachunku, są nieścisłe, albo też zmieniła się wybrana przez nas jednostka czasu, innymi słowy, uległa zmianie prędkość kątowa ruchu obrotowego ziemi. Mamy pewne powody przypuszczać, że, istotnie, prędkość ta stopniowo zmniejsza się na skutek hamującego działania przypływów i odpływów morza tak, że dzień gwiazdowy wzrasta w ciągu 1000 lat o mniej więcej 0,012 sekundy.

MECHANIKA

ROZDZIAL I

O RUCHU

1. WZGLĘDNOŚĆ RUCHU

Gdy ciało z biegiem czasu zmienia swe położenie względem innych ciał (lub innego ciała), mówimy, że jest względem tych ciał (lub tego ciała) w ruchu. Ruch ciała jest przeto zjawiskiem o przebiegu zależnym od wyboru tych ciał (lub tego ciała), względem których rozpatrujemy zmianę jego położenia.

Tak np. ciało, nieruchomo spoczywające na ziemi, obserwatorowi, znajdującemu się na słońcu, wyda się poruszającym się wzdłuż linii krzywej, przypominającej linię śrubową.

Ciała te (lub ciało) stanowią u k ł a d o d n i e s i e n i a. Z punktu widzenia geometrii wybór układu odniesienia jest całkowicie dowolny, w fizyce jednak ograniczony jest pewnymi dodatkowymi warunkami, z których nie najmniej ważny jest ten, aby prawa ruchu w danym układzie były możliwie najprostsze.

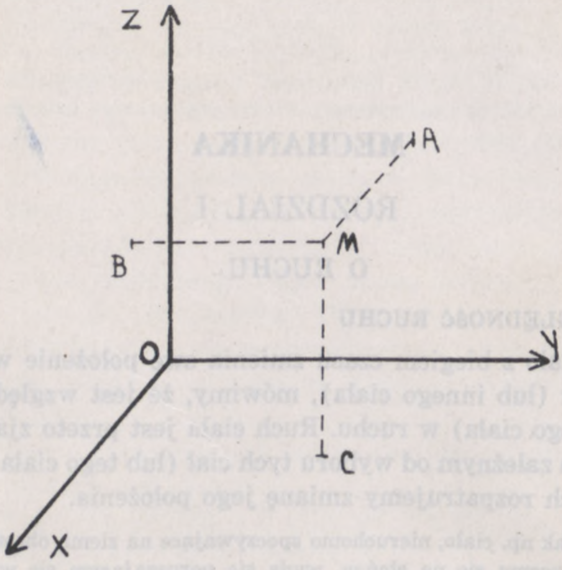
2. RUCH JEDNOSTAJNY PUNKTU MATERIALNEGO

Ruch ciała uważamy za znany, gdy możemy w dowolnej chwili wyznaczyć jego położenie względem układu odniesienia. Czasami wystarczy znać położenie jednego tylko punktu ciała tak, że rozpatrywanie ruchu całego ciała można zastąpić rozpatrywaniem ruchu tego właśnie punktu, który wtedy nazywamy p u n k t e m m a t e r i a l n y m.

Tak np. o oddaleniu się lub przybliżeniu tramwaju możemy sądzić, obserwując ruch jakiejś dowolnie małej jego części (np. żarówki, umieszczonej w latarni na przodzie tramwaju).

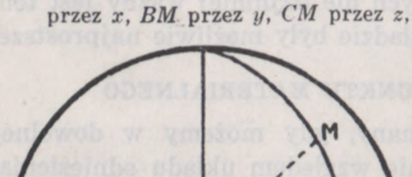
Położenie punktu materialnego względem układu odniesienia możemy wyznaczyć w sposób następujący. Przez odpowiednio wybrany

punkt układu odniesienia prowadzimy trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny, przecinające się wzdłuż prostych, również wzajemnie prostopadłych. Płaszczyzny te i proste nazywamy płaszczyznami



rys. 4

i osiami spółrzędnych prostokątnych. Odległości punktu materialnego M od płaszczyzn ZOY, ZOX i XOY noszą nazwę spółrzędnych prostokątnych punktu M. Oznaczamy je takimi samymi literami, jak osi, do których są równoległe, a więc AM przez x, BM przez y, CM przez z, i uważamy je za dodatnie, gdy kierunek AM, BM lub CM jest zgodny z dodatnim kierunkiem odpowiednich osi. Spółrzędne te wyznaczają jednoznacznie położenie punktu M w danym układzie odniesienia. Nieraz korzystniej jest używać innego układu spółrzędnych (gdy np. układem odniesienia jest ziemia). Za jedną ze spółrzędnych bierze się odległość $r = OM$ danego punktu od pewnego stałego punktu O (dla punktów, leżących na powierzchni ziemi, gdy punktem O jest środek ziemi, jest ona równa promieniowi ziemi w danym punkcie), za drugą — kąt odpowiada-

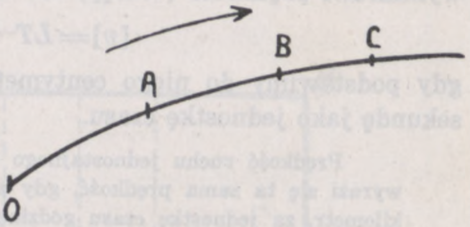


rys. 5

jący szerokości geograficznej φ punktu M, za trzecią — kąt, odpowiadający długości geograficznej ϑ tegoż punktu. Jest to układ spółrzędnych biegunowych; biegunem jest punkt O, dla którego $r = 0$.

Przypuśćmy, że punkt materialny M w ruchu swym względem danego układu odniesienia przechodzi kolejno przez punkty linii krzywej *OABC...*, która jest torem lub drogą punktu M.

Za długość drogi, przebytej przez punkt materialny M w ciągu t sek, będziemy uważali odległość od dowolnie wybranego punktu O, mierzoną wzdłuż toru, w jakiej po upływie t sek od chwili przejścia przez punkt O znajdzie się punkt M.



rys. 6

Długość ta zmienia się z biegiem czasu. Nazwijmy prędkością wielkość, której wartość liczbowa jest miarą tej zmiany, odniesionej do jednostki czasu. Gdy długość drogi zmienia się w równych, dowolnie wybranych odstępach czasu zawsze o tę samą wartość, stosunek jej zmiany do czasu, w ciągu którego zmiana ta nastąpiła, pozostaje zawsze stały. W tym przypadku i prędkość ma również wartość stałą, którą, zgodnie z jej określeniem, możemy wyznaczyć ze wzoru

$$v = k\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = k\frac{s_2}{t_2} = k\frac{s_1}{t_1}, \tag{1}$$

gdzie k jest czynnikiem zależnym od wyboru jednostki prędkości (Wstęp, ust. 8), s_2 i s_1 oznaczają długość dróg, przebytych przez punkt materialny M w ciągu t_2 i t_1 jednostek czasu. Tego rodzaju ruch nazywamy ruchem jednostajnym.

Przyjmując $k = 1$ i mierząc długość drogi w centymetrach, a czas w sekundach, możemy za jednostkę prędkości wziąć prędkość takiego ruchu jednostajnego, w którym długość przebytej przez punkt materialny drogi wzrasta o 1 cm w ciągu 1 sek. Ze wzoru (1) otrzymujemy:

$$v=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\frac{s}{t}. \qquad (1\,a)$$

Gdyby długość drogi wzrosła o s cm w ciągu 1 sek, prędkość punktu byłaby s razy większa od jednostki prędkości, ponieważ jednak wzrost ten następuje nie w ciągu 1 sek, lecz t sek, prędkość jest t razy mniejsza, a więc ostatecznie równa $\frac{s}{t}$ jednostek prędkości.

Tę jednostkę prędkości nazywamy centymetrem na sekundę i oznaczamy symbolicznie przez cm/sek. To oznaczenie odpowiada wymiarowi prędkości (Wstęp, ust. 8)

$$[v]=LT^{-1},$$

gdy podstawimy do niego centymetr jako jednostkę długości, sekundę jako jednostkę czasu.

Prędkość ruchu jednostajnego wynosi 100 cm/sek. Jaką liczbą wyrazi się ta sama prędkość, gdy za jednostkę długości weźmiemy kilometr, za jednostkę czasu godzinę? Ze wzoru (1) ust. 8 Wstępu wynika, że nowa jednostka prędkości jest do danej w stosunku

$$\frac{L_1}{L}\cdot\frac{T}{T_1}$$

(α bowiem równa jest 1, $\beta=0$; $\gamma=-1$).

Liczby więc wyrażające tę samą wartość prędkości będą w stosunku odwrotnym

$$\frac{x}{100}=\frac{L}{L_1}\cdot\frac{T_1}{T},$$

gdzie L oznacza centymetry, L_1 — kilometry, T — sekundy, T_1 — godziny. Biorąc pod uwagę, że

$$\frac{L}{L_1}=\frac{1}{100000},\quad \frac{T_1}{T}=3600,$$

otrzymujemy

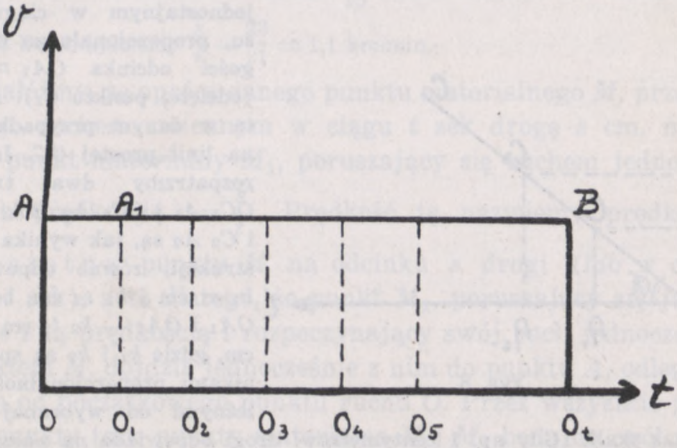
$$x=100\cdot\frac{1}{100000}\cdot 3600=3{,}6\ \text{km/godz.}$$

Gdy znamy prędkość ruchu jednostajnego, wzór (1a) pozwala obliczyć długość drogi przebytej przez punkt materialny M w ciągu czasu t

$$s=v\,.\,t \qquad (2)$$

Odkładajmy na osi poziomej (o s i o d c i ę t y c h) odcinki o długości proporcjonalnej do liczby sekund, jakie upłynęły od początku ruchu (tzn. od przejścia punktu materialnego M przez

punkt O) i wystawmy w końcowym punkcie każdego z tych odcinków odcinki do nich prostopadłe, o długości proporcjonalnej do wartości liczbowej prędkości, mierzonej w cm sek (rys. 7). Odcinki $OA, OA_1 \ldots O_tB$ (wystawione w kierunku osi pionowej Ov — o s i r z ę d n y c h) są wszystkie jednakowej długo-



rys. 7

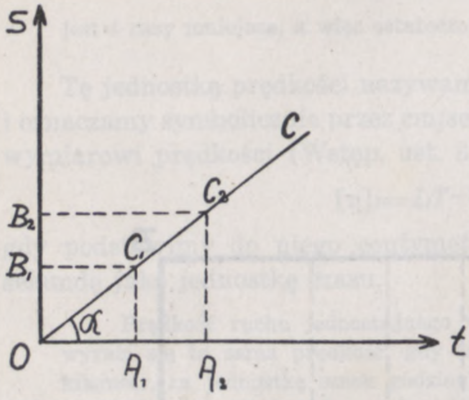
ści, prędkość bowiem ruchu jest w tym przypadku stała. Wobec tego linia przechodząca przez ich górne końce jest linią prostą, równoległą do Ot, figura zaś $OABO_t$ — prostokątem, którego pole $OO_t \times OA$ wyraża się liczbą proporcjonalną do liczby, wyrażającej w cm drogę, przebytą z prędkością v cm/sek w ciągu t sek.

Gdy wykres wykonamy w takiej skali, że zarówno 1 sek, jak i 1 cm/sek odpowiadają odcinki o długości 1 cm, wzięte odpowiednio w kierunkach Ot i Ov, pole prostokąta ma tyle cm^2, ile cm wynosi długość przebytej drogi. Przy użyciu skali 10 razy mniejszej (1 sek i 1 cm/sek odpowiada 1 mm) pole należy wyrazić w mm^2, aby otrzymać liczbę równą liczbie, wyrażającej drogę przebytą w cm.

Jakiejkolwiek więc użyjemy skali, pole zbudowanego w ten sposób prostokąta jest zawsze miarą drogi, przebytej ruchem jednostajnym.

Zależność długości drogi od czasu, w ciągu którego droga tą została przebyta ruchem jednostajnym, możemy przedstawić graficznie w sposób następujący. Na osi odciętych odkładamy odcinki

o długości proporcjonalnej do ilości sekund, które upłynęły od początku ruchu; w kierunku osi rzędnych odcinki, proporcjonalne do długości dróg, jakie punkt materialny M przeszedł w ciągu danego czasu (rys. 8). Otrzymamy w ten sposób na płaszczyźnie SOt szereg punktów C, których odległość $C_1 A_1 = OB_1$ od osi t (rzędna punktu C_1) jest proporcjonalna do długości drogi przebytej ruchem jednostajnym w ciągu czasu, proporcjonalnego do długości odcinka $OA_1 = C_1B_1$ (odciętej punktu C_1). Punkty te w danym przypadku leżą na linii prostej OC. Istotnie, rozpatrzmy dwa trójkąty $OC_1 A_1$ i $OC_2 A_2$. Boki $C_1 A_1$ i $C_2 A_2$ są, jak wynika z konstrukcji, równe odpowiednio $k_1 s_1$ cm i $k_1 s_2$ cm, boki zaś OA_1 i OA_2 — $k_2 t_1$ cm i $k_2 t_2$ cm, gdzie k_1 i k_2 są spółczynnikami proporcjonalności, zależnymi od wybranej przez nas skali. (Gdy np. 1 centymetrowi drogi odpowiada na naszym rysunku odcinek 1 cm, 1 sekundzie zaś odcinek 1 mm, $k_1 = 1$, $k_2 = 0{,}1$).



rys. 8

Z założenia, że prędkość jest stała, wynika, że

$$\frac{C_2 A_2}{O A_2} = \frac{k_1 s_2}{k_2 t_2} = \frac{C_1 A_1}{O A_1} = \frac{k_1 s_1}{k_2 t_1} = \frac{k_1}{k_2} v$$

Wobec tego prostokątne trójkąty $OC_1 A_1$ i $OC_2 A_2$ są podobne. A zatem $\sphericalangle\, C_1 OA_1$ jest równy $\sphericalangle\, C_2 OA_2$, punkty więc C_1 C_2 leżą na prostej, przechodzącej przez punkt O. Gdy czas i długość drogi odtwarzamy w tej samej skali (a więc, gdy jednostce czasu i jednostce długości drogi odpowiada ta sama długość odcinka na wykresie), wtedy z uwagi, że $k_1 = k_2$,

$$\frac{C_1 A_1}{O A_1} = \frac{s_1}{t_1} = v = tg\, \alpha$$

styczna kąta nachylenia prostej do osi odciętych jest liczbowo równa prędkości ruchu jednostajnego.

3. PRĘDKOŚĆ RUCHU ZMIENNEGO

Najczęściej jednak mamy do czynienia z ruchami zmiennymi, w których stosunek przyrostu drogi do odpowiedniego czasu nie tylko w każdym punkcie toru jest inny, lecz zmienia

się również w zależności od wartości tego odstępu czasu, do którego go odnosimy.

Niech np. pociąg przechodzi pierwsze 3 km po wyjściu ze stacji w ciągu 6 min, następne 20 km w ciągu 15 min. Dla odcinka pierwszego stosunek przyrostu długości drogi do czasu wynosi $\frac{3}{6} = 0{,}5$ km/min, dla drugiego $\frac{20}{15} = 1{,}33$ km/min. Dla całej drogi 23 km znajdziemy $\frac{s}{t} = \frac{23}{21} = 1{,}1$ km/min.

Załóżmy, że oprócz danego punktu materialnego M, przechodzącego ruchem zmiennym w ciągu t sek drogę s cm, mamy drugi punkt materialny M_1, poruszający się ruchem jednostajnym z prędkością $v = \frac{s}{t}$. Prędkość tę nazwiemy prędkością p r z e c i ę t n ą punktu M na odcinku s drogi (lub w ciągu czasu t sek), a to dlatego, że punkt M_1, poruszający się jednostajnie z tą prędkością i rozpoczynający swój ruch jednocześnie z punktem M, dojdzie jednocześnie z nim do punktu A, odległego o s cm od początkowego punktu ruchu O. Przez wszystkie pozostałe punkty toru punkty materialne M i M_1 będą na ogół przechodziły niejednocześnie. Gdyby miały się spotkać jeszcze w jednym punkcie toru po upływie $\frac{t}{2}$ sek od chwili rozpoczęcia ruchu, należałoby nadać punktowi M_1 w ciągu pierwszych $\frac{t}{2}$ sek prędkość, równą $v_1 = \frac{s_1}{\frac{t}{2}}$ gdzie s_1 droga, jaką punkt M przebył w ciągu tego właśnie czasu, w ciągu zaś następnych $\frac{t}{2}$ sek prędkość $v_2 = \frac{s_2}{\frac{t}{2}}$, równą prędkości przeciętnej punktu M w ciągu tego czasu.

Jeżeli podzielimy czas trwania ruchu na n części i nadamy prędkościom ruchów jednostajnych punktu M_1 wartości, równe prędkościom przeciętnym punktu M w danych odstępach czasu, to punkty M_1 i M przechodzić będą jednocześnie przez $n + 1$ punktów toru. W miarę zwiększania się liczby n ruch punktu materialnego M_1, poruszającego się z prędkością, zmieniającą

się n razy w ciągu t sek, coraz mniej różnić się będzie od zmiennego ruchu punktu M. W granicy, gdy liczba n nieograniczenie wzrośnie, ruch punktu M_1 nieograniczenie mało różnić się będzie od ruchu punktu M. Oznaczając przez Δs różnicę odległości od O skrajnych punktów n-tej części drogi, przez $\Delta t = \frac{t}{n}$ czas, w ciągu którego punkt M_1 przebył odcinek Δs ruchem jednostajnym, otrzymujemy na prędkość punktu M_1 na tym odcinku wartość

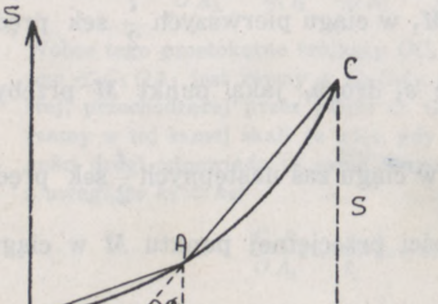
$$v_1 = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

(symbolu Δ używamy tutaj dla oznaczenia bardzo małego przyrostu danej wielkości).

W granicy prędkość ta równa jest chwilowej prędkości punktu M, mamy więc

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{3}$$

Odkładajmy podobnie, jak przy rozpatrywaniu ruchu jednostajnego, na osi odciętych czas, w kierunku osi rzędnych przebyte długości dróg (rys. 9). Zależność długości drogi od czasu wyrazi się tym razem pewną linią krzywą. Założenia w podanym wyżej rozumowaniu sprowadzają się do zastąpienia tej linii krzywej linią łamaną, odtwarzającą ruch punktu pomocniczego M_1. Prędkość, z jaką punkt ten porusza się w ciągu pierwszych $\frac{t}{2}$ sek, równa jest liczbowo, jak o tym była wyżej mowa (ust. 2), tg kąta, jaki prosta OA tworzy z osią odciętych. Podobnie prędkość, z jaką porusza się w ciągu następnych $\frac{t}{2}$ sek, równa jest liczbowo $tg\,\alpha_2$. W miarę, jak punkty przecięcia prostych OA, AC z daną linią krzywą stają się coraz liczniejsze (co odpowiada wzrostowi liczby odstępów czasu, na jakie podzieliliśmy czas t trwania ruchu punktu M), cięciwy OA, AC coraz mniej różnią się od odpowiednich łuków krzywej, kąt zaś, jaki tworzą z osią Ot, od kątów, jaki tworzą styczne do krzywej w początkowych (lub końcowych) punktach odcinków. Możemy więc przyjąć, że w granicy prędkość pun-



rys. 9

ktu M po upływie t sek od początku ruchu, w ciągu których punkt M przeszedł drogę s cm, równa jest liczbowo tg-owi kąta, jaki z osią Ot tworzy styczna do krzywej w punkcie o spółrzędnych, odpowiednio równych s i t. Mamy więc

$$v = tg\,\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{3 a}$$

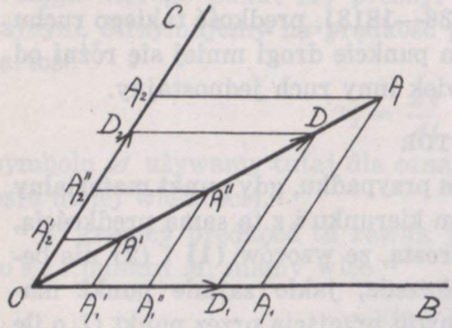
Za prędkość zatem punktu M w chwili t uważamy, zgodnie z określeniem Lagrange'a (1736—1813), prędkość takiego ruchu jednostajnego, który w danym punkcie drogi mniej się różni od ruchu punktu M, niż jakikolwiek inny ruch jednostajny.

4. PRĘDKOŚĆ JAKO WEKTOR

Ale nawet w najprostszym przypadku, gdy punkt materialny porusza się stale w tym samym kierunku i z tą samą prędkością, gdy więc tor jego jest linią prostą, ze wzorów (1) i (2) nie będziemy mogli wyznaczyć położenia, jakie zajmie punkt materialny po upływie t sek od chwili przejścia przez punkt O, o ile nie znamy kierunku ruchu lub, co na jedno wychodzi, kierunku prędkości. Dopiero gdy dane będą zarówno wartość, jak i kierunek prędkości (oraz, oczywiście, położenie początkowego punktu O), ruch prostoliniowy jednostajny będzie całkowicie znany.

Tego rodzaju wielkości, dla których wyznaczenia musimy znać nie tylko ich wartość liczbową, lecz również i kierunek, nazywamy w i e l k o ś c i a m i k i e r u n k o w y m i lub w e k t o r a m i (łac. veho — wieźć, ciągnąć), w odróżnieniu od innego typu wielkości, nazywanych s k a l a r o w y m i lub s k a l o w y m i, do których wyznaczenia wystarcza podanie ich wartości liczbowej. Wektory oznaczać będziemy literami ze strzałką u góry, wartości zaś ich liczbowe (inaczej n a t ę ż e n i a) temiż literami bez strzałek. Tak więc $\vec{v}$ oznacza wektor prędkości, v zaś jego wartość liczbową. Graficznie wielkość kierunkową przedstawiamy jako odcinek linii prostej o długości proporcjonalnej do wartości liczbowej danego wektora i o kierunku zgodnym z jego kierunkiem. Kierunek ten oznaczamy strzałką. Dwa wektory uważamy za równe, gdy mają równe wartości liczbowe i zgodne kierunki. Z dwu wektorów o tej samej wartości liczbowej, lecz o kierunkach przeciwnych, jeden uważamy za dodatni i oznaczamy znakiem +, drugi za ujemny i oznaczamy znakiem —.

Przypuśćmy, że ani długość drogi, przebytej przez punkt materialny M w ciągu danego czasu t sek, ani jej kierunek nie są nam znane; wiemy jedynie, ze punkt przesunął się w ciągu tego czasu ruchem jednostajnym prostoliniowym w kierunku OB na odległość OA_1, w kierunku OC w tym samym czasie na odległość OA_2 tak, że znalazł się ostatecznie w punkcie A, będącym wierzchołkiem równoległoboku, zbudowanego na tych dwu odcinkach (rys. 10). Ponieważ ruchy w obydwu kierunkach są jednostajne, punkt M przeszedł w przeciągu $\frac{t}{n}$ sek w kierunku OB drogę $\frac{OA_1}{n} = OA_1'$,



rys. 10

w kierunku OC drogę $\frac{OA_2}{n} = OA_2'$, wobec czego znalazł się po upływie tego czasu w punkcie A' — po upływie $2\frac{t}{n}$ sek w punkcie A'', któremu odpowiadają przesunięcia w kierunku OB: $\frac{2OA_1'}{n} = OA_1''$, w kierunku OC: $\frac{2OA_2}{n} = OA_2''$. Zwiększając dowolnie liczbę n, otrzymamy szereg dowolnie blisko siebie położonych punktów $O, A', A'' \dots A$, wyznaczających kolejne położenia punktu materialnego M. Wszystkie te punkty leżą na prostej OA, przekątni równoległoboku OAA_1A_2, trójkąty bowiem $OA'A_1'$, $OA''A_1'' \dots$ są podobne, kąty więc, jakie tworzą z kierunkiem OB (lub OC), są jednakowe. Z podobieństwa tych trójkątów wynika również, że ruch punktu materialnego M wzdłuż prostej OA jest jednostajny, gdyż $\frac{OA}{OA'} = \frac{OA_1}{OA_1'} = n$, $\frac{OA}{OA''} = \frac{OA_1}{OA_1''} = \frac{n}{2}$ itd. Odłóżmy w kierunku OB odcinek OD_1, równy drodze, jaką w kierunku OB przeszedł w ciągu 1 sek punkt M. Odcinek ten przedstawia graficznie prędkość v_1, z jaką punkt M porusza się w kierunku OB. Podobnie odcinek OD_2 odtwarza prędkość $\vec{v_2}$ punktu

materialnego w kierunku *OC*. W ciągu 1 sek punkt *M*, przesuwając się jednocześnie w kierunkach *OB* i *OC*, przeszedł drogę *OD*, odcinek więc $\vec{OD}$ jest graficznym odtworzeniem prędkości $\vec{v}$ punktu *M*. Jak wynika z rysunku, prędkość tę możemy wyznaczyć, odkładając w kierunku *OB* prędkość $\vec{v}_1$ punktu materialnego w tym kierunku, w kierunku *OC* prędkość $\vec{v}_2$ i budując na tych dwu odcinkach równoległobok, którego przekątnią jest $\vec{v}$. Prędkość $\vec{v}$ nazywamy w y p a d k o w ą prędkości s k ł a d o w y c h $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ lub też ich s u m ą g e o m e t r y c z n ą. Działanie przez nas wykonane oznaczamy jako d o d a w a n i e g e o m e t r y c z n e.

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \tag{4}$$

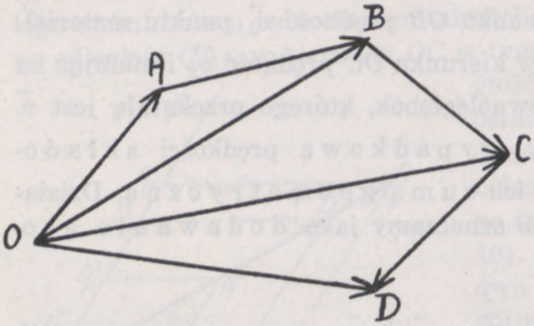
U w a g a. W powyższych rozważaniach używaliśmy stale zwrotu: taki a taki odcinek ma długość równą przebytej drodze. Nie znaczy to, oczywiście, aby istotnie odcinek np. *OA*, miał tyle cm długości, co przebyta droga. Jest to jedynie dogodny skrót, którym i nadal będziemy się posługiwali. W rzeczywistości *OA* odtwarza, jak o tym była już niejednokrotnie mowa, długość drogi w pewnej umówionej skali.

Regułę wyżej podaną możemy uprościć, uwzględniając równość geometryczną odcinków D_1D i OD_2. Wektor $\vec{OD}$ otrzymamy, przystawiając do końca wektora $\vec{OD}_1$ początek wektora $\vec{OD}_2 = \vec{D_1D}$ i łącząc początek pierwszego wektora z końcem drugiego. Wynik działania nie zależy, jak to bezpośrednio wynika z rysunku, od tego, który z wektorów $\vec{OD}_1$ i $\vec{OD}_2$ będziemy uważali za pierwszy.

Jakkolwiek mówiliśmy dotychczas ciągle o ruchach jednostajnych, regułę dodawania możemy również dobrze stosować i do ruchow zmiennych. Taki bowiem ruch można, jak wiemy, rozpatrywać jako szereg krótkotrwałych ruchów jednostajnych o coraz to innych prędkościach. Wektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{v}$ są wtedy wektorami prędkości chwilowych, równymi co do wartości i kierunku wektorom prędkości tych ruchów jednostajnych, jakimi zastę-

pujemy ruch zmienny na rozpatrywanym nieskończenie krótkim odcinku drogi.

Działanie dodawania geometrycznego, wyjaśnione na przykładzie wektora przesunięcia i wektora prędkości, stosujemy do wszystkich wielkości kierunkowych tego samego typu i uogólniamy na dowolną ilość składowych.



rys. 11

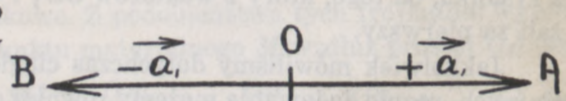
Wypadkową n wektorów składowych otrzymujemy, przystawiając do końca wektora pierwszego OA początek wektora drugiego AB, do końca drugiego początek trzeciego itd. i łącząc początek pierwszego z końcem ostatniego (rys. 11). Wektor $\vec{OD}$ jest wektorem wypadkowym. Istotnie, z określenia dodawania dwu wektorów mamy

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$$

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$$

Gdy wektory składowe tworzą wielobok zamknięty, suma ich geometryczna równa jest zeru. W przypadku szczególnym, gdy mamy tylko dwa wektory składowe, równe i przeciwnie skierowane, koniec drugiego przypada na to samo miejsce, co początek pierwszego (rys. 12). Mamy zatem

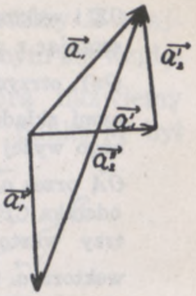


rys. 12

$$\vec{OA} + \vec{OB} = 0,$$

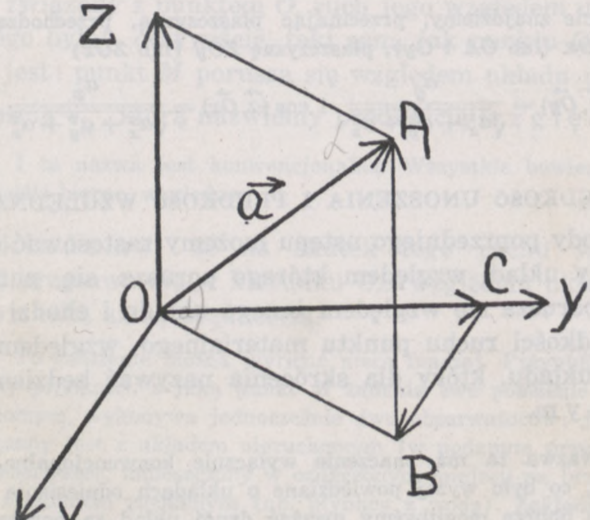
lub zgodnie z poprzednio przyjętym oznaczaniem takich wektorów znakami przeciwnymi

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$$



rys. 13

Z powyższego wynika, że i odwrotnie, każdy wektor możemy uważać za wypadkową dwu lub więcej wektorów składowych. W przeciwieństwie jednak do dodawania, r o z k ł a d a n i e wektorów na składowe daje, na ogół, nieograniczenie wielką ilość rozwiązań, jest bowiem nieskończenie wiele wielokątów o jednym boku, równym danemu wektorowi. Tak np. (rys. 13) wektor $\vec{a}$ jest równie dobrze sumą wektorów $\vec{a}_1'$ i $\vec{a}_2'$, jak i $\vec{a}_1''$ i $\vec{a}_2''$, jak zresztą i nieskończenie wielu innych par wektorów. Aby otrzymać rozwiązanie jednoznaczne, musimy poczynić pewne dodatkowe założenia co do wartości liczbowych i kierunków wektorów składowych.



rys. 14

Rozkład wektora na składowe jest całkowicie oznaczony, gdy podane są trzy kierunki składowych, nie leżące w jednej płaszczyźnie. Najczęściej są to kierunki osi prostokątnego układu spółrzędnych (ust. 2). Przeprowadźmy przez początkowy punkt wektora O osi równoległe do osi spółrzędnych (rys. 14). Płaszczyzna, przechodząca przez

OZ i wektor $\vec{OA}$ przetnie płaszczyznę *yOx* wzdłuż prostej *OB*. Opuszczając z punktu *B* prostopadłą na oś *Oy* (a więc równoległą do osi *Ox*), otrzymamy na niej punkt *C*. Wektory $\vec{OC}$, $\vec{CB}$ i $\vec{BA}$ są szukanymi składowymi wektora $\vec{OA}$, jak to wynika bezpośrednio z podanego wyżej określenia dodawania geometrycznego. Oznaczmy wektor $\vec{OA}$ przez $\vec{a}$, wartości zaś liczbowe jego składowych przez a_x (długość odcinka *CB*), a_y (długość odcinka *OC*), a_z (długość odcinka *BA*). Te trzy wartości wyznaczają całkowicie kierunek i wartość liczbową wektora $\vec{a}$. Z trójkąta *OAB* mamy $a^2 = a_z^2 + OB^2$, z $\Delta\ OBC$: $OB^2 = a_x^2 + a_y^2$, i stąd

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{4 a}$$

Poza tym z $\Delta\ AOB$ znajdujemy:

$$a_z = a \sin AOB = a \cos ZOA = a \cos (\vec{a}, \vec{Oz}) \text{ i}$$

$$\cos (\vec{a}, \vec{Oz}) = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \tag{4 b}$$

Podobnie znajdziemy, przecinając płaszczyzną, przechodzącą przez *OA* i *Ox* (lub *OA* i *Oy*), płaszczyznę *ZOy* (lub *ZOx*)

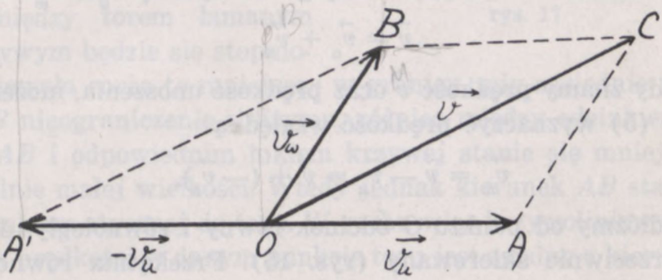
$$\cos (\vec{a}, \vec{Oy}) = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \text{ i } \cos (\vec{a}, \vec{Ox}) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \tag{4 c}$$

6. PRĘDKOŚĆ UNOSZENIA I PRĘDKOŚĆ WZGLĘDNA

Wywody poprzedniego ustępu możemy zastosować do przypadku, gdy układ, względem którego porusza się punkt materialny, porusza się względem innego układu i chodzi o znalezienie prędkości ruchu punktu materialnego względem owego drugiego układu, który dla skrócenia nazywać będziemy n i e r u c h o m y m.

Nazwa ta ma znaczenie wyłącznie konwencjonalne. Zgodnie z tym, co było wyżej powiedziane o układach odniesienia (ust. 1), równie dobrze moglibyśmy uważać drugi układ za poruszający się względem pierwszego, który wtedy nazywalibyśmy nieruchomym. Poza tym jest rzeczą oczywistą, że układ, nazwany przez nas nieruchomym, może poruszać się względem innego trzeciego układu. Tak np., gdy ruch punktu materialnego wyznacza ruch łódki, poruszającej się względem rzeki, której wody płyną z pewną prędkością względem brzegu, brzeg przyjmujemy zazwyczaj za układ nieruchomy, co nie przeszkadza, że w innych przypadkach uważamy go za poruszający się razem z ziemią względem słońca.

Przypuśćmy, że w pewnej chwili punkt materialny M znajduje się w punkcie O układu ruchomego, poruszającym się względem układu nieruchomego z prędkością $\vec{v}_u$, którą nazwiemy p r ę d k o ś c i ą u n o s z e n i a (rys. 15). Gdyby punkt M był



rys. 15

na stałe związany z punktem O, ruch jego względem układu nieruchomego byłby, oczywiście, taki sam, jak punktu O. Tak jednak nie jest: punkt M porusza się względem układu ruchomego z prędkością $\vec{v}_w$, którą nazwiemy prędkością w z g l ę d n ą.

I ta nazwa jest konwencjonalna. Wszystkie bowiem prędkości są, ściśle biorąc, względne.

Z a k ł a d a m y, że na skutek tego ruchu względnego punkt M przesuwa się w kierunku OB względem układu nieruchomego z taką samą prędkością.

To założenie można wyrazić nieco inaczej. Przypuśćmy, że pomiary prędkości, z jaką punkt M zmienia swe położenie w układzie ruchomym, wykonywa jednocześnie dwu obserwatorów: jeden z nich związany jest z układem nieruchomym (w podanym przykładzie jest to obserwator, umieszczony w oznaczonym miejscu na brzegu), drugi zaś z układem ruchomym (np. płynący z wodą). Zakładamy, że pomiary prędkości względnej, wykonane przez obydwu obserwatorów przy użyciu identycznych metod i identycznych przyrządów mierniczych, dadzą identyczne wyniki. To założenie okazuje się całkowicie słuszne, gdy prędkości unoszenia są tego rzędu, z jakim spotykamy się w tym dziale fizyki, gdzie największa wartość prędkości jest rzędu 30 km/sek (jest to mniej więcej prędkość ziemi w ruchu dokoła słońca). W przypadku prędkości większych stosowanie tego założenia prowadzi do wyników, które, na ogół, trudno pogodzić z danymi doświadczenia.

Możemy więc powiedzieć, że punkt materialny M przesuwa się względem układu nieruchomego jednocześnie w kierunku OA z prędkością $\vec{v}_u$ i w kierunku OB z prędkością $\vec{v}_w$, a więc zgodnie z wywodami ustępu poprzedniego, prędkość jego względem układu nieruchomego jest sumą geometryczną $\vec{v}_u$ i $\vec{v}_w$. Mamy zatem

$$\vec{v} = \vec{v}_u + \vec{v}_w \tag{5}$$

Gdy znamy prędkość $\vec{v}$ oraz prędkość unoszenia, możemy ze wzoru (5) wyznaczyć prędkość względną.

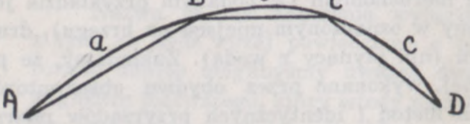
$$\vec{v}_w = \vec{v} - \vec{v}_u = \vec{v} + (-\vec{v}_u). \tag{6}$$

Odłóżmy od punktu O odcinek równy i równoległy do $\vec{v}_u$, lecz przeciwnie skierowany (rys. 15). Przekątnia równoległoboku, zbudowanego na odcinkach $\vec{OA'}$ i $\vec{OC}$ jest, jak to wynika bezpośrednio z rysunku, równa szukanej prędkości względnej $\vec{v}_w$.

7. KIERUNEK PRĘDKOŚCI W RUCHU KRZYWOLINIOWYM

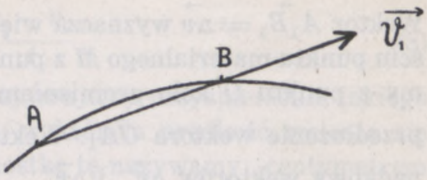
Gdy znamy tor punktu materialnego, możemy bez trudu wyznaczyć kierunek prędkości ruchu. W przypadku ruchu prostoliniowego kierunek ten jest stały i zgodny z kierunkiem linii prostej, po której punkt M się porusza. Gdy tor jest krzywoliniowy, kierunek ruchu, a więc i kierunek prędkości, jest zmienny, na ogół w każdym punkcie toru inny.

Załóżmy, że punkt materialny M, przechodząc od punktu A do B, porusza się nie wzdłuż krzywej AaB, lecz wzdłuż prostej AB, przechodząc od B do C, — wzdłuż prostej BC itd. (rys. 16), że więc zamiast ruchu krzywoliniowego mamy do czynienia z szeregiem ruchów prostoliniowych, których kierunki zmieniają się w punktach B, C, D itd. Wtedy kierunek prędkości przy przejściu od A do B jest wyznaczony przez kierunek prostej AB. Odkładając w tym kierunku odcinek o długości v_1, otrzymamy graficzne przedstawienie wektora $\vec{v}_1$. Tor taki różni się tym bardziej od toru rzeczywistego ruchu punktu M,



rys. 16

w im większej wzajemnej odległości na torze znajdują się punkty *A, B, C, D*... Jeżeli jednak punkty te będziemy wzajemnie przybliżali, różnica między torem łamanym i krzywym będzie się stopniowo stawała coraz to mniejsza; w granicy, gdy sąsiednie punkty *A* i *B* nieograniczenie zbliżymy, różnica między odcinkiem prostej *AB* i odpowiednim łukiem krzywej stanie się mniejsza od dowolnie małej wielkości. Wtedy jednak kierunek *AB* stanie się kierunkiem stycznej do toru. W ruchu więc krzywoliniowym kierunek prędkości w danym punkcie toru jest zgodny z kierunkiem stycznej do toru w danym punkcie.



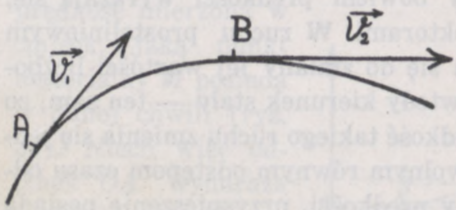
rys. 17

8. ZMIANY PRĘDKOŚCI W RUCHU KRZYWOLINIOWYM

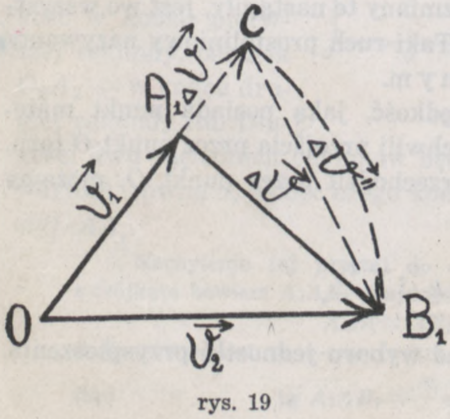
Niech punkt materialny *M* przechodzi przez punkt *A* swego toru krzywoliniowego z prędkością $\vec{v}_1$, przez sąsiedni punkt *B* z prędkością $\vec{v}_2$, różniącą się na ogół i wartością liczbową, i kierunkiem, od prędkości $\vec{v}_1$ (rys. 18). Przenieśmy obydwa wektory $\vec{v}_1$ *i* $\vec{v}_2$ do dowolnie wybranego punktu *O* (innymi słowy, odłóżmy z punktu *O* odcinki OA_1 i OB_1 równe i równoległe do wektorów $\vec{v}_1$ *i* $\vec{v}_2$) (rys. 19). Wektor $\vec{v}_2$ możemy uważać za sumę geometryczną wektorów $\vec{v}_1$ i $\vec{A_1B_1}$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{A_1B_1}, \text{ skąd}$$

$$\vec{A_1B_1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{\Delta v}$$



rys. 18



rys. 19

Wektor $\vec{A_1B_1} = \vec{\Delta v}$ wyznacza więc zmianę prędkości przy przejściu punktu materialnego M z punktu A toru do punktu B. Opiszmy z punktu O koło promieniem równym v_2; koło to przetnie przedłużenie wektora $\vec{OA_1}$. Wektor $\vec{\Delta v}$ możemy uważać za wypadkową wektorów $\vec{\Delta v'_1}$ i $\vec{\Delta v''}$

$$\vec{\Delta v} = \vec{\Delta v'} + \vec{\Delta v''} \tag{7}$$

składowa pierwsza $\vec{\Delta v'}$ o kierunku tym samym, co prędkość $\vec{v_1}$, ma wartość liczbową $v_2 - v_1$, w przypadku więc ruchu jednostajnego staje się równą zeru; składowa druga $\vec{\Delta v''}$ wyznacza zmianę kierunku prędkości początkowej, w przypadku więc ruchu prostoliniowego $\vec{\Delta v''} = 0$.

9. PRZYSPIESZENIE. RUCH PROSTOLINIOWY ZMIENNY

Nazwijmy p r z y s p i e s z e n i e m wielkość, która jest miarą zmian prędkości, odniesionych do jednostki czasu. Jest to wielkość kierunkowa, zmiany bowiem prędkości wyrażają się, jak wyżej była mowa, wektorami. W ruchu prostoliniowym zmiana prędkości sprowadza się do zmiany jej wartości liczbowej, przyspieszenie posiada wtedy kierunek stały — ten sam, co prędkość. Gdy w dodatku prędkość takiego ruchu zmienia się jednostajnie, to znaczy, gdy dowolnym równym odstępom czasu odpowiadają jednakowe zmiany prędkości, przyspieszenie posiada również stałą wartość liczbową, stosunek bowiem zmian prędkości do czasu, w ciągu którego zmiany te nastąpiły, jest we wszystkich punktach toru ten sam. Taki ruch prostoliniowy nazywamy j e d n o s t a j n i e z m i e n n y m.

Oznaczając przez v_t prędkość, jaką posiada punkt materialny M po upływie t sek od chwili przejścia przez punkt O toru, przez v_0 prędkość, z jaką przechodził przez punkt O, możemy napisać, że przyspieszenie

$$a = k\frac{v_t - v_0}{t},$$

gdzie k — czynnik, zależny od wyboru jednostki przyspieszenia. Biorąc $k = 1$, a więc kładąc

$$a = \frac{v_t - v_0}{t}, \tag{8}$$

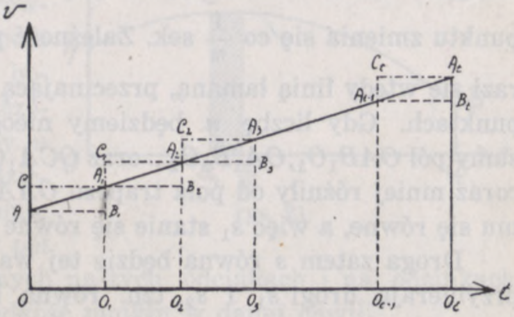
za jednostkę przyspieszenia przyjmujemy przyspieszenie takiego ruchu jednostajnie zmiennego, w którym prędkość zmienia się w ciągu 1 sek o 1 cm/sek. Jednostkę tę nazywamy „centymetrem na sekundę do kwadratu“ i oznaczamy symbolem cm/sek², który nie jest niczym innym, jak równaniem jej wymiaru po podstawieniu zamiast nieoznaczonych jednostek L i T używanych przez nas jednostek cm i sek.

Znając przyspieszenie i prędkość początkową (tzn. prędkość w chwili, od której zaczęliśmy liczyć czas), można ze wzoru (8) znaleźć prędkość po upływie t sek.

$$v = v_0 + at, \tag{9}$$

gdzie a może być liczbą dodatnią lub ujemną. Zależnie od znaku a rozróżniamy ruchy j e d n o s t a j n i e p r z y s p i e s z o n e i j e d n o s t a j n i e o p ó ź n i o n e.

Odkładajmy na osi odciętych czas mierzony w sekundach, jaki upłynął od początku ruchu, w kierunku osi rzędnych — prędkość mierzoną w cm/sek, jaką punkt materialny M posiada w danej chwili (rys. 20). Niech więc odcinek OA wyobraża prędkość początkową, odcinek O_1A_1 — prędkość w końcu pierwszej sekundy, odcinek O_2A_2 — w końcu drugiej sekundy itd. Długości dwu sąsiednich odcinków będą stale różniły się o tę samą wartość, równą a, wobec czego końce ich leżeć będą na linii prostej AA_t.



rys. 20

Nachylenie tej prostej do osi Ot jest miarą przyspieszenia, z trójkąta bowiem A_1AB_1 znajdujemy, że

$$A_1B_1 = AB_1 \,.\, tg\, A_1AB_1$$

A_1B_1 równe jest $v_1 - v_0$ (patrz. uwagą w ust. 5), $AB_1 = 1$ sek

stąd
$$\operatorname{tg} A_1AB_1 = \frac{v_1 - v_0}{1} = a \tag{9a}$$

Załóżmy, że punkt M porusza się w ciągu każdej sekundy nie ruchem zmiennym, lecz jednostajnym z prędkością równą prędkości, jaką posiadał istotnie na początku każdej sekundy, a więc że w przeciągu pierwszej sekundy porusza się z prędkością v_0, w przeciągu drugiej z prędkością v_1... w przeciągu t-tej sekundy z prędkością v_{t-1}, że zatem zmiany prędkości wyraża nie linia prosta AA_t, lecz linia łamana AB_1A_1... Droga s_1, jaką by wtedy przebył, wyraziłaby się, zgodnie z twierdzeniem ust. 2, sumą pól prostokątów OAB_1O_1, $O_1A_1B_2O_2$... i byłaby, oczywiście, mniejsza od drogi istotnie przebytej s. Jeżeli zaś założymy, że punkt w ciągu każdej sekundy porusza się z prędkością taką, jaką miał istotnie w końcu tej sekundy, a więc w ciągu pierwszej sekundy z prędkością O_1A_1, w ciągu drugiej O_2A_2 itd., że zatem zależność prędkości od czasu wyraża się linią łamaną $CA_1C_1A_2C_2$..., droga s_2, przebyta przez punkt M w ciągu t sek równa będzie liczbowo sumie pól OCA_1O_1, $O_1C_1A_2O_2$... i będzie większa od drogi s. Mamy zatem $s_1 < s < s_2$.

Zastosujmy powyższe rozumowanie do znacznie krótszych odstępów czasu i załóżmy, że prędkość ruchu jednostajnego punktu zmienia się co $\frac{1}{n}$ sek. Zależność prędkości od czasu wyrazi się wtedy linią łamaną, przecinającą prostą AA_t w $tn - 1$ punktach. Gdy liczbę n będziemy nieograniczenie zwiększali, sumy pól $OAB_1O_1, OA_1B_2O_2$... oraz $OCA_1O_1, O_1C_1A_2O_2$... będą się coraz mniej różniły od pola trapezu OAA_tO_t i w granicy staną mu się równe, a więc s_1 stanie się równe s_2.

Droga zatem s równa będzie tej wartości, jaką w granicy przybierają drogi s_1 i s_2, tzn. równa liczbowo polu trapezu OAA_tO_t.

$$s = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} \cdot t = v_0 t + \tfrac{1}{2} at^2 \qquad (10)$$

Do tego prostego przypadku można sprowadzić inne, bardziej złożone, przypadki prostoliniowego ruchu zmiennego, gdy stosunek zmiany prędkości do czasu, w ciągu którego ta zmiana nastąpiła, nie jest stały. Rozumowanie analogiczne do tego, jakim posługiwaliśmy się w ust. 3, pozwala rozpatrywać dany ruch zmienny jako szereg krótkotrwałych ruchów jednostajnie zmiennych o coraz to innym przyspieszeniu. Niech Δt będzie czasem

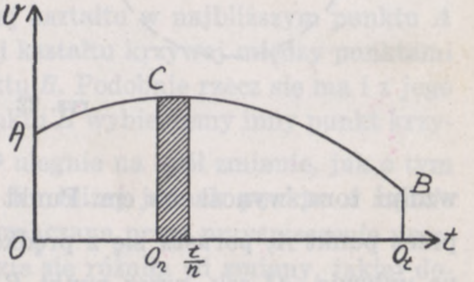
trwania tego ruchu jednostajnie zmiennego, którym zastępujemy w danej chwili ruch rzeczywiście zachodzący, Δv — zmianą, jakiej doznała prędkość punktu w ciągu tego czasu. Przyspieszenie zastępczego ruchu jednostajnie zmiennego jest, zgodnie ze wzorem (8)

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Im krótsze wybieramy odstępy Δt, tym mniej ruch zastępczy różni się od istotnie zachodzącego; w granicy, gdy Δt nieograniczenie maleje, możemy przyspieszenie nieograniczenie krótko trwającego ruchu jednostajnie zmiennego uważać za przyspieszenie chwilowe danego ruchu

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{11}$$

Zależność prędkości od czasu wyrazi się w tym przypadku na ogół linią krzywą (rys. 21). I tym jednak razem droga przebyta przez punkt M w ciągu czasu t, równa jest liczbowo polu $OACBO_t$. Pole to bowiem przy nieograniczonym zwiększaniu liczby n odcinków, na jakie dzielimy odcinek Ot, dowolnie mało różni się od sumy pól prostokątów, zbudowanych na tych odcinkach i na odcinkach O_nC, wyrażających prędkość punktu w danej chwili.



rys. 21

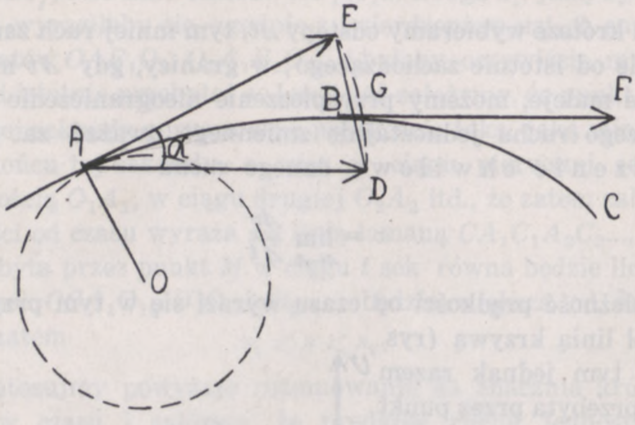
Rozumując w analogiczny sposób, jak w ust. 3, znajdziemy, że wartość przyspieszenia po upływie t' sek od początku ruchu wyznacza tg kąta, jaki tworzy z osią Ot styczna do krzywej w punkcie, odpowiadającym danej liczbie sekund.

10. RUCH KRZYWOLINIOWY JEDNOSTAJNY

Niech punkt materialny M porusza się po torze krzywoliniowym z prędkością, której wartość liczbowa we wszystkich punktach toru jest jednakowa. Wtedy z dwu składowych, na ja-

kie możemy rozłożyć przyrost prędkości (ust. 8), tylko $\vec{\Delta v}''$ nie będzie równa zeru.

Niech tor punktu *M* będzie krzywą płaską, tzn. krzywą, której wszystkie punkty leżą w jednej płaszczyźnie. Wybierzmy na torze (rys. 22) dwa punkty *A* i *B*, których odległość, mierzona



rys. 22

wzdłuż toru, wynosi Δs cm. Punkt materialny *M*, przechodząc przez punkt *A*, porusza się z prędkością $\vec{v}_A = \vec{AE}$, przechodząc po upływie Δt sek przez punkt *B*, — z prędkością $\vec{v}_B = \vec{BF}$. Przenieśmy wektor $\vec{v}_B$ do punktu *A*. Końce wektorów $\vec{AD}$ i $\vec{AE}$ leżą na obwodzie koła, opisanego z punktu *A* promieniem równym $v = AE$, gdyż, zgodnie z założeniem, długości ich są równe. Wektor $\vec{ED}$, równy przyrostowi prędkości ruchu punktu materialnego *M* przy przejściu z punktu *A* toru do *B*, jest cięciwą łuku *EGD*. Wektor o kierunku $\vec{ED}$ i wartości liczbowej $\frac{ED}{\Delta t}$ nazwiemy p r z y s p i e s z e n i e m p r z e c i ę t n y m punktu *M* na danym odcinku toru (patrz. ust. 3).

$$\vec{a}_p = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} \tag{12}$$

Oznaczmy przez α kąt między wektorami $\vec{AE}$ i $\vec{AD}$ i napiszmy wzór na wartość liczbową przyspieszenia przeciętnego w postaci następującej

$$a_p = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{ED}{\Delta t} = \frac{ED}{\cup EGD} \cdot \frac{\cup EGD}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

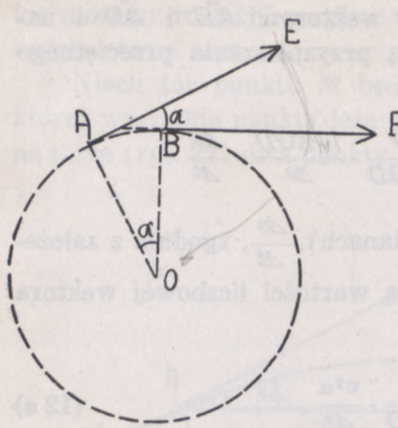
$\cup EGD = v \,.\, \alpha$ (α mierzone w radianach), $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, zgodnie z założeniem, jest wielkością stałą, równą wartości liczbowej wektora $\vec{v}$, mamy zatem

$$a_p = \frac{ED}{\cup EGD} \cdot \frac{v^2 \alpha}{\Delta s}. \qquad (12\ a)$$

Stosunek $\frac{ED}{\cup EGD}$ zależny jest, na ogół, od położenia punktów A i B na krzywej, od jej kształtu i od odległości Δs. Wartość zatem przyspieszenia przeciętnego zależna jest nie tylko od położenia punktu A na krzywej i od jej kształtu w najbliższym punktu A sąsiedztwie, lecz również i od kształtu krzywej między punktami A i B oraz od położenia punktu B. Podobnie rzecz się ma i z jego kierunkiem. Gdy zamiast punktu B wybierzemy inny punkt krzywej C, kierunek wektora $\vec{ED}$ ulegnie na ogół zmianie, jak o tym łatwo można się przekonać. Im bliżej jednak punktu A będzie leżał punkt B, tym mniej wyznaczana przez przyspieszenie przeciętne zmiana prędkości będzie się różniła od zmiany, jakiej doznaje prędkość ruchu przy przejściu punktu materialnego M przez punkt A toru. Wartość, jaką przybiera a_p, gdy odległość Δs nieograniczenie maleje, przyjmujemy za wartość przyspieszenia chwilowego punktu materialnego M.

$$a = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{ED}{\cup EGD} \cdot \frac{v^2 \alpha}{\Delta s}.$$

Dla znalezienia tej wartości opiszmy koło, które by było w punkcie A styczne do krzywej (rys. 23). Gdy punkt B zbliży się nieograniczenie do A, koło to, zgodnie z określeniem styczności, przejdzie i przez B. Łuk krzywej Δs będzie wtedy również łukiem koła, kąt więc, jaki będą tworzyły promienie OA i OB, będzie równy kątowi α między wektorami AE i BF, wektory te



rys. 23

są bowiem styczne do koła w punktach A i B. Stąd odległość *lim* Δs równa będzie $r \cdot \alpha$, gdzie r — promień koła. Koło to nazywamy **k o ł e m k r z y w i z n y**, promień r — **p r o m i e n i e m k r z y w i z n y** krzywej w punkcie A. Odwrotność promienia $\frac{1}{r}$ służy za miarę krzywizny w danym punkcie krzywej. Drugi więc czynnik we wzorze (12 a) ma w granicy wartość

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{v^2 \alpha}{\Delta s} = \frac{v^2 \alpha}{r \cdot \alpha} = \frac{v^2}{r}.$$

Pierwszy czynnik $\frac{ED}{\smile EGD}$ w granicy staje się równy jedności, różnica bowiem między łukiem i cięciwą nieograniczenie maleje, gdy α zbliża się do zera. Wartość zatem przyspieszenia w punkcie A wyrazi się wzorem

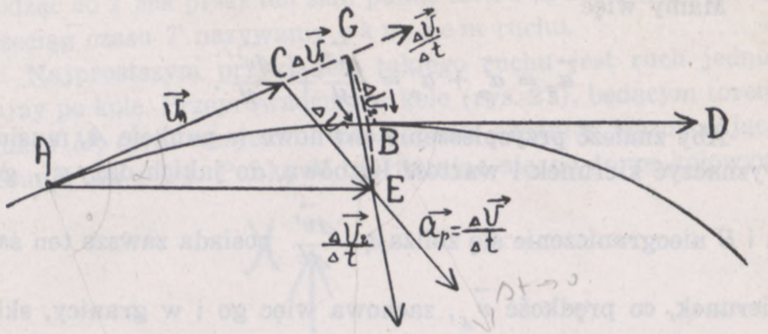
$$a = \frac{v^2}{r} \tag{13}$$

Kierunek jego, pozostając ciągle takim, jak wektora $\vec{ED}$, będzie w granicy prostopadły do $\vec{AE} = \vec{v}_A$: w trójkącie równobocznym AED suma równych kątów AED i ADE będzie się zbliżała do 180°, gdy α będzie dążyło do zera.

Jeżeli tor punktu M jest kołem, które jest krzywą o stałej krzywiźnie, $\vec{a}$ ma wartość stałą i stale jest skierowane do środka koła.

11. RUCH KRZYWOLINIOWY ZMIENNY

W najogólniejszym przypadku ruchu zmienia się i kierunek i wartość liczbowa prędkości. Przyspieszenie przeciętne (rys. 24), jakiego doznaje punkt materialny M, przechodząc z A do B, wy-

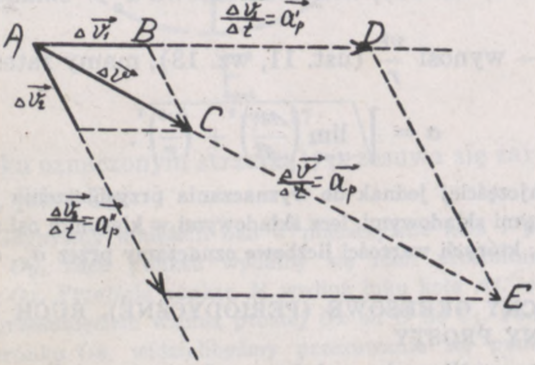


rys. 24

obraża wektor o kierunku takim, co wektor CE przyrostu prędkości $\vec{v}$, i o długości Δt razy mniejszej, zgodnie ze wzorem (12)

$$\vec{a}_p = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Jeżeli w kierunkach $\Delta\vec{v}'$ i $\Delta\vec{v}''$ (ust. 8) odłożymy odcinki $\frac{\Delta\vec{v}'}{\Delta t}$ i $\frac{\Delta\vec{v}''}{\Delta t}$ i zbudujemy na nich równoległobok (rys. 25), przekątnia będzie miała ten sam kierunek, co przekątnia równo-



rys. 25

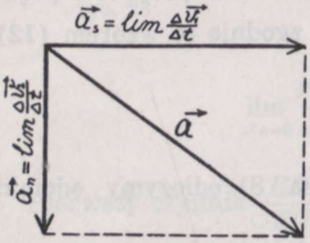
ległoboku, zbudowanego na odcinkach $\Delta\vec{v}'$ i $\Delta\vec{v}''$, i będzie krótsza od niej Δt razy.

Wynika to bezpośrednio z podobieństwa trójkątów *ABC* i *ADE*.

Mamy więc

$$\vec{a}_p = \vec{a}'_p + \vec{a}''_p = \frac{\Delta\vec{v}'}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{v}''}{\Delta t}.$$

Aby znaleźć przyspieszenie chwilowe w punkcie A, musimy wyznaczyć kierunek i wartość liczbową, do jakich dąży a_p, gdy A i B nieograniczenie się zbliżają. $\frac{\Delta\vec{v}'}{\Delta t}$ posiada zawsze ten sam kierunek, co prędkość $\vec{v}_A$, zachowa więc go i w granicy, składowa $\frac{\Delta\vec{v}''}{\Delta t}$, jak wiemy z wywodów ustępu poprzedniego, staje się w granicy prostopadłą do $\vec{v}_A$, $\vec{a}$ zatem ma kierunek przekątni prostokąta, zbudowanego na tych dwu wektorach (rys. 26). Wartość zaś jej liczbową wyznaczamy ze wzoru



rys. 26

$$a = \sqrt{a_s^2 + a_n^2}. \tag{14}$$

Wartość liczbowa składowej a_s, — składowej s t y c z n e j — równa jest $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (ust. 9, wz. 11), wartość liczbowa a_n — składowej n o r m a l n e j — wynosi $\frac{v^2}{r}$ (ust. 11, wz. 13), mamy zatem

$$a = \sqrt{\lim_{t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}. \tag{15}$$

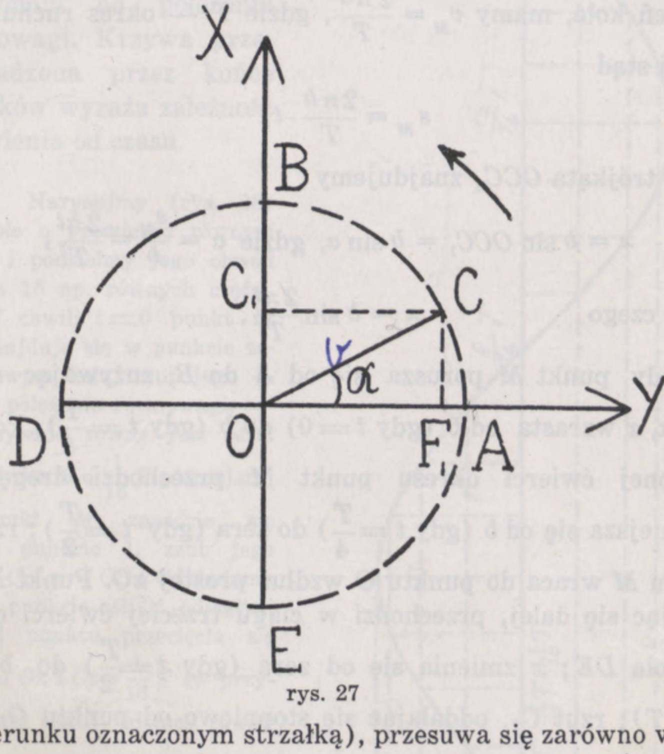
Najczęściej jednak do wyznaczania przyspieszenia posługujemy się nie tymi składowymi, lecz składowymi w kierunku osi spółrzędnych (ust. 5), których wartości liczbowe oznaczamy przez a_x, a_y, a_z.

12. RUCHY OKRESOWE (PERIODYCZNE). RUCH DRGAJĄCY HARMONIJNY PROSTY

Z wielu możliwych ruchów punktu materialnego na szczególną uwagę zasługuje zwłaszcza jedna ich grupa, odgrywająca ważna rolę w niektórych zjawiskach fizycznych. Jest to grupa ruchow o k r e s o w y c h (p e r i o d y c z n y c h), gdy punkt materialny M powtarza ten sam ruch dowolną ilość razy, prze-

chodząc co T sek przez ten sam punkt toru z tą samą prędkością. Przeciąg czasu T nazywamy o k r e s e m ruchu.

Najprostszym przykładem takiego ruchu jest ruch jednostajny po kole. Przeprowadźmy w kole (rys. 27), będącym torem punktu M, dwie wzajemnie prostopadłe średnice wyznaczające kierunki Ox i Oy. Punkt M, poruszając się po torze kołowym



rys. 27

(w kierunku oznaczonym strzałką), przesuwa się zarówno w kierunku Ox, jak i Oy.

Gdybyśmy umieścili oko w płaszczyźnie koła i patrzyli w kierunku Oy, ruch punktu wydałby się nam prostoliniowym, o kierunku Ox. Przejście punktu M wzdłuż łuku koła AC wydawałoby się nam przesunięciem wzdłuż prostej Ox od O do C_1. Podobnie, patrząc w kierunku Ox, widzielibyśmy przesuwanie się punktu M w kierunku yO. Tak mniej więcej przedstawia się obserwatorowi ziemskiemu ruch księżyców Jowisza, będący w rzeczywistości ruchem, mało różniącym się od ruchu kołowego.

Przyjmijmy punkt A toru (leżący na osi Oy) za początkowy punkt ruchu kołowego (ust. 2) i przypuśćmy, że po upływie

t sek od chwili przejścia przez punkt A punkt materialny M znalazł się w punkcie C, przesuwając się w kierunku Ox o długość $x = OC_1$ równą drodze, jaką w ciągu tego czasu przebył rzut jego C_1 na oś Ox, oddalając się od punktu O, który nazwiemy położeniem równowagi.

Droga, przebyta przez M, $s_M = v_M \cdot t$. Oznaczając przez b promień koła, mamy $v_M = \frac{2\pi b}{T}$, gdzie T — okres ruchu kołowego i stąd

$$s_M = \frac{2\pi b}{T} \cdot t.$$

Z trójkąta OCC_1 znajdujemy

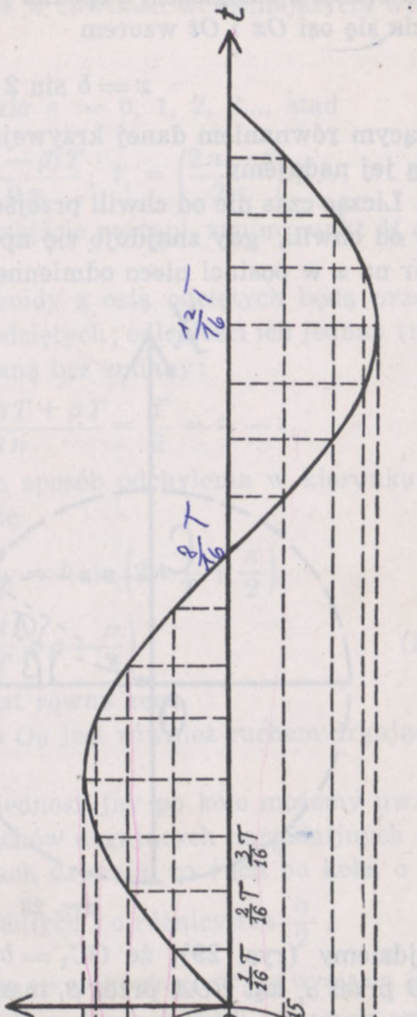
$$x = b \sin OCC_1 = b \sin \alpha, \text{ gdzie } \alpha = \frac{s_M}{b} = \frac{2\pi t}{T},$$

wobec czego
$$x = b \sin \frac{2\pi t}{T}. \tag{16}$$

Gdy punkt M porusza się od A do B, zużywając na to $\frac{T}{4}$ sek, x wzrasta od 0 (gdy $t = 0$) do b (gdy $t = \frac{T}{4}$). Podczas następnej ćwierci okresu punkt M przechodzi drogę BD, x zmniejsza się od b (gdy $t = \frac{T}{4}$) do zera (gdy $t = \frac{T}{2}$); rzut C_1 punktu M wraca do punktu O wzdłuż prostej xO. Punkt M, poruszając się dalej, przechodzi w ciągu trzeciej ćwierci okresu łuk koła DE; x zmienia się od zera (gdy $t = \frac{T}{2}$) do b (gdy $t = \frac{3}{4}T$); rzut C_1, oddalając się stopniowo od punktu O, przechodzi wzdłuż prostej OE do punktu E. Wreszcie, gdy punkt M przechodzi ostatnią ćwiartkę koła EA, x zmienia się od $-b$ (gdy $t = \frac{3}{4}T$) do zera (gdy $t = T$), C_1 wraca wzdłuż drogi EO do położenia równowagi. Przy dalszym ruchu punktu M po kole powtarzają się okresowo te same fazy ruchu. Ruch taki, jak punktu C_1, nazywamy ruchem drgającym harmonijnym prostym, największe odchylenie b obszernością lub amplitudą drgania, kąt $2\pi \frac{t}{T}$ — fazą ruchu.

Odkładajmy na osi odciętych czas, który upłynął od chwili przejścia punktu C_1 przez położenie równowagi, w kierunku zaś osi rzędnych — odpowiednie odchylenia od położenia równowagi. Krzywa przeprowadzona przez końce odcinków wyraża zależność odchylenia od czasu.

Narysujmy (rys. 28) koło o promieniu równym b i podzielmy jego obwód na 16 np. równych części. W chwili $t = 0$ punkt M znajduje się w punkcie zerowym koła, rzut jego — w położeniu równowagi, odchylenie równe jest zeru. W chwili o $\frac{1}{16} T$ późniejszej punkt M znajdzie się w punkcie 1, rzut jego w C_1; $x = OC_1$. Odkładamy w punkcie osi Ot, odległym od punktu przecięcia się osi Ox i Ot o $\frac{1}{16} T$ (w przyjętej skali), odcinek równy OC_1, w punkcie $\frac{2}{16} T$ — odcinek OC_2 równy odchyleniu x w chwili, gdy punkt M przechodzi przez punkt 2 obwodu koła itd.



rys. 28

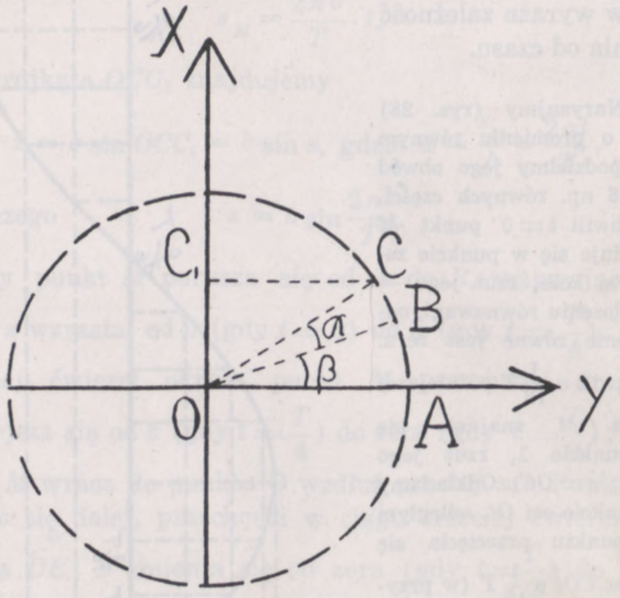
Gdy z jakiegokolwiek punktu krzywej opuścimy prostopadłą na oś Ot, długość odcinka, zawartego między krzywą i osią, zwią-

zana będzie z odległością t spodka prostopadłej od punktu przecięcia się osi Ox i Ot wzorem

$$x = b \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

będącym równaniem danej krzywej. Stąd nazwa **s i n u s o i d y**, jaką jej nadajemy.

Licząc czas nie od chwili przejścia punktu M przez punkt A, lecz od chwili, gdy znajduje się np. w punkcie B, otrzymamy wzór na x w postaci nieco odmiennej. Podobnie jak poprzednio,



rys. 29

znajdziemy (rys. 29), że $OC_1 = b \sin C_1CO$. Oznaczając kąt COB przez α, kąt BOA przez β, mamy

$$OC_1 = x = b \sin (\alpha + \beta)$$

$\sphericalangle \alpha$ odpowiada łukowi CB, tj. drodze, którą punkt M przeszedł w ciągu t sek po przejściu przez B. Mamy zatem $\alpha = \frac{2\pi t}{T}$, stąd

$$x = b \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) \tag{17}$$

$\sphericalangle \beta$ jest **f a z ą p o c z ą t k o w ą** ruchu. Punkt C_1 przechodzić będzie tym razem przez położenie równowagi nie w chwilach

$t_1 = 0$; $t_2 = \frac{T}{2}$; $t_3 = T$..., lecz w chwilach wcześniejszych, wtedy mianowicie, gdy

$$\frac{2\pi t'}{T} + \beta = n\pi, \text{ gdzie } n = 0, 1, 2, 3..., \text{ stąd}$$

$$t'_1 = -\frac{\beta T}{2\pi}; \; t'_2 = \frac{(\pi - \beta) T}{2\pi}; \; t'_3 = \left(\frac{2\pi - \beta}{2\pi}\right) T \ldots$$

(Znak — oznacza, że przejście nastąpi, zanim punkt M dojdzie do punktu B).

Punkty przecięcia sinusoidy z osią odciętych będą przesunięte w kierunku ujemnych odciętych; odległości ich jednak (mierzone wzdłuż osi Ot) pozostaną bez zmiany:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{\pi T - \beta T + \beta T}{2\pi} = \frac{T}{2} = t_2 - t_1 .$$

Rozpatrując w ten sam sposób odchylenia w kierunku osi Oy, znajdziemy bez trudu, że

$$y = b \cos 2\pi \frac{t}{T} = b \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \frac{\pi}{2}\right) \tag{18}$$

lub

$$y = b \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta + \frac{\pi}{2}\right) \tag{18a}$$

gdy faza początkowa nie jest równa zeru.

Ruch zatem w kierunku Oy jest również ruchem drgającym harmonijnym prostym.

Stąd wynika, że ruch jednostajny po kole możemy uważać za ruch wypadkowy dwu ruchów drgających harmonijnych prostych o tych samych okresach drgania, co ruch po kole, o kierunkach wzajemnie prostopadłych i o różnicy faz $\frac{\pi}{2}$.

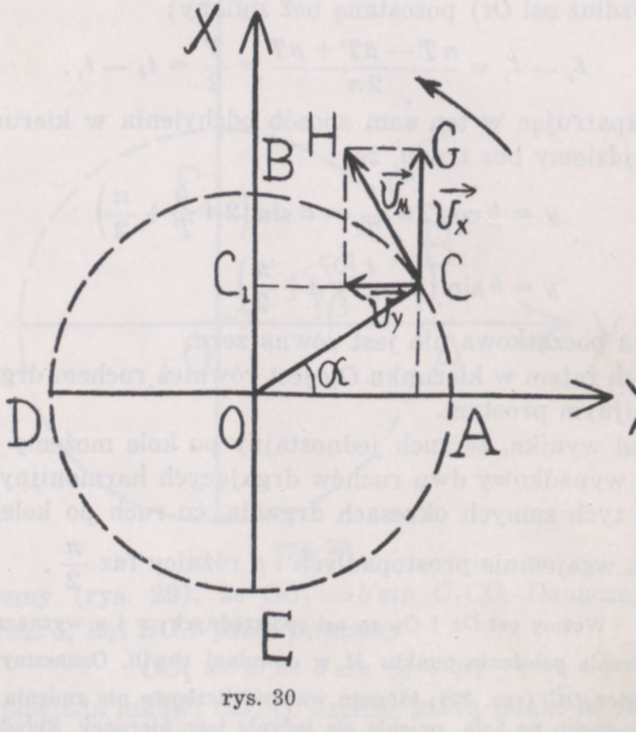
Weźmy osi Ox i Oy za osi spółrzędnych; x i y wyznaczą jednoznacznie położenie punktu M w dowolnej chwili. Oznaczmy przez $\vec{r}$ wektor $\vec{OC}$ (rys. 27), którego wartość liczbowa nie zmienia się podczas ruchu po kole, zmienia się jedynie jego kierunek. Składowe jego w kierunku Ox i Oy będą miały wartości odpowiednio równe $r_x = OC_1 = x = b \sin 2\pi \frac{t}{T}$ i $r_y = OF_1 = y = b \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \frac{\pi}{2}\right)$. Te dwie składowe wystarczają do wyznaczenia wektora $\vec{r}$, trzecia bowiem składowa r_z w kierunku osi z, prostopadłej do płaszczyzny rysunku, jest stale równa zeru.

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = b; \cos(\vec{r}, Oy) = \frac{r_y}{r} = \cos\frac{2\pi t}{T}:$$

$$\cos(\vec{r}, Ox) = \frac{r_x}{r} = \sin 2\pi\frac{t}{T} \text{ (patrz. ust. 5).}$$

Prędkości ruchów składowych są, jak wiemy (ust. 5), składowymi prędkości ruchu wypadkowego, której kierunek w danym przypadku wyznacza styczna do koła. Składowa $\vec{v}_x$ tworzy zatem z $\vec{v}_M$ kąt *HCG*, równy kątowi α (rys. 30). Mamy więc

$$v_x = v_M \cos\frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi b}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}. \qquad (19)$$



rys. 30

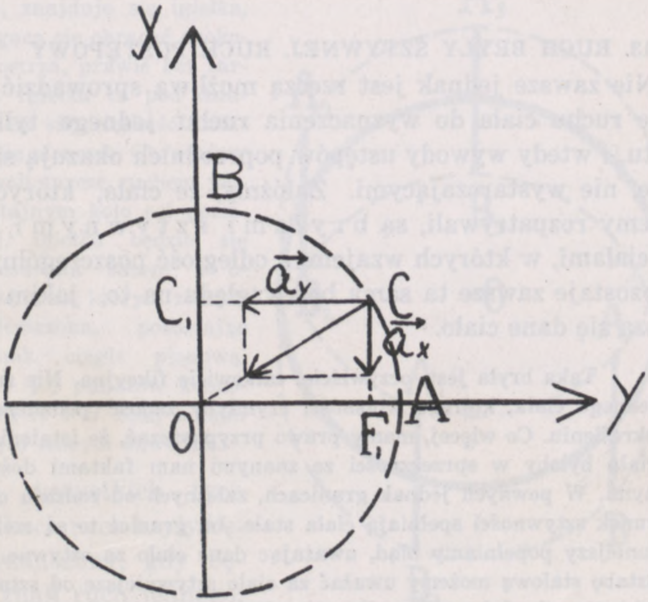
Punkt drgający C_1 ma prędkość największą w chwilach przechodzenia przez położenie równowagi, gdy $t = 0, \frac{T}{2}, \frac{3}{2}T...$ Od *O* do *B* porusza się z prędkością malejącą od $\frac{2\pi b}{T}$ do zera, w punkcie *B* kierunek zmienia się na odwrotny, wartość bez-

względna wzrasta od zera do $\frac{2\pi b}{T}$, następnie zaś (na odcinku OE) maleje do zera, aby przy nowej zmianie kierunku (w punkcie E) znów wzrastać od zera do $\frac{2\pi b}{T}$.

Zależność prędkości od czasu, jaki upłynął od początku ruchu, wyrazi się krzywą, podobną do poprzednio wykreślonej sinusoidy, lecz przesuniętej (w kierunku ujemnych odciętych) o ćwierć okresu.

W ten sam sposób znajdziemy, że $v_y = -\frac{2\pi b}{T} \sin \frac{2\pi t}{T}$ (gdy $t < \frac{T}{2}$, v_y ma kierunek przeciwny do dodatniego kierunku osi Oy). Punkt F_1 będzie miał prędkość największą, gdy $t = \frac{T}{4}, \frac{3}{4} T...$, tzn. wtedy, gdy y będzie równe zeru.

Rozłóżmy wreszcie przyspieszenie $\vec{a}_M$ na analogiczne składowe. Przyspieszenie to, jak wiemy, jest normalne, mamy więc



rys. 31

(rys. 31) $a_x = a_M \sin\alpha$ i wobec tego, że $a_M = \frac{v^2}{b} = \frac{4\pi^2 b}{T^2}$

$$a_x = \frac{4\pi^2 b}{T^2} \sin\frac{2\pi t}{T}$$

a_x jest zatem proporcjonalne do odchylenia $x = b\sin\frac{2\pi t}{T}$, lecz skierowane zawsze do położenia równowagi, a więc dla x dodatniego w kierunku ujemnych x-ów. Możemy więc napisać

$$\vec{a}_x = -\frac{4\pi^2}{T^2}\vec{x} \tag{20}$$

i podobnie

$$\vec{a}_y = -\frac{4\pi^2}{T^2}\vec{y}. \tag{20 a}$$

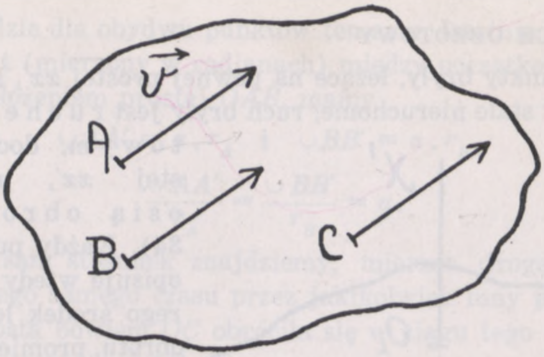
Nazwijmy c z ę s t o ś c i ą d r g a ń liczbę $n = \frac{1}{T}$, wskazującą, ile drgań wykona punkt C_1 (lub F_1) w ciągu jednej sekundy; wzory, wyżej wyprowadzone, możemy przepisać w postaci następującej:

$$x = b\sin 2\pi nt;\ v_x = 2\pi b \,.\, n \,.\cos 2\pi nt;\ \vec{a}_x = -4\pi^2 n^2 \vec{x} \tag{21}$$

13. RUCH BRYŁY SZTYWNEJ. RUCH POSTĘPOWY

Nie zawsze jednak jest rzeczą możliwą sprowadzić wyznaczanie ruchu ciała do wyznaczenia ruchu jednego tylko jego punktu, i wtedy wywody ustępów poprzednich okazują się, oczywiście, nie wystarczającymi. Załóżmy, że ciała, których ruch będziemy rozpatrywali, są b r y ł a m i s z t y w n y m i, tzn. takimi ciałami, w których wzajemna odległość poszczególnych części pozostaje zawsze ta sama bez względu na to, jakim ruchem porusza się dane ciało.

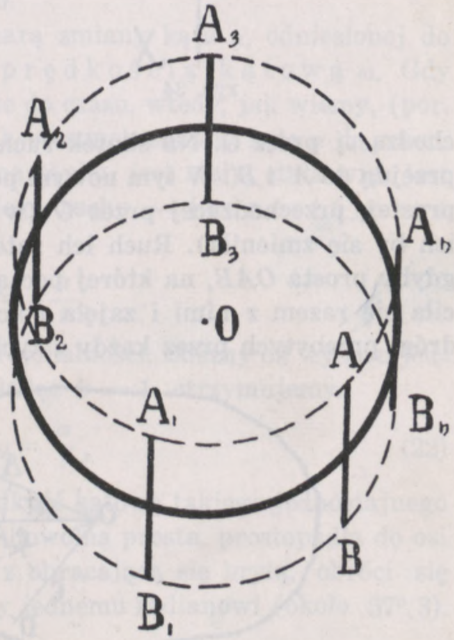
Taka bryła jest, oczywiście, całkowicie fikcyjna. Nie znamy ani jednego ciała, którego własności czyniłyby zadość podanemu wyżej określeniu. Co więcej, mamy prawo przypuszczać, że istnienie takiego ciała byłoby w sprzeczności ze znanymi nam faktami doświadczalnymi. W pewnych jednak granicach, zależnych od rodzaju ciała, warunek sztywności spełniają ciała stałe. Im granice te są szersze, tym mniejszy popełniamy błąd, uważając dane ciało za sztywne. Tak np. sztabę stalową możemy uważać za ciało sztywniejsze od sztaby z ołowiu, tę zaś od kawałka gliny itp. Bryła sztywna stanowi zatem pewien przypadek graniczny, do którego mniej lub więcej zbliżają się ciała stałe.



rys. 32

Mówimy, że bryła porusza się **ruchem postępowym**, gdy wszystkie jej punkty poruszają się stale z jednakowymi prędkościami, których wartości i kierunki mogą zresztą co chwila się zmieniać (rys. 32). Ruch postępowy może więc być prostoliniowy lub krzywoliniowy, jednostajny lub zmienny.

Na ostrzu wbitym w tarczę pionową (rys. 33), znajduje się igiełka, mogąca się obracać dookoła ostrza, prawie bez tarcia. Igiełka ta pod działaniem siły ciężkości ustawi się pionowo. Obracajmy powoli tarczę ruchem jednostajnym koło osi poziomej, igiełka będzie się przesuwała razem z ostrzem, na którym została umieszczona, pozostając jednak ciągle pionową. Tory jej punktów końcowych A i B będą kołami o tym samym obwodzie.

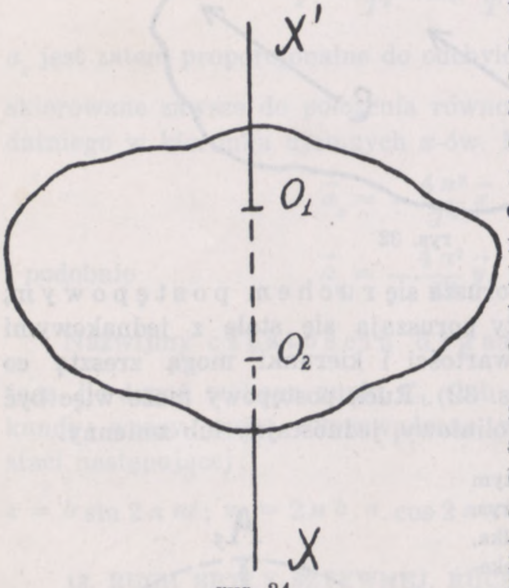


rys. 33

We wszystkich tych przypadkach ruch bryły będzie wyznaczony, gdy będziemy znali ruch jednego, dowolnie wybranego jej punktu.

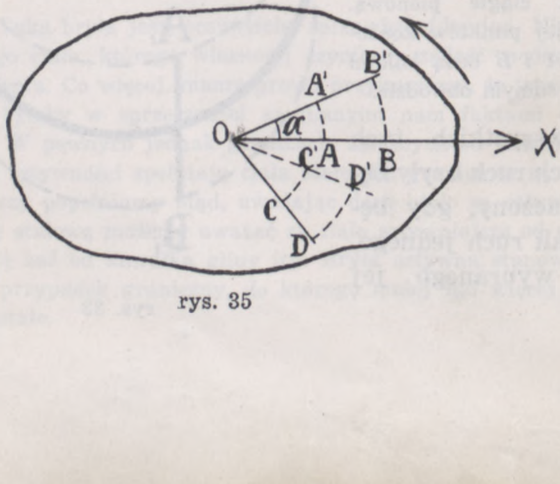
14. RUCH OBROTOWY

Gdy punkty bryły, leżące na pewnej prostej xx', są podczas ruchu bryły stale nieruchome, ruch bryły jest **ruchem obrotowym**, dookoła prostej xx', nazywanej **osią obrotu** (rys. 34). Każdy punkt bryły opisuje wtedy koło, którego środek leży na osi obrotu, promień zaś równy jest odległości od osi. Płaszczyzna toru kołowego jest prostopadła do osi obrotu.



rys. 34

Weźmy tę płaszczyznę za płaszczyznę rysunku (rys. 35). Punkt O niech będzie śladem osi. Wybierzmy w tej płaszczyźnie dwa punkty bryły A i B, leżące na tej samej prostej, przechodzącej przez O. Na skutek ruchu obrotowego punkty A i B przejdą do A' i B'. W tym nowym położeniu będą nadal leżały na prostej, przechodzącej przez O (w przeciwnym razie odległość ich by się zmieniła). Ruch ich zatem tak będzie zachodził, jak gdyby prosta OAB, na której początkowo się znajdowały, obróciła się razem z nimi i zajęła położenia $OA'B'$. Stosunek więc dróg, przebytych przez każdy z tych punktów, do odległości ich



rys. 35

od osi, będzie dla obydwu punktów ten sam. Istotnie, oznaczając przez α kąt (mierzony w radianach) między początkowym i końcowym położeniem prostej OAB, mamy

$$\cup AA' = \alpha . r_A \quad \text{i} \quad \cup BB' = \alpha . r_B,$$

skąd

$$\frac{\cup AA'}{r_A} = \frac{\cup BB'}{r_B} = \alpha.$$

Taki sam stosunek znajdziemy, mierząc drogę, przebytą w ciągu tego samego czasu przez jakikolwiek inny punkt np. C bryły; prosta bowiem OC obróciła się w ciągu tego czasu o ten sam kąt, co prosta OAB.

Inaczej zmieniłaby się odległość między punktami C i A. Punkt C może nie leżeć w tej samej płaszczyźnie, co A i B, proste OC i OC' będą wtedy leżały w płaszczyźnie, równoległej do płaszczyzny rysunku.

Umówmy się, że kąt α liczyć będziemy od pewnej, dowolnej zresztą, prostej Ox, prostopadłej do O i leżącej w tej samej płaszczyźnie, co OAB i $OA'B'$, za początkową zaś chwilę ruchu uważać będziemy chwilę, gdy prosta OAB ma kierunek zgodny z kierunkiem Ox, gdy więc $\alpha = 0$.

Wielkość, która jest miarą zmiany kąta α, odniesionej do jednostki czasu, nazwiemy prędkością kątową ω. Gdy kąt α wzrasta proporcjonalnie do czasu, wtedy, jak wiemy, (por. ust. 2, wzór 2, ust. 9, wzór 9), stosunek zmiany kąta α do czasu, w ciągu którego zmiana ta nastąpiła, jest stały, stała więc jest i prędkość kątowa. Dla takiego ruchu — jednostajnego obrotowego — mamy

$$\omega = k\frac{\alpha}{t},$$

gdzie k — współczynnik proporcjonalności, zależny od wyboru jednostki prędkości kątowej. Kładąc $k = 1$, otrzymujemy.

$$\omega = \frac{\alpha}{t}, \tag{22}$$

przyjmując za jednostkę prędkość kątową takiego jednostajnego ruchu obrotowego, w którym dowolna prosta, prostopadła do osi obrotu i sztywnie związana z obracającą się bryłą, obróci się w ciągu sekundy o kąt, równy jednemu radianowi (około $57^{\circ},3$).

Ze wzoru (22) wynika, że

$$[\omega] = T^{-1}.$$

Wymiar kąta α jest, jak każdej liczby, równy 1, wyraża się bowiem wzorem $L^\circ M^\circ T^\circ = 1$.

Biorąc za jednostkę czasu sekundę, otrzymujemy

$$[\omega] = \frac{1}{\text{sek}}$$

W przypadku niejednostajnego ruchu obrotowego rozumowanie analogiczne do tego, jakim posługiwaliśmy się w ust. 3 i 9, pozwala nam stwierdzić, że wtedy

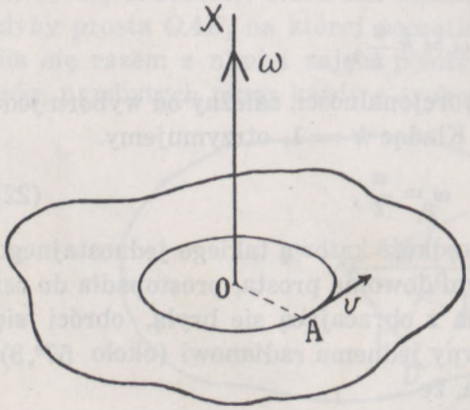
$$\omega = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \tag{23}$$

Z jakimkolwiek jednak ruchem obrotowym mielibyśmy do czynienia, prędkość punktu bryły, odległego o r od osi obrotu — prędkość tę dla odróżnienia od prędkości kątowej często nazywamy l i n i o w ą — zawsze będzie równa

$$v = \omega \cdot r. \tag{24}$$

W ruchu obrotowym jednostajnym $v = \frac{s}{t}$, gdzie $s = \alpha \cdot r$, stąd $v = \frac{\alpha}{t} r \cdot = \omega \cdot r$; w ruchu zmiennym $v = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ i $\Delta s = \Delta\alpha \cdot r$, stąd $v = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \cdot r = \omega \cdot r$.

Wzory (22), (23) i (24) nie wystarczają do wyznaczenia ruchu obrotowego, nic nam bowiem nie mówią o jego kierunku. Wzory te uzupełniamy, zakładając, że prędkość kątowa jest, podobnie, jak prędkość liniowa, wektorem, którego kierunek wyznacza kierunek obrotu. Wektor $\vec{\omega}$ odkładamy na osi obrotu, zazwyczaj w takim kierunku, w którym patrząc, widzimy bryłę obracającą się w tym samym kierunku, co wskazówki zegara. Prędkość liniowa $\vec{v}$ dowolnego punktu A leży w płaszczyźnie prostopadłej do osi i przechodzącej przez ten punkt (rys. 36).

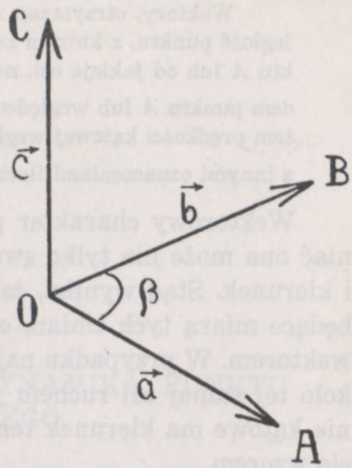


rys. 36

Związek między prędkością punktu bryły $\vec{v}$ i prędkością kątową $\vec{\omega}$ można wyrazić wzorem, wyznaczającym zarówno kierunek, jak i wartość liczbową $\vec{v}$.

Nazwijmy **iloczynem zewnętrznym** lub **wektorowym** dwu wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wektor $\vec{c}$, prostopadły do obydwu wektorów (rys. 37), o wartości liczbowej

$$c = ab \sin \beta \tag{24a}$$



rys. 37

Dla wyznaczenia kierunku wektora $\vec{c}$ posługujemy się następującym prawidłem. Załóżmy, że pierwszy z czynników, wektor $\vec{a}$, przymocowany jest do jednego ze zwojów śruby prawoskrętnej i razem z nim się obraca. Za kierunek wektora $\vec{c}$ przyjmujemy ten kierunek w którym należy wkręcać śrubę, aby wektor $\vec{a}$, obróciwszy się o kąt mniejszy od 180°, przybrał kierunek wektora $\vec{b}$. Związek między wektorami $\vec{c}$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oznaczamy symbolicznie

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] \tag{24b}$$

Odwrócenie porządku czynników zmienia znak iloczynu na przeciwny, gdyż wtedy musimy założyć, że to wektor b obraca się razem ze śrubą o kąt $\beta < 180°$ i przybiera kierunek wektora $\vec{a}$; śrubę zatem należy wkręcać w kierunku odwrotnym

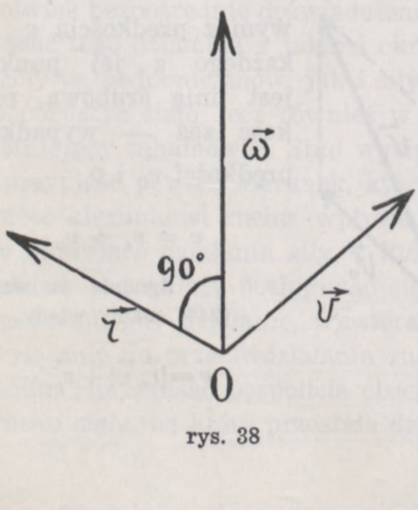
$$-\vec{c} = [\vec{b}, \vec{a}] \tag{24c}$$

W przypadku przez nas rozpatrywanym $\vec{v}$ jest iloczynem wektorowym $\vec{r}$ i $\vec{\omega}$, gdzie $\vec{r}$ oznacza odległość AO osi obrotu od punktu A

$$\vec{v} = [\vec{r}, \vec{\omega}] \tag{24d}$$

Istotnie, przenieśmy trzy te wektory do jednego punktu. Kierunek $\vec{v}$ czyni zadość warunkom wyżej podanym, wartość zaś jego liczbowa

$$v = r\omega \sin \beta = \omega . r; \quad \sin \beta = 1.$$



rys. 38

Wektory, otrzymane z pomnożenia jakiejś wielkości a przez odległość punktu, z którym związana jest dana wielkość, od innego punktu A lub od jakiejś osi, noszą nazwę m o m e n t u wielkości a względem punktu A lub względem danej osi. Prędkość $\vec{v}$ jest zatem momentem prędkości kątowej względem punktu A. (Często można się spotkać z innymi oznaczeniami iloczynu wektorowego, np. $V\vec{a}.\vec{b}$ lub $\vec{a} \wedge \vec{b}$).

Wektorowy charakter prędkości kątowej sprawia, że zmieniać ona może nie tylko swoją wartość liczbową, lecz również i kierunek. Stąd wynika, że i p r z y s p i e s z e n i e k ą t o w e, będące miarą tych zmian, odniesionych do jednostki czasu, jest wektorem. W przypadku najprostszym, gdy ciało obraca się stale koło tej samej osi ruchem jednostajnie zmiennym, przyspieszenie kątowe ma kierunek ten sam, co prędkość kątowa, i wyraża się wzorem

$$\gamma = \frac{\omega_t - \omega_0}{t} = \frac{\omega}{t} \quad \frac{1}{\text{sek}^2} \tag{25}$$

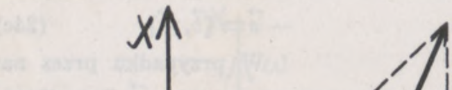
W ruchu obrotowym niejednostajnie zmiennym

$$\gamma = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \tag{26}$$

Wymiar przyspieszenia kątowego

$$[\gamma] = T^{-2}$$

Gdy bryła, obracając się z prędkością kątową $\vec{\omega}$, przesuwa się jednocześnie w kierunku osi ruchem postępowym z prędkością $\vec{v}_p$, tor każdego z jej punktów jest linią śrubową, prędkość zaś — wypadkową prędkości $\vec{v}_0$ i $\vec{v}_p$



rys. 39

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_p \tag{27}$$

Zgodnie ze wzorem (24^d) mamy wtedy

$$\vec{v} = [\vec{r}, \vec{\omega}] + \vec{v}_p.$$

ROZDZIAŁ II

ZASADY MECHANIKI — DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO

1. SIŁA

Wysiłek mięśniowy, jakiego wymaga od nas wprawienie w ruch ciała lub zmiana wzajemnego położenia jego części — jego odkształcenie — kojarzymy z pojęciem siły, koniecznej do wykonania tych działań. Pojęcie to, początkowo subiektywne, związane z odczuwanym przez nas wysiłkiem, stopniowo uogólniamy, stwierdzając, że te same działania mogą powodować i różne inne ciała, którym wobec tego przypisujemy możność wywierania siły. Mówimy zatem o sile wiatru, wprawiającego w ruch skrzydła wiatraka, o sile magnesu, poruszającego opiłki żelaza, a nawet — przez dalsze uogólnienie — o sile ciężkości, powodującej ruch ciał w kierunku powierzchni ziemi, jakkolwiek bezpośrednie doświadczenie nie pozwala nam od razu powiązać tego działania z jakimś określonym ciałem.

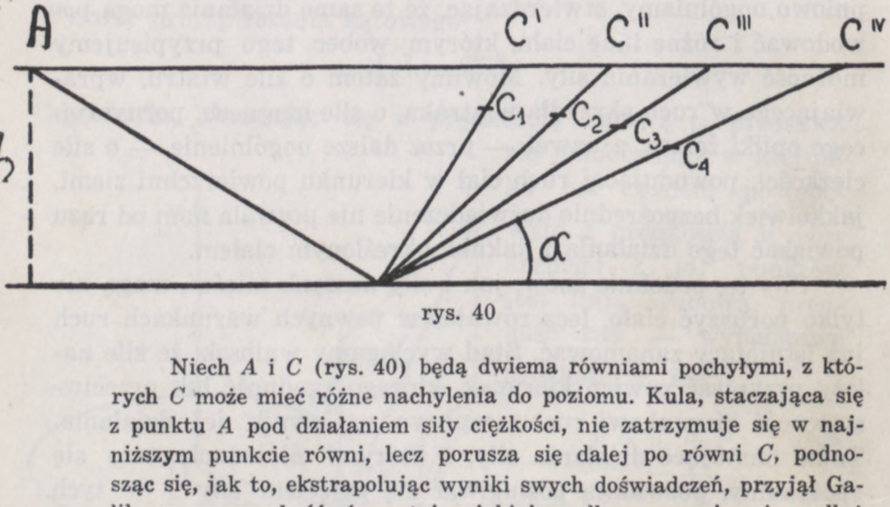
Siły te, podobnie znów, jak i siły naszych mięśni, mogą nie tylko poruszyć ciało, lecz również w pewnych warunkach ruch już istniejący zahamować. Stąd wyciągamy wniosek, że sile należy przypisać pewien kierunek, którego zgodność lub przeciwstawność kierunkowi ruchu wpływa na wynik jej działania. Takie hamujące działania siły, z którymi niejednokrotnie się spotykamy, pozwalają posługiwać się pojęciem siły i w tych przypadkach, gdy działanie, wywierane przez ciała, sprowadza się wyłącznie do przeciwdziałania ruchowi, niezależnie od jego kierunku, i przypisać pospolicie obserwowane zjawisko zanikania ruchu ciała, na które przestała działać siła, istnieniu sił, ha-

mujących ruch ciała, tzw. oporów biernych, wywieranych albo przez środowisko, w którym ciało się porusza (np. powietrze lub woda), albo przez podstawę, na której ruch zachodzi. Potwierdzenie słuszności tego przypuszczenia widzimy w fakcie, że, odpowiednio zmieniając środowisko lub podstawę, możemy trwanie danego ruchu nieograniczenie przedłużyć.

2. PIERWSZA ZASADA MECHANIKI

Takie uogólnienie pojęcia siły równoważne jest założeniu, że ciało, na które nie działają żadne siły, pozostaje albo w spoczynku, albo w ruchu jednostajnym prostoliniowym. Założenie to, sformułowane po raz pierwszy przez Newtona (1642—1727) jako jeden z trzech „pewników lub praw ruchu", nazywamy pierwszą zasadą mechaniki lub zasadą bezwładności.

Newton, formułując tę zasadę, uogólnił i pogłębił wniosek, do jakiego przed nim doszedł Galileusz (Galileo Galilei, 1564—1642), badając ruch, spowodowany działaniem siły ciężkości. Przytoczymy tu w schematycznym streszczeniu jedno z rozumowań Galileusza.



rys. 40

Niech A i C (rys. 40) będą dwiema równiami pochyłymi, z których C może mieć różne nachylenia do poziomu. Kula, staczająca się z punktu A pod działaniem siły ciężkości, nie zatrzymuje się w najniższym punkcie równi, lecz porusza się dalej po równi C, podnosząc się, jak to, ekstrapolując wyniki swych doświadczeń, przyjął Galileusz, na wysokość równą tej, z jakiej spadła, poruszając się wzdłuż równi A, w rzeczywistości zaś dochodząc do punktów C_1, C_2, C_3, C_4..., znajdujących się tym bliżej punktów C^{I}, C^{II}, C^{III}, C^{IV}... im gładsza jest powierzchnia obydwu równi. W miarę więc zmniejszania się kąta α nachylenia równi C do poziomu zwiększa się długość przeby-

wanej przez kulę drogi, wolniej zmniejsza się prędkość jej ruchu. Możemy zatem oczekiwać, że gdy kąt α równy jest zeru, gdy więc równia C jest pozioma, a przy tym gdy jest doskonale gładka, kula poruszać się będzie po niej nieograniczenie długo z prędkością, jakiej nabyła, spadając wzdłuż A.

Jest rzeczą oczywistą, że zasady bezwładności nie możemy udowodnić bezpośrednio żadnym doświadczeniem. Nigdy bowiem nie mamy do czynienia z ciałem, co do którego moglibyśmy być pewni, że nie podlega oddziaływaniu ciał innych, że więc nie działają na nie żadne siły. Pewność, jaką mamy co do jej słuszności, czerpiemy stąd, że wnioski, jakie z niej wyprowadzamy, są na ogół zgodne z wynikami doświadczeń i że dotychczas nie znamy ani jednego zjawiska, które by było z nią w sprzeczności, nie dającej się usunąć.

W podanym wyżej sformułowaniu zasady bezwładności nie jest wskazany układ odniesienia, względem którego prędkość ciała, nie podlegającego działaniu siły, zachowuje wartość stałą. Chcąc usunąć tę niejasność, musimy jakby odwrócić zagadnienie, a mianowicie, przyjmując zarówno tę zasadę, jak i dwie inne, o których będzie mowa niżej, za obowiązujące, znaleźć przez porównanie obserwowanych ruchów ciał z wyznaczonymi na podstawie przyjętych założeń, w jakim z używanych przez nas układów odniesienia zasady te pozwalają otrzymać wyniki, jak najbardziej zgodne z doświadczeniem. Przekonamy się wtedy, że układ odniesienia, sztywnie związany z ziemią, utworzony np. przez trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny, przecinające się w środku ziemi, nie czyni zadość wymaganym warunkom. W układzie tym bowiem tor ciała, poruszającego się w płaszczyźnie poziomej, którego ruchu nie zmienia zatem działanie siły ciężkości, jest wbrew przypuszczeniom Galileusza, krzywoliniowy; podobnie ciało, spadające pod działaniem siły ciężkości, mającej stały kierunek, nie porusza się, jakby to wynikało z drugiej zasady Newtona, ruchem prostoliniowym, lecz również ruchem krzywoliniowym (rozdz. IV, ust. 6). Możemy tę niezgodność z zasadami usunąć, nadając wybranemu układowi odniesienia ruch obrotowy o kierunku przeciwnym do ruchu obrotowego ziemi i o tej samej prędkości kątowej, a więc przyjmując za układ odniesienia taki układ, względem którego ziemia się obraca. Ten układ wystarczy całkowicie, o ile będzie chodziło o ruchy ciał ziemskich, okaże się jednak niewystarczającym przy wyjaśnieniu ruchów ciał niebieskich. Wtedy trzeba go zastąpić innym układem. Ten nowy układ wyznaczony jest przez płaszczyznę ekliptyki oraz dwie osi, przechodzące przez środek masy układu planetarnego (ust. 15), z których jedna jest skierowana do punktu przysłonecznego, druga zaś jest prostopadła do płaszczyzny ekliptyki; do tych dwu osi jest prostopadła

oś trzecia, która tym sposobem również jest wyznaczona. Układ taki jest, jak wykazują pomiary astronomiczne, równoważny z układem, wyznaczonym przez wzajemnie prostopadłe osi, przecinające się w środku masy układu planetarnego i skierowane do odpowiednio dobranych gwiazd stałych. Każdy z tych dwu ostatnio wymienionych układów, nazywanych czasami układami Kopernika, bardzo mało się różni, jak to udowodnił Seeliger (1906), od tzw. układu inercyjnego (łac. inertia — bezwładność), względem którego ciało, nie poddane działaniu żadnej siły, istotnie będzie pozostawało w spoczynku lub poruszało się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Jeżeli układy osi Kopernika lub inercyjny zastąpimy innym, poruszającym się względem nich prostoliniowym ruchem jednostajnym, układ taki można również uważać za czyniący zadość zasadom mechaniki, ciało bowiem, poruszające się ze stałą (co do wartości i kierunku) prędkością względem układów, używanych poprzednio, będzie się poruszało również ze stałą prędkością (różniącą się od poprzedniej kierunkiem i wartością) względem nowego układu (rozdz. I, ust. 6). Tego rodzaju zespół układów nazywamy układami Galileusza.

W znacznej jednak większości przypadków, z którymi mamy do czynienia, możemy za układ odniesienia brać układ, związany z ziemią.

3. MASA

Z zasady bezwładności wynika, że działanie siły na ciało wyraża się zmianą jego prędkości. Możemy zatem za miarę wartości siły, działającej na dane ciało, wziąć przyspieszenie, jakiego ona ciału udziela, i kierunek przyspieszenia uważać za kierunek siły. To założenie pozwala nam porównywać siły; dwie siły uważamy za równe, gdy działając na to samo ciało, udzielają mu tych samych przyspieszeń. Doświadczenie jednak wskazuje, że takie dwie równe siły, działające każda na inne ciało, udzielą im przyspieszeń, na ogół, nierównych.

Przymocujmy np. do kuli, zrobionej z drzewa, sprężynę, której drugi koniec będziemy ciągnęli ręką w ten sposób, aby wydłużenie jej przez cały czas doświadczenia pozostawało niezmienne. Stwierdzimy, że gdy podstawa, po której kula się porusza, jest dostatecznie gładka, ruch kuli jest mniej więcej jednostajnie przyspieszony. Powtarzając kilkakrotnie ten pomiar, przekonamy się, że, o ile wydłużenie sprężyny będzie stale to samo, wartość przyspieszenia pozostanie we wszystkich pomiarach jednakowa. Możemy zatem powiedzieć, że temu samemu wydłużeniu sprężyny odpowiada ta sama siła, działająca na kulę. Jeżeli teraz przymocujemy tę sprężynę do kuli ołowianej o tym samym pro-

mieniu, co użyta poprzednio kula drewniana, znajdziemy, że przy tym samym wydłużeniu sprężyny przyspieszenie kuli ołowianej jest mniejsze.

Oznaczmy te przyspieszenia przez a_1 i a_2. Doświadczenie pozwoli nam stwierdzić, że stosunek tych dwu wielkości nie zależy ani od wartości działających sił (byleby zawsze były równe), ani też, przynajmniej w tych granicach prędkości, z jakimi spotykamy się w mechanice, od prędkości, jaką ciała już posiadały, zanim zostały poddane działaniu sił. Wobec tego różnicę przyspieszeń przypisujemy różnicy własności mechanicznych badanych ciał, mówiąc, że różnią się one masami i zakładając, że masy te są odwrotnie proporcjonalne do przyspieszeń, udzielonych tym ciałom przez równe siły

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \tag{1}$$

Stąd wynika, że gdy masę jednego z ciał badanych przyjmiemy za jednostkę, pomiar masy dowolnego ciała sprowadzi się do wyznaczenia stosunku przyspieszeń, udzielonych przez tę samą siłę (lub dwie równe siły) masie jednostkowej i masie badanego ciała.

$$\frac{m}{1} = \frac{a_1}{a}, \text{ skąd } m = \frac{a_1}{a} \cdot 1.$$

Liczba więc, otrzymana z pomiaru na masę m, nie zależy od wyboru jednostek przyspieszenia. Taki pomiar masy nazywamy dynamicznym.

Za jednostkę masy przyjmujemy masę wzorca, ze stopu platyny z irydem, przechowywanego podobnie, jak wzorce metra, w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sèvres. Masę tę nazywamy kilogramem (kg). W fizyce jednak najczęściej używamy, jako jednostki, masy tysiąc razy mniejszej — grama, — który oznaczamy przez g.

Kilogram, jako jednostka masy, został wprowadzony jednocześnie z metrem, jako jednostką długości. Początkowo kilogramem nazywano masę jednego decymetra sześciennego wody chemicznie czystej w temperaturze największej jej gęstości (bardzo mało różniącej się od 4° skali gazowej), pod ciśnieniem normalnym. Późniejsze jednak pomiary wykazały, że prototyp, którego masa miała być równa tak określonej jednostce, ma w rzeczywistości masę nieco większą tak, że dla otrzymania masy, równej masie wzorca kilogramowego, należy wziąć nie 1 dcm^3 wody, lecz 1 litr = 1,000027 dcm^3.

4. DRUGA ZASADA MECHANIKI. JEDNOSTKA SIŁY

Z rozważań ustępu poprzedniego wynika, że przyspieszenie, udzielane ciału przez działającą na nie siłę, jest odwrotnie proporcjonalne do masy ciała i wprost proporcjonalne do wartości działającej siły oraz posiada ten sam, co siła, kierunek. Związkowi więc tych trzech wielkości (przyspieszenia, siły i masy) możemy nadać postać wzoru

$$\vec{a} = k_1 \frac{\vec{f}}{m} \text{ lub } \vec{f} = k m \vec{a}, \tag{2}$$

który uważać będziemy za wyrażający drugą zasadę mechaniki.

Wzór (2) niezupełnie odpowiada sformułowaniu, danemu przez Newtona (ust. 14).

Kładąc $k = 1$, otrzymamy

$$\vec{f} = m\vec{a}, \tag{2a}$$

w którym za jednostkę siły bierzemy siłę, nadającą masie 1 g przyspieszenie 1 cm/sek². Siłę tę nazywamy d y n ą (gr. dynamis — siła). Równanie wymiaru siły wyrazi się wzorem

$$[f] = MLT^{-2},$$

skąd dla dyny otrzymujemy $\frac{\text{gcm}}{\text{sek}^2}$. Bezwzględny układ jednostek (Wstęp, ust. 8), w którym za jednostkę długości bierzemy centymetr, za jednostkę czasu — sekundę, za jednostkę masy — gram, nazywamy układem *C. G. S.* (cm, g, sek). Dyna zatem jest jednostką siły w układzie *C. G. S.*

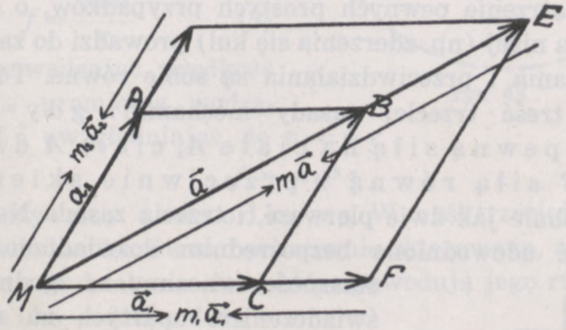
We wzorze (2 a) masa jest, zgodnie z wywodami ustępu poprzedniego, wielkością stałą, charakterystyczną dla danego ciała, stosunek zatem $\frac{f}{a}$ jest również dla danego ciała stały. Doświadczenie potwierdza całkowicie to założenie, gdy prędkość, z jaką ciało się porusza, nie przekracza granic, o jakich była mowa w ust. 6, rozdz. I. Przy prędkościach większych, bliskich prędkości światła, tj. 300 000 km/sek, stosunek ten, jak na to zdają się wskazywać doświadczenia, wykonane z elektronami ujemnymi, poruszającymi się z bardzo wielką prędkością (Kaufmann 1901, Neuman 1914, Guye i Lavanchy 1916, 1921), się zwiększa, co by dowodziło wzrostu masy poruszającego się ciała. Do tego samego wniosku — zwiększania się masy w miarę wzrostu prędkości — prowadzi teoria względności.

5. NIEZALEŻNOŚĆ DZIAŁANIA SIŁ. DODAWANIE I ROZKŁADANIE SIŁ, DZIAŁAJĄCYCH NA PUNKT MATERIALNY

Przy wyprowadzeniu wzoru (2 a) zakładaliśmy, że na ciało działa jedna tylko siła; to ograniczenie jednak nie jest bynajmniej konieczne. Taki sam bowiem związek między siłą, masą i przyspieszeniem zachodzi i w tym przypadku, gdy na ciało działa więcej sił, niż jedna. Każda z tych sił udzieli ciału przyspieszenia o kierunku zgodnym z jej własnym kierunkiem i o wartości wyznaczonej ze wzoru (2 a), a więc takiego, jakie by otrzymało ciało, poddane działaniu jednej tylko siły. To twierdzenie nazywamy twierdzeniem o niezależności działania sił.

Twierdzenie to zawarte jest w objaśnieniu, jakim Newton zaopatrzył swoje sformułowanie drugiej zasady mechaniki.

Załóżmy, że mamy do czynienia z przypadkiem, omówionym w ust. 2, rozdz. I, i niech *M* będzie punktem materialnym, w którym wyobrażamy sobie skupioną całą masę ciała, na które dzia-



rys. 41

łają dwie siły $\vec{f_1}$ i $\vec{f_2}$, udzielające mu przyspieszeń $\vec{a_1} = \frac{\vec{f_1}}{m}$ i $\vec{a_2} = \frac{\vec{f_2}}{m}$ (rys. 41). Punkt materialny poruszać się będzie z przyspieszeniem, równym sumie geometrycznej $\vec{a_1}$ i $\vec{a_2}$, a więc tak, jakby działała na niego siła $\vec{f} = m\vec{a}$. Siła ta jest wypadkową sił $\vec{f_1}$ i $\vec{f_2}$, jak to wynika z podobieństwa trójkątów *ACB* i *AFE* (rys. 41). Do sił zatem, działających na punkt materialny, mo-

żemy stosować ustalone wyżej (rozdz. I, ust. 5) reguły dodawania geometrycznego.

W przypadku szczególnym, gdy wypadkowa sił równa jest zeru, punkt materialny *M* albo jest w spoczynku, albo porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Mówimy wtedy, że siły się r ó w n o w a ż ą.

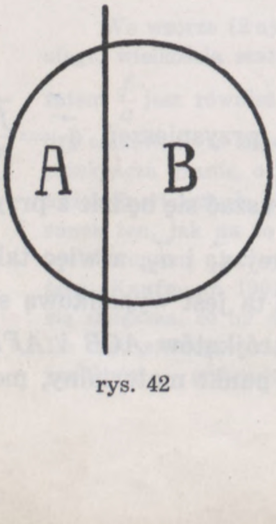
6. TRZECIA ZASADA MECHANIKI

We wszystkich przypadkach, w których obserwujemy działanie jakiegoś ciała *B* na ciało *A*, stwierdzamy również działanie ciała *A* na ciało *B* w kierunku odwrotnym. To przeciwdziałanie — reakcja, jak często mówimy — ciała *A* ujawnia się, podobnie jak działanie — akcja — ciała *B*, w przyspieszeniu ruchu ciała *B*, gdy inne siły, działające na *B*, nie równoważą siły reakcji, albo też w odkształceniu ciała *B*, zazwyczaj zaś w jednym i drugim.

Tak np., gdy stojąc na gładkiej podłodze, ciśniemy ręką na ścianę, jesteśmy od niej odsuwani i to tym bardziej, im silniej na ścianę ciśniemy.

Rozpatrzenie pewnych prostych przypadków, o jakich będzie mowa niżej (np. zderzenia się kul) prowadzi do założenia, że siły działania i przeciwdziałania są sobie równe. To założenie stanowi treść trzeciej zasady mechaniki: g d y c i a ł o *B* d z i a ł a p e w n ą s i ł ą n a c i a ł o *A*, c i a ł o *A* d z i a ł a n a c i a ł o *B* s i ł ą r ó w n ą i p r z e c i w n i e s k i e r o w a n ą.

Podobnie jak dwie pierwsze, i trzecia zasada Newtona nie może być udowodniona bezpośrednim doświadczeniem. O jej słuszności wnosimy ze zgodności z doświadczeniem opartych na niej wniosków.



rys. 42

Newton na poparcie tej zasady dał między innymi następujący przykład. Rozetnijmy kulę ziemską dowolną płaszczyzną na dwie nierówne części *A* i *B* (rys. 42). Gdyby działanie jednej z tych części na drugą nie było równe przeciwdziałaniu części drugiej, ziemia, na którą działają obydwie te siły, poruszałaby się ruchem przyspieszonym w kierunku wypadkowej, czego w rzeczywistości nie obserwujemy. Zaznaczmy, że tą zasadą posługiwaliśmy

się milcząco w przykładzie ust. 3, gdy zakładaliśmy, że wydłużenie sprężyny jest miarą działającej na ciało siły; jest to równoważne założeniu, że wydłużenie sprężyny jest spowodowane przez siłę równą i przeciwnie skierowaną do tej, z jaką sprężyna działa na ciało.

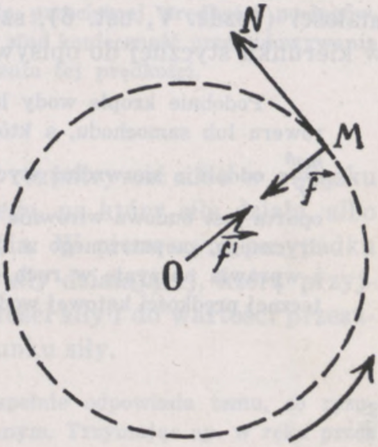
7. RUCH JEDNOSTAJNY PO KOLE

Rozpatrzmy tytułem przykładu ruch jednostajny punktu materialnego po kole. Wiemy, że w takim ruchu przyspieszenie skierowane jest do środka i równe (rozdz. I, ust. 10),

$$a = \frac{v^2}{r},$$

a zatem, zgodnie z drugą zasadą mechaniki, ruch taki zachodzić może tylko wtedy, gdy na punkt materialny M działa siła, skierowana do środka toru kołowego, o stałej wartości

$$f = \frac{mv^2}{r}. \qquad (3)$$



rys. 43

lub, wprowadzając prędkość kątową ω promienia wodzącego OM i uwzględniając, że $v = \omega r$

$$f = m\omega^2 r \qquad (3\,a)$$

Siłę tę nazywamy **dośrodkową**. W myśl trzeciej zasady sile tej odpowiada siła równa i przeciwnie skierowana, z jaką punkt materialny M działa na ciała, które powodują jego ruch po kole; jest to **siła odśrodkowa**.

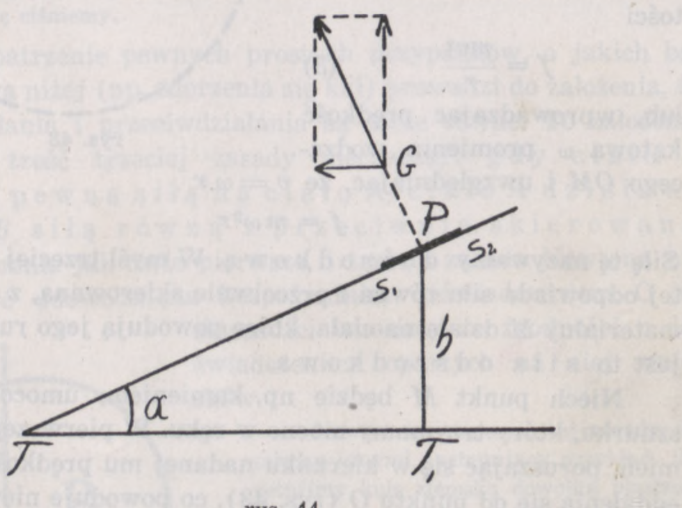
Niech punkt M będzie np. kamieniem, umocowanym na sznurku, który trzymamy mocno w ręku. W pierwszej chwili kamień, poruszając się w kierunku nadanej mu prędkości, dąży do oddalenia się od punktu O (rys. 43), co powoduje niewielkie wydłużenie się sznurka i powstania w nim napięć sprężystych (rozdz. V, ust. 2). Gdy napięcia te przybiorą wartość $\frac{mv^2}{r}$, sznurek przestanie się wydłużać i kamień zacznie opisywać koło o promieniu r, poruszając się ze stałą prędkością v. Siłą dośrodkową jest tu napięcie sznurka, działające na kamień w kierunku od

M do *O*. Z taką samą siłą działa kamień na sznurek w kierunku od *O* do *M*, usiłując wyrwać nam sznurek z ręki.

Gdy siła dośrodkowa z jakichkolwiek powodów przestaje działać, punkt materialny *M*, nie poddany działaniu żadnej siły, porusza się dalej ruchem jednostajnym prostoliniowym z tą prędkością, jaką miał w chwili, gdy został uwolniony od działania siły dośrodkowej, a więc w kierunku stycznej do koła.

Tak np., gdy napięcie sznurka przekracza granicę wytrzymałości (rozdz. V, ust. 6), sznurek pęka i kamień porusza się w kierunku stycznej do opisywanego koła.

Podobnie krople wody lub błota, porwane z kałuży przez koło roweru lub samochodu, a których siła przylegania jest mniejsza od $\frac{mv^2}{r}$, oddalają się wzdłuż stycznych do obwodu koła. Na tej zasadzie oparta jest budowa wirownic do suszenia bielizny. Do naczynia cylindrycznego, zaopatrzonego w liczne otwory, wkłada się mokrą bieliznę i wprawia naczynie w ruch obrotowy dookoła jego osi. Przy dostatecznej prędkości kątowej woda wycieka przez otwory. Te proste przy-



rys. 44

kłady, których liczbę moglibyśmy bez trudu znacznie pomnożyć, wskazują dowodnie, że dla utrzymania ciała w ruchu kołowym konieczne jest działanie siły dośrodkowej o wartości odpowiednio dobranej do jego masy, prędkości i promienia koła, po którym się porusza.

Tym się tłumaczy podwyższanie zewnętrznej szyny toru kolejowego na zakrętach; podwyższenie to dobiera się w ten sposób, aby oddziaływanie szyny na wagon było do powierzchni toru prostopadłe.

Oznaczając przez α kąt, jaki płaszczyzna toru tworzy z poziomem, znajdujemy, że podwyższenie szyny zewnętrznej

$$h = l\alpha, \text{ gdzie } l = TT_1 = TP \text{ (rys. 44)}$$

Siła dośrodkowa jest równa składowej poziomej ciężaru $Q \cdot tg\alpha = \frac{mv^2}{r}$, kładąc $tg\alpha = \alpha$, otrzymujemy $h = \frac{mv^2}{Q \cdot r} \cdot l$.

Podwyższenie to, ściśle biorąc, powinno być zatem dla każdej prędkości inne; jest to, oczywiście, warunek niemożliwy do spełnienia, zazwyczaj przeto oblicza się h dla przeciętnej prędkości pociągów, poruszających się po danym torze; stąd konieczność przebudowywania torów przy znaczniejszym zwiększeniu tej prędkości.

8. PRACA

Wynik działania siły możemy rozpatrywać albo w związku z przesunięciem punktu materialnego, na który siła działa, albo też uwzględniając czas jej działania. W pierwszym przypadku miarą tego wyniku jest p r ą c a siły działającej, którą przyjmujemy za proporcjonalną do wartości siły i do wartości przesunięcia punktu materialnego w kierunku siły.

Takie określenie pracy niezupełnie odpowiada temu, co rozumiemy przez pracę w życiu codziennym. Trzymając np. w ręku przez czas dłuższy jakieś ciężkie ciało, odczuwamy zmęczenie, które przypisujemy wykonanej przez nas pracy, jakkolwiek przesunięcie ciała równe jest w tym przypadku zeru. W istocie jednak zmęczenie zjawia się jako skutek pracy, potrzebnej do utrzymania mięśni naszej ręki w odpowiednim napięciu.

W przypadku najprostszym, gdy siła działająca jest stała i gdy punkt materialny przesuwa się w kierunku siły, praca wyraża się wzorem

$$\mathcal{T} = k \cdot f \cdot s,$$

gdzie k czynnik proporcjonalności, zależny jedynie od wyboru jednostek. Kładąc $k = 1$, a więc, pisząc

$$\mathcal{T} = f \cdot s, \tag{4}$$

za jednostkę pracy przyjmujemy pracę stałej siły, równej jednostce, wykonanej przy przesunięciu punktu materialnego w kierunku działania siły o jednostkę długości. W układzie C. G. S. jest to praca 1 dyny na drodze 1 cm. Jednostkę tę nazywamy e r g i e m (gr. ergon — praca, dzieło). Większa od niej jed-

nostka tego samego układu, d ż u l (od nazwiska fizyka angielskiego Joule'a — 1818—1889), równa jest 10^7 ergów.

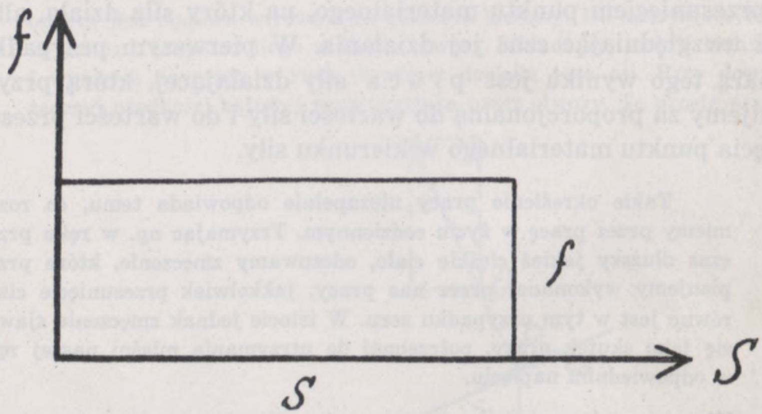
Równanie wymiaru pracy ma postać

$$[\mathcal{T}] = ML^2 T^{-2},$$

czemu w układzie C. G. S odpowiada $\frac{\text{gcm}^2}{\text{sek}^2}$.

Terminu praca, w znaczeniu zgodnym z podanym wyżej określeniem, pierwszy użył Poncelet (1826 r.).

Odkładając na osi odciętych przesunięcia punktu materialnego, na osi rzędnych siłę, działającą na punkt, znajdziemy, stosując rozumowanie analogiczne do tego, jakim posługiwaliśmy się w rozdz. I, ust. 2, że praca równa jest liczbowo polu prostokąta, zbudowanego na odcinku f i s (rys. 45).



rys. 45

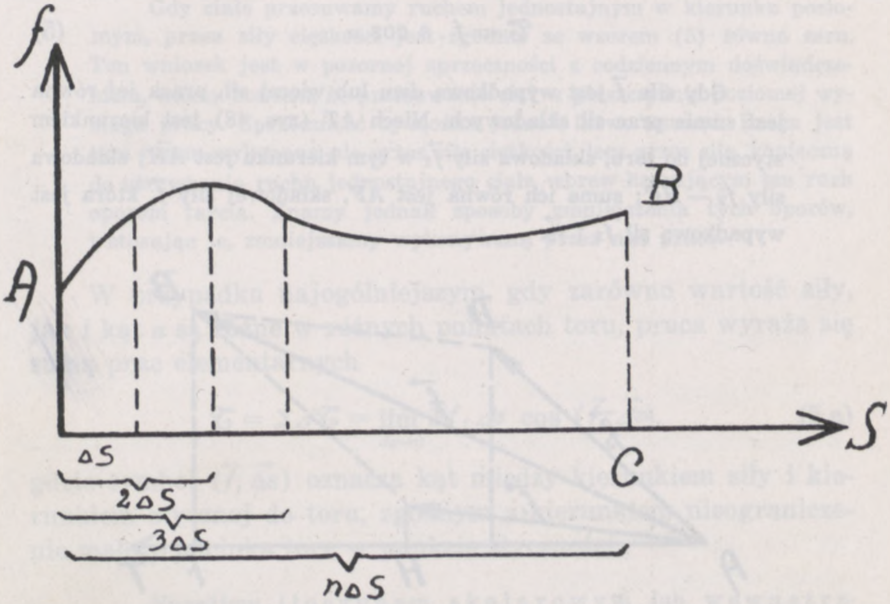
Gdy siła działająca, zachowując stale ten sam kierunek, co przesunięcie punktu materialnego, nie ma wartości stałej, możemy zawsze drogę, przez punkt przebytą, rozbić na tak małe odcinki, aby podczas przechodzenia punktu materialnego przez każdy z nich wartość siły można było uważać za stałą. To założenie tym lepiej będzie odpowiadało warunkom rzeczywistym, im odcinki te będą krótsze. Oznaczając przez f chwilową wartość siły, przez Δs — długość odpowiedniego odcinka, otrzymamy na tzw. p r a c ę e l e m e n t a r n ą wzór

$$\lim \Delta \mathcal{T} = \lim_{\Delta s \to 0} f \,.\, \Delta s.$$

Całkowita praca jest sumą tych prac elementarnych

$$\mathcal{T} = \Sigma \Delta \mathcal{T} = \lim_{\Delta s \to 0} \Sigma f . \Delta s \qquad (4a)$$

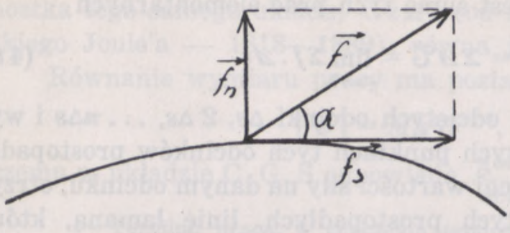
Odkładając na osi odciętych odcinki Δs, $2\,\Delta s$, ... $n\Delta s$ i wystawiając w początkowych punktach tych odcinków prostopadłe o długości odpowiadającej wartości siły na danym odcinku, otrzymamy, łącząc końce tych prostopadłych, linię łamaną, która w granicy, przy stopniowym zmniejszaniu długości odcinków Δs, przejdzie w pewną linię krzywą (rys. 46). Rozumując po-



rys. 46

dobnie, jak w ust. 9, rozdz. I, stwierdzimy, że i tym razem praca siły równa jest liczbowo polu figury *OABC*.

Załóżmy teraz, że kierunek przesunięcia tworzy stale z kierunkiem stałej siły kąt α (rys. 47). (Kąt ten w przypadku krzywoliniowego toru jest kątem między wektorem siły i styczną do toru w danym punkcie). Rozłóżmy wektor $\vec{f}$ na dwie składowe: styczną $\vec{f}_s$ i normalną $\vec{f}_n$ do toru. Punkt materialny

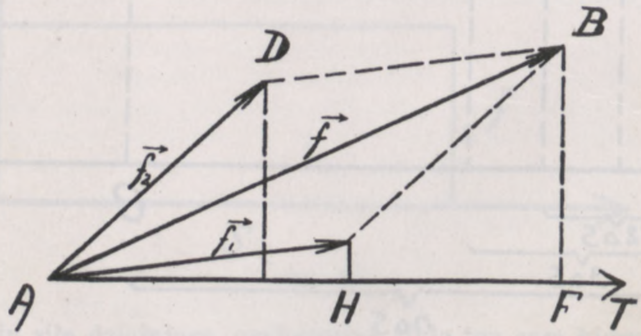


rys. 47

przesuwa się jedynie w kierunku składowej stycznej; w kierunku składowej normalnej przesunięcie jego równe jest zeru. Praca więc siły $\vec{f}$ sprowadza się, zgodnie z podanym na początku tego ustępu określeniem pracy, do pracy składowej $\vec{f}_s$, równa jest zatem

$$\mathcal{T} = f \cdot s \cos \alpha \tag{5}$$

Gdy siła $\vec{f}$ jest wypadkową dwu lub więcej sił, praca jej równa jest sumie prac sił składowych. Niech AT (rys. 48) jest kierunkiem stycznej do toru, składowa siły $\vec{f}_1$ w tym kierunku jest $\vec{AH}$; składowa siły f_2 — $\vec{HF}$; suma ich równa jest $\vec{AF}$, składowej siły $\vec{f}$, która jest wypadkową sił $\vec{f}_1$ i $\vec{f}_2$.



rys. 48

Stosując ten wzór również wtedy, gdy $\alpha > 90°$, a więc, gdy $\mathcal{T}$ ma wartość ujemną, uogólniamy podane wyżej określenie pracy i na przypadki, gdy punkt materialny przesuwa się w kierunku przeciwnym do kierunku składowej stycznej $\vec{f}_s$. Mówimy wtedy zazwyczaj, że praca została wykonana przeciwko sile $\vec{f}$.

Podnosząc jakieś ciało do góry ruchem jednostajnym musimy działać na nie siłą równą sile ciężkości (pomijamy tu opór powietrza

lub podstawy, po której ciało się porusza, oraz nie uwzględniamy chwili początkowej, w której siła, z jaką działamy, musi być większa od ciężaru Q ciała, aby wypadkowa tych dwu sił mogła nadać ciału tę prędkość, z jaką ma się nadal poruszać). Niech przesunięcie ciała w kierunku pionowym do góry wynosi h, wtedy praca przez nas wykonana

$$\mathcal{T} = Q \cdot h.$$

Równie dobrze możemy powiedzieć, że siła ciężkości wykonała pracę ujemną

$$-\mathcal{T} = -Q \cdot h$$

lub że praca $\mathcal{T}$ została wykonana przeciwko sile ciężkości.

Gdy ciało przesuwamy ruchem jednostajnym w kierunku poziomym, praca siły ciężkości jest zgodnie ze wzorem (5) równa zeru. Ten wniosek jest w pozornej sprzeczności z codziennym doświadczeniem, wiemy bowiem, że przesuwanie ciał w płaszczyźnie poziomej wymaga pracy. Sprzeczność tę można jednak łatwo usunąć. Praca jest tym razem wykonana nie przez siłę ciężkości, lecz przez siłę, konieczną do utrzymania ruchu jednostajnego ciała wbrew hamującym ten ruch oporom tarcia. Znamy jednak sposoby zmniejszenia tych oporów, i stosując je, zmniejszamy wykonywaną przez nas pracę.

W przypadku najogólniejszym, gdy zarówno wartość siły, jak i kąt α są różne w różnych punktach toru, praca wyraża się sumą prac elementarnych

$$\mathcal{T} = \Sigma \Delta\mathcal{T} = \lim_{\Delta s \to 0} \Sigma f \cdot \Delta s \cos(\vec{f}, \vec{\Delta s}), \tag{5 a}$$

gdzie symbol $(\vec{f}, \vec{\Delta s})$ oznacza kąt między kierunkiem siły i kierunkiem stycznej do toru, zgodnym z kierunkiem nieograniczenie małego odcinka toru w punkcie styczności.

Nazwijmy i l o c z y n e m s k a l a r o w y m lub w e w n ę t r z n y m dwu wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ skalar

$$c = a \cdot b \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Wielkość ta ma wartość największą, gdy wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są równoległe $(\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1)$, równą zaś zeru, gdy są prostopadłe $(\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0)$. Iloczyn skalarowy symbolicznie oznaczamy

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Gdy tor punktu jest prostoliniowy, przesunięcie punktu możemy, jak o tym wiemy z rozważań ust. 5, rozdz. I, uważać za wektor, któ-

rego kierunek jest kierunkiem ruchu. W przypadku ruchu krzywoliniowego krzywą, po której porusza się punkt materialny, możemy zastąpić linią łamaną (rozdz. I, ust. 3), która tym mniej różni się od danej krzywej, im krótsze są poszczególne jej odcinki; w granicy różnica ta nieograniczenie zbliża się do zera. Te elementarne odcinki $\lim_{\Delta s \to 0} \Delta s$, zazwyczaj oznaczane symbolem ds, wyrażające prostoliniowe przesunięcia punktu materialnego w danych punktach toru, możemy również uważać za wektory $\vec{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \vec{\Delta s}$. Wtedy i wzór (5 a) staje się sumą iloczynów skalarowych

$$\mathcal{T} = \lim_{\Delta s \to 0} \Sigma \vec{f} . \vec{\Delta s}.$$

Uwzględniając czas, w ciągu którego praca została wykonana, dochodzimy do pojęcia m o c y lub d z i e l n o ś c i albo s p r a w n o ś c i, której miarą jest praca odniesiona do jednostki czasu. Gdy praca wzrasta proporcjonalnie do czasu, moc wyraża się wzorem

$$P = \frac{\mathcal{T}}{t}, \tag{5b}$$

gdzie t czas trwania pracy, skąd

$$\mathcal{T} = P . t.$$

Za jednostkę mocy w układzie C. G. S. przyjmujemy moc jednego erga na sekundę (erg/sek) lub jednego dżula na sekundę (dż/sek). Ta ostatnia jednostka ma nazwę wata (w) od nazwiska Jamesa Watta (1736—1825), twórcy jednej z pierwszych maszyn parowych.

Tysiąc razy większą jednostką od wata jest k i l o w a t (kw).

Używana często jednostka kilowat-godzina (Kwh) jest jednostką pracy. Jest to praca wykonana w ciągu jednej godziny mocą jednego kilowata.

Gdy praca wykonana w poszczególnych równych odstępach czasu ma wartości różne, moc chwilową otrzymujemy ze wzoru

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathcal{T}}{\Delta t}.$$

9. ENERGIA RUCHU PUNKTU MATERIALNEGO

Przypuśćmy, że siła $\vec{f}$, której pracę chcemy obliczyć, jest wypadkową wszystkich sił, działających na punkt materialny M o masie m, i że jej składowa styczna do toru ma wartość stałą. Wtedy ruch punktu materialnego M, poruszającego się w kierunku tej składowej, jest jednostajnie przyspieszony. Droga więc, przebyta przez punkt materialny M w ciągu czasu t, jest równa

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

skąd po podstawieniu $t = \frac{v_t - v_0}{a}$ i $a = \frac{f_s}{m}$, otrzymujemy

$$f_s \cdot s = \mathcal{T} = \frac{1}{2} m v_t^2 - \frac{1}{2} m v_0^2. \tag{6}$$

Wzór ten obowiązuje, oczywiście, i w przypadku, gdy s jest bardzo małe. Praca zatem elementarna, wykonana na drodze $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \Delta s$, wyrazi się wzorem analogicznym

$$\lim \Delta \mathcal{T} = \lim_{\Delta s \to 0} f_s \Delta s = \lim \Delta \left(\frac{1}{2} m v^2\right),$$

gdzie symbol Δ w ostatnim wyrazie oznacza bardzo mały przyrost wielkości $\frac{1}{2} m v^2$ na odcinku $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \Delta s$. Wobec tego na pracę zmiennej składowej stycznej f_s, równą, jak wiemy, sumie prac elementarnych, otrzymamy

$$\mathcal{T} = \lim_{\Delta s \to 0} \Sigma f_s \cdot \Delta s = \lim_{\Delta s \to 0} \Sigma f \cdot \Delta s \cos(\vec{f}, \vec{\Delta s}) = \lim \Sigma \Delta \mathcal{T} =$$
$$= \lim \Sigma \Delta \left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2, \tag{6a}$$

gdzie v_1 oznacza prędkość punktu materialnego w końcowym punkcie drogi.

Przypuśćmy teraz, że ten sam punkt materialny poruszając się z prędkością v_1 napotyka opór, powodujący zmniejszanie się jego prędkości aż do wartości początkowej v_0. Obliczając elementarne prace, wykonane przeciwko siłom oporu, i sumując je, stwierdzimy bez wielkiego trudu, że całkowita praca wyrazi się wzorem

$$\mathcal{T}' = -\mathcal{T} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_1^2,$$

a więc różnić się będzie jedynie znakiem od pracy, wykonanej przy zwiększaniu prędkości punktu materialnego od v_0 do v_1.

Praca $\mathcal{T}'$ będzie wykonana na drodze s', różnej na ogół od drogi s, na której została wykonana praca $\mathcal{T}$. W szczególnym jedynie przypadku, gdy siły oporu są równe sile $\vec{f}$, drogi s i s' są równe.

Możemy więc powiedzieć, że punkt materialny, zwiększywszy swą prędkość do v_1, powiększył swą zdolność wykonywania pracy o $\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$, taką bowiem pracę może wykonać przeciwko siłom oporu, wracając do prędkości poprzedniej. Zmiany zatem wielkości $\frac{1}{2}mv^2$ są miarą zmian, jakich doznała ta zdolność punktu materialnego. Tego rodzaju wielkość nazywamy e n e r g i ą. Ponieważ w tym przypadku zmiany energii ujawniają się w zmianie stanu ruchu, wielkość $\frac{1}{2}mv^2$ nazywamy e n e r g i ą r u c h u lub e n e r g i ą k i n e t y c z n ą punktu materialnego.

Praca zatem siły $\vec{f}$

$$\mathcal{T} = L_1 - L_0 \tag{6 b}$$

gdzie L_1 i L_0 oznaczają końcowe i początkowe wartości energii ruchu punktu materialnego M.

Ze wzoru (6 b) wynika, że jednostki energii ruchu są te same, co pracy, a więc erg i dżul.

Jest rzeczą oczywistą, że energia ta posiada oznaczoną wartość jedynie w oznaczonym układzie odniesienia; przy zmianie układu wartość jej się zmienia.

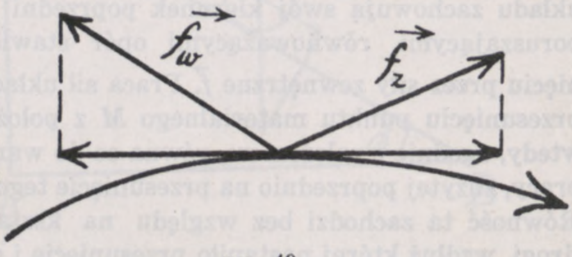
Gdyby ściana pokoju poruszała się z tą samą prędkością, co młotek, nie moglibyśmy użyć jego energii ruchu do wbicia w ścianę gwoździa, w układzie bowiem odniesienia, związanym ze ścianą, energia ruchu młotka jest równa zeru; aby gwóźdź wbić, musimy nadać młotkowi pewną prędkość względem ściany. W układzie odniesienia, związanym z ziemią, energia ruchu ziemi równa jest zeru; w planetarnym układzie energia ta posiada wartość bardzo wielką.

10. UKŁADY ZACHOWAWCZE. ENERGIA POTENCJALNA

Gdy wypadkowa $\vec{f}$ sił, działających na punkt materialny M, ma składową styczną do toru $\vec{f}_s$ równą zeru, energia ruchu punktu M się nie zmienia i punkt materialny porusza się ruchem jednostajnym.

Gdy poza tym składowa normalna do toru jest równa zeru, a więc gdy wypadkowa $\vec{f}$ jest równa zeru, torem punktu materialnego M jest linia prosta i kierunek ruchu jest wyznaczony przez kierunek prędkości początkowej; w przypadku ogólniejszym, przez nas rozpatrywanym, tor punktu jest dowolną krzywą, której kształt wyznaczają prędkość początkowa i składowa normalna wypadkowej $\vec{f}$.

Oznaczmy wypadkową wszystkich sił, których składowa styczna ma kierunek zgodny z kierunkiem ruchu, a więc tworzących z kierunkiem ruchu kąt mniejszy od 90°, przez $\vec{f}$, wypadkową sił o składowej stycznej skierowanej przeciwnie do kierunku ruchu, przez $\vec{f}_w$, i uważajmy wszystkie ciała, działające na punkt M siłami oporu (o wypadkowej $\vec{f}_w$), za tworzące z punktem materialnym wspólny u k ł a d c i a ł, siły zaś, działające w kierunku ruchu (o wypadkowej $\vec{f}_z$), za siły zewnętrzne, wywierane przez ciała, nie należące do układu.



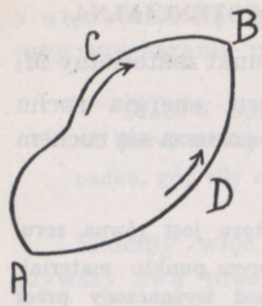
rys. 49

Przy przesunięciu punktu materialnego M z położenia A do położenia B wzdłuż drogi s praca sił zewnętrznych wyrazi się wzorem

$$\mathcal{T} = \lim_{\Delta s \to 0} \Sigma f_s \cdot \Delta s,$$

gdzie f_s oznacza tu składową sił zewnętrznych; praca ta, zgodnie z założeniem, że w każdym punkcie toru $f_s = -f_s'$, jest równa ujemnej pracy sił układu.

Załóżmy teraz, że w rozpatrywanym przez nas układzie praca, wykonana przez siły zewnętrzne przy przesunięciu punktu



rys. 50

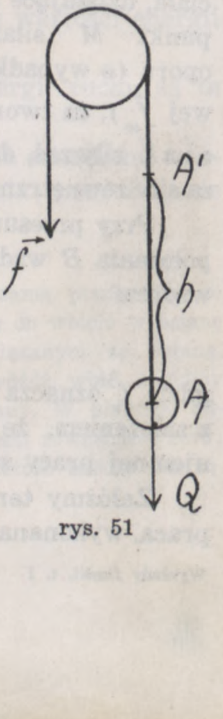
materialnego M z położenia A poprzez położenie B z powrotem do położenia początkowego, równa jest zeru. Niech $\mathcal{T}_{AB}$ oznacza pracę sił zewnętrznych, wykonaną na drodze od A do B; $\mathcal{T}_{BA}$ — pracę tychże sił na drodze od B do A. W myśl założenia mamy

$$\mathcal{T}_{AB} + \mathcal{T}_{BA} = 0$$

lub

$$\mathcal{T}_{AB} = -\mathcal{T}_{BA}.$$

Jeżeli więc na drodze od A do B praca sił zewnętrznych była dodatnia, na drodze od B do A będzie ona ujemna. Możemy zatem powiedzieć, że na tej ostatniej części drogi praca była wykonana nie przez siły zewnętrzne, lecz przeciwko nim przez siły układu. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy przy zmianie kierunku ruchu punktu materialnego tak, aby zaczął się on poruszać z powrotem od B do A, siły układu zachowują swój kierunek poprzedni i stają się siłami poruszającymi, równoważącymi opór stawiany temu przesunięciu przez siły zewnętrzne $\vec{f}$. Praca sił układu, wykonana przy przesunięciu punktu materialnego M z położenia B do A, jest wtedy, zgodnie z założeniem, równa co do wartości bezwzględnej pracy, zużytej poprzednio na przesunięcie tegoż punktu z A do B. Równość ta zachodzi bez względu na kształt drogi, wzdłuż której nastąpiło przesunięcie i co do której nie czyniliśmy żadnych założeń dodatkowych; wartość przeto pracy sił zewnętrznych zależy w tym przypadku jedynie od położenia początkowego i końcowego punktu drogi. Taki układ nazywamy u k ł a d e m z a c h o w a w c z y m, siły zaś w nim działające, — s i ł a m i z a c h o w a w c z y m i.



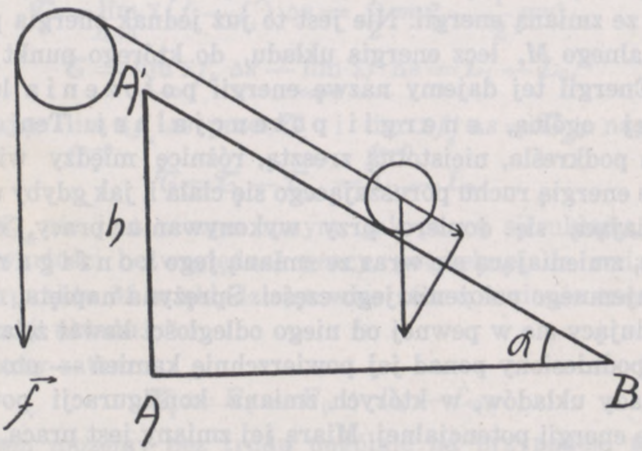
rys. 51

Niech przez doskonale gładki blok, mogący się obracać bez tarcia koło osi poziomej, będzie przerzucona doskonale giętka, nierozciągliwa nić, na której jednym końcu zawieszamy kulę, uważaną za punkt materialny (rys. 51). W układzie — kula, ziemia — ciężar kuli Q jest siłą wewnętrzną układu. Nadajmy kuli

niewielką prędkość do góry i utrzymujmy kulę w ruchu jednostajnym, ciągnąc za drugi swobodny koniec nici siłą $f = Q$, lecz skierowaną przeciwnie do kierunku siły ciężkości. Przy podniesieniu kuli od A do A' na wysokość h, drugi koniec nici opadnie na dół o tę samą wysokość, nić bowiem jest nierozciągliwa; praca siły f

$$\mathcal{T} = f \, . \, h = -Q \, . \, h \tag{a}$$

Gdy kula znajdzie się na tej wysokości, przysuńmy do niej doskonale gładką równię pochyłą $A'B$ i nadajmy kuli niewielką prędkość o kierunku $A'B$ (rys. 52). Aby w tym kierunku poruszała się ona ruchem jednostajnym, musimy do swobodnego



rys. 52

końca sznurka przyłożyć siłę f_1 równą sile przyspieszającej $Q_s = Q \sin\alpha$, będącej składową styczną do drogi ciężaru Q, działającego w tym samym kierunku, co przy podnoszeniu kuli. Praca tej składowej, równa pracy, wykonanej przeciwko sile zewnętrznej f_1, wyniesie $Q_s \, . \, l = Q \sin\alpha \dfrac{h}{\sin\alpha} = Q\,h = -f\,h$. (b)

Gdy kula dojdzie do położenia B, przesuwamy ją po doskonale gładkiej poziomej podstawie do punktu A. To przesunięcie prostopadłe do kierunku siły ciężkości, nie będzie wymagało żadnej pracy. Praca zatem sił zewnętrznych przy przesunięciu kuli od A do A' i z powrotem do A będzie równa

$$f \, . \, h - f \, . \, h = -Q \, . \, h + Q \, . \, h = 0.$$

Z zestawienia zaś wzorów (a) i (b) wynika bezpośrednio, że wartości prac, które by trzeba było wykonać, ażeby kulę podnieść na wysokość *h* pionowo i wzdłuż równi pochyłej, są wzajemnie równe.

Układ zatem przez nas rozpatrywany — ziemia, kula — jest układem zachowawczym.

Praca siły zewnętrznej, zużyta na pokonanie oporu sił układu, powoduje zwiększenie zdolności wykonywania pracy przez układ, którego siły, przywracając początkowe położenie punktu materialnego *M* w układzie, wykonywają pracę równą zużytej na przesunięcie. I w tym więc przypadku mamy do czynienia ze zmianą energii. Nie jest to już jednak energia punktu materialnego *M*, lecz energia układu, do którego punkt *M* należy. Energii tej dajemy nazwę energii p o ł o ż e n i a lub też, bardziej ogólną, e n e r g i i p o t e n c j a l n e j. Ten ostatni termin podkreśla, nieistotną zresztą, różnicę między widoczną dla nas energią ruchu poruszającego się ciała i, jak gdyby ukrytą, ujawniającą się dopiero przy wykonywaniu pracy, energią układu, zmieniającą się wraz ze zmianą jego k o n f i g u r a c j i, tj. wzajemnego położenia jego części. Sprężyna napięta, magnes i znajdujący się w pewnej od niego odległości kawał żelaza, ziemia i podniesiony ponad jej powierzchnię kamień — oto proste przykłady układów, w których zmiana konfiguracji powoduje zmianę energii potencjalnej. Miarą jej zmiany jest praca, zużyta na zmianę konfiguracji. Oznaczając początkową wartość energii potencjalnej przez E_0, końcową przez E_1, mamy

$$\mathcal{T} = E_1 - E_0 \qquad (7)$$

Wartość energii potencjalnej układu w danej konfiguracji będzie zatem

$$E_1 = E_0 + \mathcal{T},$$

gdzie E_0 jest na ogół wielkością nieoznaczoną. Zazwyczaj pewną konfigurację przyjmujemy za początkową i wartość odpowiadającej jej energii za E_0. Tak np. w układzie — kamień, ziemia — uważamy często energię potencjalną, którą układ posiada, gdy kamień leży na powierzchni ziemi, za E_0; wtedy wartość *E*, odpowiadająca podniesieniu kamienia na wysokość *h*, jest równa

$$E = E_0 + Q \, . \, h = Q \, . \, h + \text{stała}.$$

11. ZASADA ZACHOWANIA ENERGII MECHANICZNEJ

Wróćmy teraz znowu do przypadku, rozpatrywanego w ust. 9, gdy składowa styczna wypadkowej sił, działających na punkt materialny *M*, nie jest równa zeru, i załóżmy, że punkt *M* jest częścią układu zachowawczego. Oznaczmy, jak poprzednio, przez f_s składową styczną wypadkowej sił zewnętrznych, przez f'_s — składową styczną sił układu, przy czym, zgodnie z założeniem $f_s \neq f'_s$.

Praca składowej stycznej wypadkowej wszystkich sił wyrazi się wzorem (6)

$$\mathcal{T} = \lim_{\Delta s \to 0} \Sigma(f_s - f'_s)\,\Delta s = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

lub $\mathcal{T} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \Sigma f_s\,\Delta s - \lim\limits_{\Delta s \to 0} \Sigma f'\,\Delta s = L_1 - L_0$,

oznaczając $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \Sigma f_s\,\Delta s$ przez $\mathcal{T}_z$ i $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \Sigma f'_s\,\Delta s = \mathcal{T}_w$, napiszemy

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_z - \mathcal{T}_w = L_1 - L_0.$$

Praca $\mathcal{T}_w$ nie jest niczym innym, jak pracą sił układu, równą co do wartości bezwzględnej pracy, potrzebnej do zmiany położenia punktu *M* w układzie, a więc równą zmianie energii potencjalnej układu.

Mamy zatem

$$\mathcal{T}_z = E_1 - E_0 + L_1 - L_0\,. \tag{8}$$

Wzór ten możemy bez trudu uogólnić na przypadek, gdy siły zewnętrzne działają nie na jeden, lecz na *n* punktów układu. We wzorze (8) $\mathcal{T}$ będzie wtedy sumą prac wszystkich sił zewnętrznych; będzie ona zawsze równa sumie zmian energii potencjalnej układu i energii ruchu punktów materialnych, stanowiących dany układ. Gdy $\mathcal{T}_z > 0$, suma przyrostów obydwu rodzajów energii jest również dodatnia: c a ł k o w i t a e n e r g i a m e c h a n i c z n a u k ł a d u wzrasta; gdy $\mathcal{T}_z < 0$, gdy więc praca jest wykonywana przeciwko siłom zewnętrznym, całkowita energia mechaniczna układu maleje. Układ wtedy nazywamy m o t o r e m lub ź r ó d ł e m e n e r g i i. Gdy wreszcie mamy do czynienia z układem odosobnionym, tzn. takim, który nie podlega działaniu ciał, nie należących do układu, praca sił zewnętrznych jest stale równa zeru. Wzór (8) wtedy ma postać

$$E_0 - E_1 = L_1 - L_0. \tag{9}$$

W takim układzie energia ruchu może wzrastać tylko kosztem energii potencjalnej, energia potencjalna kosztem energii ruchu; zmniejszenie jednej równe jest zwiększeniu drugiej, suma ich więc pozostaje stała

$$E + L = \text{stałej}. \tag{10}$$

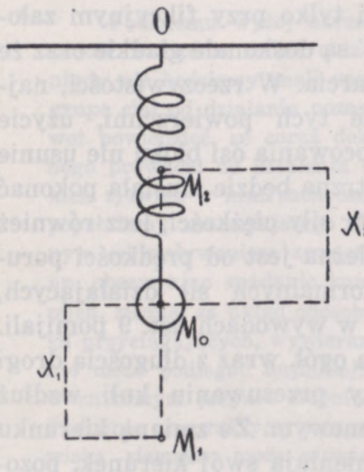
Podanemu wyżej określeniu układu odosobnionego nie czyni zadość w istocie żaden układ rzeczywisty. Nie znamy i, być może, nigdy nie będziemy znali sposobu, który by pozwolił uchronić pewną grupę ciał od działania pozostałej części wszechświata. Można by nawet powiedzieć, ze coraz dokładniejsza znajomość świata zewnętrznego prowadzi do ustalenia coraz ściślejszej współzależności wszystkich zjawisk w nim zachodzących. W wielu jednak przypadkach nie popełniamy znaczniejszego błędu, uważając układ, podlegający pewnym oddziaływaniom zewnętrznym, za całkowicie odosobniony. Tak np. obserwując spadanie kamienia, można często uważać układ: kamień, ziemia, za układ odosobniony, jakkolwiek działanie na ten układ sił przyciągających, wywieranych przez słońce, księżyc i inne planety, nie może podlegać najmniejszej wątpliwości. Działanie to jednak w znikomym jedynie stopniu wpływa na wyniki naszych pomiarów. Podobnie w praktyce najczęściej pomijamy wpływ, jaki na zjawiska ziemskie może wywierać świat gwiazd stałych, jakkolwiek badania nowsze zdają się wskazywać, że wpływ taki w rzeczywistości istnieje.

Wzory (8) i (10), stanowiące algebraiczny wyraz **zasady zachowania energii mechanicznej**, potwierdzają założenie, postawione jeszcze przez Galileusza, niemożliwości zbudowania mechanicznego perpetuum mobile, tzn. takiego układu ciał, który by mógł dostarczać nieograniczonej ilości pracy, który by więc był wiecznie działającym motorem. Istotnie, ze wzoru (10) wynika, że każdy układ zachowawczy posiada ograniczoną ilość energii mechanicznej, ze wzoru zaś (8), że praca, przez taki układ wykonana, zmniejsza ilość zawartej w nim energii. W najlepszych przeto nawet warunkach, przy całkowitym zużyciu energii układu, praca układu będzie miała zawsze wartość skończoną. Twierdzenie Galileusza, które związaliśmy z rozpatrywaniem układów zachowawczych, jest, jak się o tym później przekonamy, znacznie ogólniejsze od obowiązującej tylko w układach zachowawczych zasady zachowania energii mechanicznej.

Warunek bowiem podstawowy, aby praca sił zewnętrznych była niezależna od kształtu drogi, wzdłuż której przesuwa się punkt materialny *M*, w układach rzeczywistych nigdy nie jest całkowicie spełniony. Tak np. w rozpatrywanym przez nas prostym układzie — kula, ziemia — mogliśmy ustalić niezależność pracy wykonanej od rodzaju drogi tylko przy fikcyjnym założeniu, że podstawa *AB* i równia *BA'* są doskonale gładkie oraz że blok obraca się koło swej osi bez tarcia. W rzeczywistości, najdokładniejsze nawet wypolerowanie tych powierzchni, użycie możliwie najlepszych sposobów umocowania osi bloku nie usunie nigdy całkowicie tarcia. Siła zewnętrzna będzie musiała pokonać przy przesuwaniu kuli nie tylko opór siły ciężkości, lecz również opór sił tarcia, których wartość zależna jest od prędkości poruszanego ciała i od składowych normalnych sił działających, a więc od tych wielkości, któreśmy w wywodach ust. 9 pomijali. Ujemna praca sił tarcia wzrasta, na ogół, wraz z długością drogi punktu *M*, jest więc większa przy przesuwaniu kuli wzdłuż *ABA'*, niż przy jej podnoszeniu pionowym. Ze zmianą kierunku ruchu punktu *M* siły te również zmieniają swój kierunek, pozostając stale siłami hamującymi. Są to więc te siły, które w ust. 1 nazwaliśmy oporami biernymi. Praca sił układu, wykonywana podczas powrotu układu do konfiguracji poprzedniej, nigdy nie zużywa się całkowicie na pokonanie oporu sił zewnętrznych, część jej zawsze pochłonięta jest przez opór tarcia. W naszym przykładzie praca spadającego ciężaru $Q \cdot h$ jest zawsze większa od pracy $f \cdot h$. Ubytek więc energii mechanicznej układu przewyższa pracę, oddaną na zewnątrz. Układ taki, w którym nie wszystkie siły są zachowawcze, nazywamy u k ł a d e m r o z p r a s z a j ą c y m, oporom zaś biernym często daje się nazwę s i ł r o z p r a s z a j ą c y c h. W takich układach obliczenie zmiany energii potencjalnej możliwe jest tylko wtedy, gdy w pracy sił zewnętrznych potrafimy wyodrębnić część, wykonaną przeciwko siłom zachowawczym, od części, zużytej na pokonanie oporów biernych. Zmiany, jakie wywołuje w układach rozpraszających praca sił zewnętrznych, są o wiele bardziej złożone od rozpatrywanych dotychczas; będziemy o nich mówili znacznie później.

13. ZASTOSOWANIE ZASADY ZACHOWANIA ENERGII MECHANICZNEJ DO ROZPATRZENIA DRGAŃ HARMONIJNYCH PROSTYCH PUNKTU MATERIALNEGO

Niech na swobodnym końcu sprężyny, której drugi koniec jest umocowany, wisi ciało M o rozmiarach tak małych, że możemy je uważać za punkt materialny (rys. 53). Załóżmy, że bardzo małego ciężaru punktu materialnego M możemy w naszych rozważaniach nie uwzględniać, wtedy będziemy mogli przyjąć, że zawieszenie punktu materialnego M na sprężynie nie powoduje jej rozciągnięcia i, co za tym idzie, powstania w niej sił sprężystych, przeciwdziałających zmianie długości sprężyny. Siły te powstaną dopiero wtedy, gdy punkt materialny M będziemy przesuwali z początkowego położenia M_0 do innego położenia M_1. Wartość tych sił będzie wzrastała proporcjonalnie do odchylenia x od położenia M_0, które możemy nazwać położeniem równowagi (rozdz. V, ust. 2), będziemy więc mieli

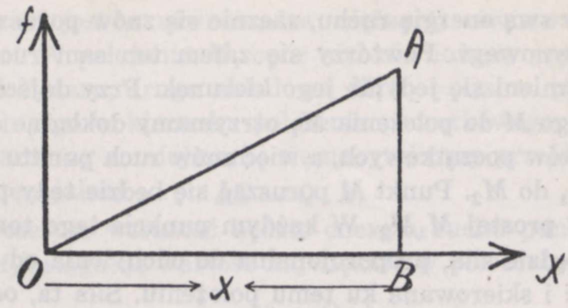


rys. 53

$$f = kx,$$

gdzie k czynnik proporcjonalności zależny od długości sprężyny w położeniu M_0 i od jej własności sprężystych, i zachowujący tę samą wartość zarówno przy wydłużaniu, jak i skracaniu sprężyny. Chcąc więc ruchem jednostajnym przesunąć punkt materialny M z M_0 do M_1, musimy na niego działać siłą zewnętrzną f_1 równą siłom sprężystym, a więc także zmieniającą się proporcjonalnie do odchylenia od położenia równowagi.

Pracę tej siły możemy wyznaczyć w sposób następujący. Odkładajmy na osi odciętych (rys. 54) chwilowe odległości punktu materialnego M od położenia równowagi, na osi rzędnych odpowiadające im wartości siły f_1. Zależność f_1 od x wyrazi się, jak to łatwo można sprawdzić, linią prostą OA; praca wykonana jest zatem liczbowo równa polu trójkąta OAB, a więc



rys. 54

wobec tego, że $OB = x_1$; $AB = f_1 = kx_1$, gdzie x_1 odległość punktu M_1 od M_0,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} f_1 x_1 = \frac{1}{2} kx_1^2.$$

Praca ta wyraża przyrost energii potencjalnej sprężyny, spowodowany przesunięciem punktu materialnego M z M_0 do M_1

$$\Delta E = \frac{1}{2} kx_1^2. \tag{11}$$

Gdy siła zewnętrzna f_1, równoważąca siły wewnętrzne f, przestanie działać, punkt materialny M zacznie wracać do położenia równowagi i nabyta energia potencjalna będzie stopniowo się zmniejszała. Zmniejszanie się jej będzie powodowało, zgodnie ze wzorem (10), zwiększanie się energii ruchu punktu materialnego M (energię ruchu zwojów sprężyny pomijamy). Energia ta osiągnie wartość największą w położeniu równowagi, wtedy bowiem ΔE stanie się równą zeru. W punkcie M_0 energia ruchu punktu materialnego M

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kx_1^2.$$

Posiadając tę energię punkt materialny M nie zatrzyma się w położeniu równowagi, lecz poruszać się będzie dalej, powodując skracanie się sprężyny. Opór sił sprężystych, powstających przy tym odkształceniu, zmniejsza stopniowo energię ruchu punktu materialnego M, której wartość staje się równa zeru w punkcie M_2, znajdującym się w tej samej odległości od M_0, co M_1.

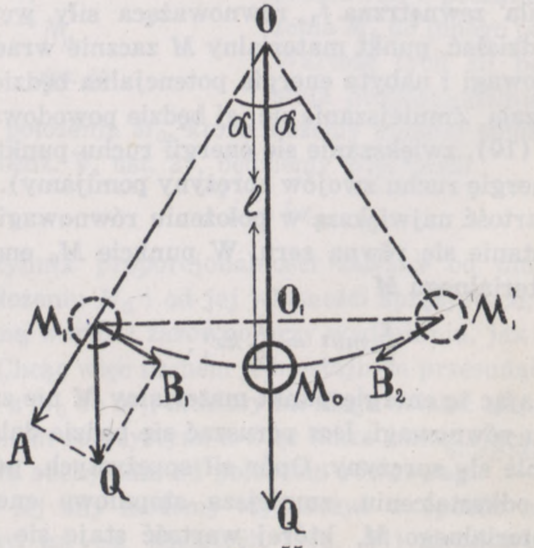
W punkcie M_2 energia potencjalna wzrośnie znowu o ΔE i znowu zacznie się zmniejszać, gdy punkt materialny M, wy-

czerpawszy swą energię ruchu, zacznie się znów poruszać ku położeniu równowagi. Powtórzy się zatem ten sam ruch, co poprzednio, zmieni się jedynie jego kierunek. Przy dojściu punktu materialnego M do położenia M_1 otrzymamy dokładne odtworzenie warunków początkowych, a więc znów ruch punktu materialnego od M_1 do M_2. Punkt M poruszać się będzie tedy periodycznie wzdłuż prostej M_1M_2. W każdym punkcie tego toru działać na niego będzie siła, proporcjonalna do odchylenia od położenia równowagi i skierowana ku temu położeniu. Siła ta, oczywiście, udzielać mu będzie przyspieszenia o tym samym kierunku i również proporcjonalnego do x. Ruch zaś o takim przyspieszeniu jest, jak wiemy (rozdz. I, ust. 12), ruchem drgającym harmonijnym prostym. Możemy zatem napisać

$$f = kx = ma = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} x,$$

gdzie m masa punktu materialnego M. Stąd

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (12)$$



rys. 55

Załóżmy teraz, że punkt materialny M o ciężarze Q wisi na giętkiej nierozciągliwej nici, długości l (rys. 55). Jest to tzw. w a h a d ł o m a t e m a t y c z n e. Gdy nić wisi pionowo, punkt

materialny M jest w równowadze: ciężar Q równoważony jest oporem nici. W położeniu M_1 opór nici równoważy jedynie składową M_1A ciężaru, druga składowa $M_1B_1 = Q\sin\alpha$ powodować będzie ruch jego w kierunku położenia początkowego. Temu ruchowi towarzyszy zmniejszanie się nabytej przy przejściu do M_1 energii potencjalnej $\Delta E = Q \,.\, h.$

Jednocześnie wzrastać będzie energia ruchu punktu materialnego M, osiągając wartość największą w położeniu M_0, gdzie

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = Q \,.\, h. \tag{13}$$

Dzięki tej energii punkt materialny M nie zatrzyma się w położeniu równowagi, lecz będzie się poruszał dalej, przezwyciężając opór siły ciężkości, aż do punktu M_1' w którym jego energia ruchu stanie się równą zeru. Jeżeli w układzie nie ma oporów biernych, punkt materialny M podniesie się na tę samą wysokość, z jakiej spadał, i znowu pod działaniem składowej $M_1'B_2$ zacznie wracać do M_0. Taki ruch od M_1 do M_1' i z powrotem powtarzać się będzie nieograniczenie długo. W każdym punkcie toru na punkt materialny M działa siła $Q\sin\alpha$ gdzie α jest wielkością zmienną. Dla kątów α małych możemy przyjąć $\sin\alpha \doteq \alpha$ (znak równości z kropką u góry oznacza, że wielkości, związane tym znakiem, są jedynie w przybliżeniu równe) i założyć, że łuk $M_1M_0 = l\alpha$ różni się nieograniczenie mało od cięciwy $M_1O_1 = x$. Wtedy siła, działająca na punkt materialny M, wyrazi się wzorem

$$f = Q \,.\, \alpha = Q \cdot \frac{x}{l},$$

będzie więc proporcjonalna do odchylenia od położenia równowagi i skierowana stale ku niemu. Przy małych odchyleniach możemy przeto uważać ruch wahadła za ruch drgający harmonijny prosty. Ze wzoru

$$f = Q \cdot \frac{x}{l} = m \,.\, \frac{4\pi^2}{T^2}\,x$$

otrzymujemy na okres wahań

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{Q}}. \tag{13 a}$$

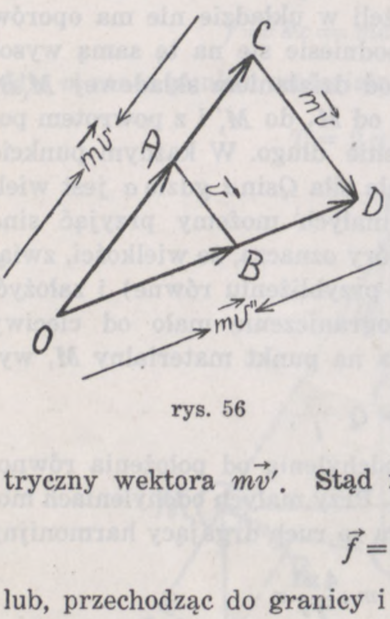
14. POPĘD (IMPULS) I ILOŚĆ RUCHU (PĘD)

W ust. 8 zaznaczyliśmy, że wynik działania siły możemy rozpatrywać również w związku z czasem, w którego ciągu ta

siła działa. Rozpatrzmy to działanie na prostym przykładzie pojedynczego punktu materialnego *M* o masie *m*, do którego przyłożona jest zmienna na ogół siła *f*. Przypuśćmy, jakeśmy to już niejednokrotnie czynili, że w ciągu bardzo krótkiego czasu Δt sek siłę tę można uważać za stałą i że w ciągu tego czasu prędkość punktu materialnego zmienia się od wartości $\vec{v}'$ do $\vec{v}''$, że więc

$$\vec{v}'' - \vec{v}' = \vec{v} = \vec{a}\Delta t = \frac{\vec{f}}{m}\Delta t.$$

Odłóżmy w kierunkach wektorów $\vec{v}'$ i $\vec{v}''$ (rys. 56) wektory *m* razy większe, $m\vec{v}'$ i $m\vec{v}''$, które nazwiemy **ilościami ruchu (pędami)** punktu materialnego *M*. Z podobieństwa trójkątów *OAB* i *OCD* wynika, że wektor $\vec{CD}$ jest *m* razy większy od wektora *AB*, że więc równy jest $m\vec{v} = m\vec{a}\,\Delta t = \vec{f}\Delta t$. Wektor ten, nazywany **impulsem (popędem)**, jest więc różnicą geometryczną wektorów $\vec{OD}$ i $\vec{OC}$



rys. 56

$$\vec{f}.\Delta t = m\vec{v}'' - m\vec{v}' = \Delta(m\vec{v}'), \quad \text{(a)}$$

gdzie znak Δ oznacza tym razem bardzo mały przyrost geometryczny wektora $m\vec{v}'$. Stąd na siłę chwilową $\vec{f}$ otrzymujemy

$$\vec{f} = \frac{\Delta(m\vec{v}')}{\Delta t} \tag{14}$$

lub, przechodząc do granicy i odrzucając znaczek przy $\vec{v}$,

$$\vec{f} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} \tag{14a}$$

Siła równa jest przyrostowi ilości ruchu punktu materialnego, odniesionemu do jednostki czasu, i posiada ten sam, co dany przyrost, kierunek. Działanie siły w ciągu skończonego czasu *t* otrzymamy, sumując działania elementarne $\vec{f}.\Delta t$. Ze wzoru (a) otrzymujemy

$$\Sigma\vec{f}.\Delta t = \Sigma\Delta\,(m\vec{v}).$$

Oznaczając sumę geometryczną impulsów przez $\vec{I}$ i uwzględniając, że, jak to łatwo można sprawdzić, $\Sigma\Delta(m\vec{v}) = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0$, gdzie $\vec{v}_0$ oznacza prędkość początkową, $\vec{v}_1$ — prędkość końcową punktu materialnego, możemy napisać

$$\vec{I} = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 \qquad (14\,b)$$

Suma geometryczna impulsów, udzielonych punktowi materialnemu *M*, równa jest przyrostowi jego ilości ruchu.

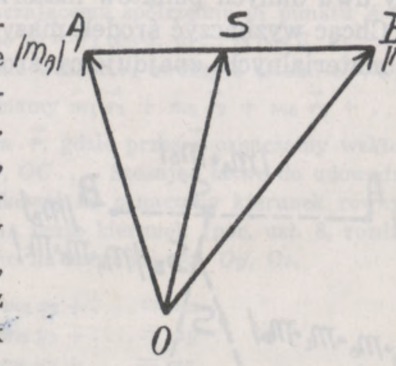
Wyprowadzenie wzoru (14) oparliśmy na wzorze $\vec{f} = m\vec{a}$, który w ust. 4 przyjęliśmy za wyraz drugiej zasady mechaniki. Moglibyśmy jednak postąpić i odwrotnie i uważać tak, jak to uczynił Newton, za wyraz drugiej zasady wzór (14). Wtedy, zakładając, że w ciągu czasu t siła $\vec{f}$ ma wartość i kierunek stały, oraz że masa punktu materialnego M nie zależy od prędkości jego ruchu, otrzymamy ze wzoru (14) wzór (2 a). Istotnie, mamy wtedy

$$\vec{f} \cdot t = m\vec{v}_t - m\vec{v}_0, \quad \text{skąd} \quad \vec{f} = m\,\frac{\vec{v}_t - \vec{v}_0}{t} = m\vec{a}.$$

Wzór (14) jest zatem, jak widzimy, ogólniejszy od wzoru (2 a). Termin ilości ruchu wprowadził do fizyki Kartezjusz (Descartes, 1596—1650), impulsu — Belanger (1847 r.).

15. ŚRODEK MASY UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH

Wzór (14) można, oczywiście, uogólnić na układ, złożony z wielu punktów materialnych. Zanim jednak do tego przystąpimy, wprowadzimy pewne nowe wielkości, które znacznie ułatwią nasze rozważania. Przypuśćmy, że mamy układ, złożony z dwu punktów materialnych, znajdujących się w punktach A i B (rys. 57), i oznaczmy ich masy przez m_A i m_B. Podzielmy odcinek AB na dwa odcinki AS i SB, których długości są w odwrotnym stosunku do mas punktów A i B, tak że



rys. 57

$$\frac{AS}{SB} = \frac{m_B}{m_A}, \qquad (15)$$

oraz połączmy punkty A, B, S z dowolnie wybranym punktem O. Wektory $m_A \cdot \vec{OA}$ i $m_B \cdot \vec{OB}$ nazywać będziemy **momentami mas** m_A i m_B względem punktu O, punkt zaś S — **środkiem masy** dwu danych punktów materialnych.

Załóżmy, że w punkcie S skupiliśmy sumę mas obydwu punktów, że więc $m_S = m_A + m_B$, i wyznaczmy sumę momentów obydwu mas. Wektor $\vec{OA}$ możemy uważać za sumę geometryczną $\vec{OS}$ i $\vec{SA}$, wektor $\vec{OB}$ — za sumę wektorów $\vec{OS}$ i $\vec{SB}$. Suma zatem momentów mas m_A i m_B

$$m_A\vec{OA} + m_B \cdot \vec{OB} = m_A(\vec{OS} + \vec{SA}) + m_B(\vec{OS} + \vec{SB}) =$$

$$= (m_A + m_B)\vec{OS} + m_A\vec{SA} + m_B\vec{SB}.$$

Wektor $\vec{SB}$, którego wartość, wyznaczona ze wzoru (15), wynosi $\frac{m_A}{m_B} SA$, ma kierunek przeciwny do kierunku wektora $\vec{SA}$, a więc

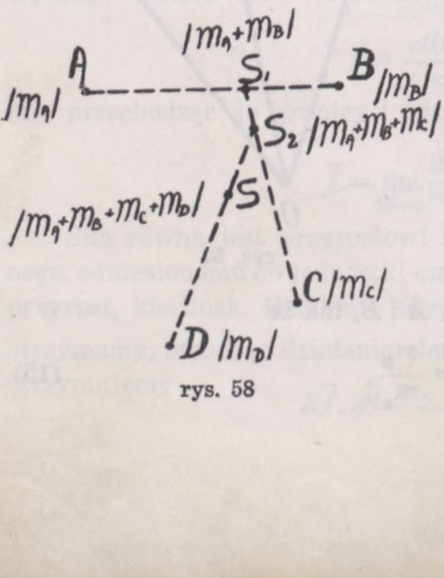
$$m_B\vec{SB} = -m_A\vec{SA}.$$

Wobec czego

$$m_A \cdot \vec{OA} + m_B\vec{OB} = (m_A + m_B)\vec{OS}. \tag{15a}$$

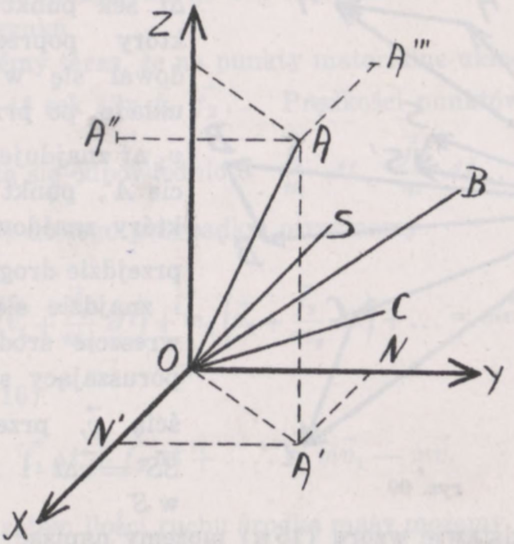
Suma momentów mas m_A i m_B względem dowolnego punktu O jest równa momentowi sumy tych mas, skupionych w środku masy dwu danych punktów materialnych.

Chcąc wyznaczyć środek masy układu, złożonego z n punktów materialnych, znajdujemy środek masy S_1 dwu jakichkolwiek punktów układu (rys. 58), następnie zaś, zakładając, że w punkcie S_1 skupiona jest suma mas tych dwu punktów, znajdujemy środek masy punktu materialnego S_1 i innego punktu materialnego układu itd. Można bez wielkiego trudu udowodnić, że i tym razem suma momentów poszczególnych mas jest równa momentowi ich sumy, skupionej w ich środku masy.



rys. 58

Niech punkt O będzie początkiem układu spółrzędnych; składowe wektora $\vec{OA} = \vec{r_1}$, w kierunku osi spółrzędnych równe są NA', ON i $A'A$ (rys. 59). Odcinek NA' równy jest odcinkowi $A'''A$, wyznaczającemu odległość punktu A od płaszczyzny ZOY, jest to więc spółrzędna x_1 punktu A (rozdz. I, ust. 2), podobnie odcinek ON równy



rys. 59

jest odcinkowi $A''A$, wyznaczającemu spółrzędną y_1 punktu A i wreszcie $A'A = z_1$. Mamy więc $x_1 = r_1 \cos\alpha$, $y_1 = r_1 \cos\beta$, $z_1 = r \cos\gamma$, gdzie α, β, γ są kątami, jakie wektor r_1 tworzy z osiami Ox, Oy, Oz. Zgodnie ze wzorem (15 a) mamy $m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2} + m_3 \vec{r_3} + \ldots = (m_1 + m_2 + m_3 \ldots)\, \vec{r} = m \,.\, \vec{r}$, gdzie przez $\vec{r}$ oznaczamy wektor $\vec{OS}$ przez $r_2, r_3 \ldots$ wektory OB, $OC \ldots$. Stosując łatwe do udowodnienia twierdzenie, że rzut wypadkowej na oznaczony kierunek równy jest sumie rzutów składowych na tenże kierunek (por. ust. 8, rozdz. II), otrzymamy, rzutując kolejno na kierunki Ox, Oy, Oz.

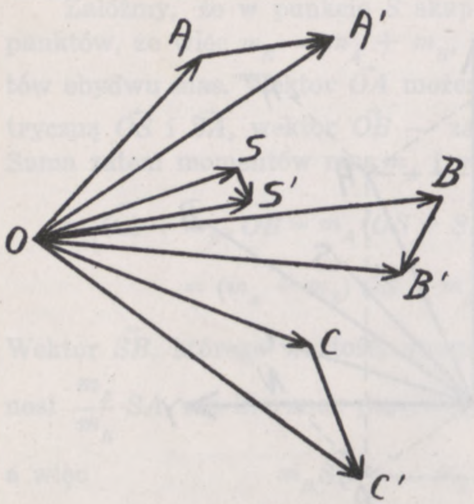
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots = mx$$
$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots = my$$
$$m_1 z_1 + m_2 y_2 + \ldots = mz$$

zastępując w ten sposób sumę geometryczną przez sumy algebraiczne składowych o tym samym kierunku.

Stąd $x = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots}{m} = \dfrac{\Sigma m_i x_i}{m}$; $y = \dfrac{\Sigma m_i y_i}{m}$; $z = \Sigma \dfrac{m_i z_i}{m}$. (15b)

16. RUCH ŚRODKA MASY UKŁADU. ZASADA ZACHOWANIA ILOŚCI RUCHU

Przypuśćmy, że mamy układ z n punktów materialnych, poruszających się z prędkościami odpowiednio równymi $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n$ (rys. 60). Po upływie Δt sek punkt materialny, który poprzednio znajdował się w punkcie A układu, po przejściu drogi $\vec{v}_1\,\Delta t$ znajduje się w punkcie A', punkt materialny, który znajdował się w B, przejdzie drogę $\vec{BB'} = \vec{v}_2 \Delta t$ i znajdzie się w B' itd., wreszcie środek masy S, poruszający się z prędkością $\vec{v}$, przejdzie drogę $\vec{SS'} = \vec{v}\Delta t$ i znajdzie się w S'.



rys. 60

Na podstawie wzoru (15 a) możemy napisać

$$m_1 \vec{OA} + m_2 \vec{OB} + m_3 \vec{OC} + \ldots. = $$
$$= (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots)\,\vec{OS} = m\,.\,\vec{OS}$$

jak również $m_1 \vec{OA'} + m_2 \vec{OB'} + m_2 \vec{OC'} + \ldots = m\,.\,\vec{OS'}$. (a)

Uwzględniając, że

$$\vec{OA'} = \vec{OA} + \vec{AA'} = \vec{OA} + \vec{v}_1 \Delta t;\ \vec{OB'} = \vec{OB} + \vec{v}_2 \Delta t \ldots,$$

możemy drugi z wzorów (a) przepisać w postaci

$$m_1 (\vec{OA} + \vec{v}_1 \Delta t) + m_2 (\vec{OB} + \vec{v}_2 \Delta t) + \ldots = m(\vec{OS} + \vec{v}\Delta t).$$

Odejmując wzór pierwszy i dzieląc przez Δt

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \ldots = m\vec{v}. \qquad (16)$$

Jeżeli więc przeniesiemy wektory ilości ruchów wszystkich punktów materialnych, stanowiących dany układ, do środka

masy i założymy, że w środku tym skupiona jest cała masa układu m, równa sumie mas punktów materialnych, ilość ruchu środka masy będzie sumą geometryczną ilości ruchu punktów układu. Gdy więc np. układ składa się z dwu punktów materialnych, poruszających się w kierunkach przeciwnych z prędkościami, odwrotnie proporcjonalnymi do ich mas, środek ich masy pozostaje w spoczynku.

Przypuśćmy teraz, że na punkty materialne układu działają w przeciągu Δt sek siły $\vec{f}_1, \vec{f}_2 \ldots$ Prędkości punktów materialnych zwiększą się odpowiednio o $\frac{\vec{f}_1}{m} \Delta t, \frac{\vec{f}_2}{m} \Delta t \ldots$ itd. Stosując wzór (16) do tego przypadku, otrzymamy

$$m_1\left(\vec{v}_1 + \frac{\vec{f}_1}{m_1}\Delta t\right) + m_2\left(\vec{v}_2 + \frac{\vec{f}_2}{m_2}\Delta t\right) + \ldots = m\vec{v}_1$$

Odejmując (16)

$$\vec{f}_1 \Delta t + \vec{f}_2 \Delta t + \ldots . = m\vec{v}_1 - m\vec{v}. \tag{17}$$

Zmianę zatem ilości ruchu środka masy możemy wyznaczyć, przenosząc do środka masy wszystkie impulsy, działające na punkty układu, i znajdując ich wypadkową; wypadkowa ta równa jest zmianie ilości ruchu środka masy, w którym wyobrażamy sobie skupioną całą masę układu.

W przypadku szczególnym, gdy układ jest odosobniony, $\vec{f}_1, \vec{f}_2 \ldots$ są siłami wewnętrznymi, jakimi działają wzajemnie na siebie punkty materialne stanowiące dany układ; siłom, wywieranym przez punkty materialne $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$ układu na punkt materialny A_n, odpowiadają w myśl trzeciej zasady mechaniki siły równe i przeciwnie skierowane, jakimi punkt materialny A_n działa na punkty materialne $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$. Podobnie siłom, wywieranym na punkt materialny A_{n-1} przez punkty materialne $A_1, A_2 \ldots A_{n-2}, A_n$, odpowiadają siły równe i przeciwnie skierowane, jakimi punkt materialny A_{n-1} działa na punkty $A_1, A_2 \ldots A_{n-2}, A_n$ itd. Jeżeli wszystkie te siły przeniesiemy do środka, wypadkowa ich zawsze będzie równa zeru. W układzie więc odosobnionym ilość ruchu

środka masy jest stała; środek masy albo jest w spoczynku, albo porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Ważne to twierdzenie, które nazywamy zasadą zachowania ilości ruchu środka masy, stosuje się zarówno do układów zachowawczych, jak i rozpraszających; w przytoczonym bowiem wyżej rozumowaniu nie uczyniliśmy żadnych założeń co do rodzaju sił działających.

Oto parę przykładów, wyjaśniających stosowanie tej zasady.

Na pocisk, wylatujący z lufy karabinowej lub armatniej, działa ciśnienie gazów, które wywiązały się przy wybuchu naboju w lufie. Uważając pocisk, nabój i lufę za jeden układ, musimy również uważać to ciśnienie za przejaw sił wewnętrznych, nie zmieniających ilości ruchu środka masy układu. Wobec tego wzrost ilości ruchu pocisku o $m_1 v_1$ musi pociągnąć za sobą równą i przeciwnie skierowaną zmianę ilości ruchu pozostałej części układu, w danym przypadku lufy (masę gazów pomijamy) tak, że mamy $m_2 v_2 = - m_1 v_1$ i $v_2 = - \frac{m_1}{m_2} v_1$. Lufa zatem przy wystrzale się cofa. Tę samą rolę, co pocisk w lufach, odgrywają gazy wybuchowe w rakietach: ich ruch wsteczny powoduje ruch naprzód całej rakiety.

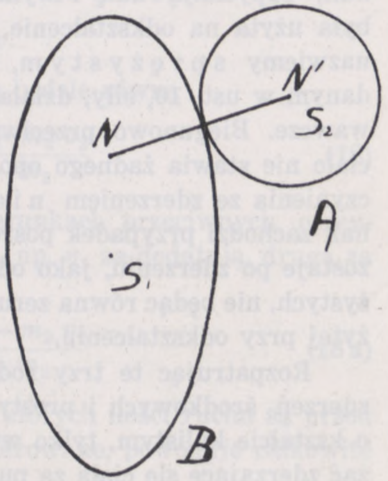
Podobnie, umieszczając wahadło na lekkim wózku, poruszającym się po podstawie ze znikomo małym tarciem, stwierdzimy, że każdemu wahnięciu wahadła odpowiada przesunięcie się wózka w przeciwnym kierunku. Człowiek, stojący na doskonale gładkiej poziomej powierzchni, nie może mimo wszelkich wysiłków posunąć się naprzód, chyba że np. wyjmie z kieszeni jakiś przedmiot i rzuci go w kierunku przeciwnym do tego, w jakim zamierza się poruszyć; nabytej przez ten przedmiot, stanowiący część tego samego układu, ilości ruchu towarzyszyć będzie powstanie równej i przeciwnie skierowanej ilości ruchu człowieka; środek bowiem masy człowieka i rzuconego przedmiotu zachowa położenie poprzednie, a więc takie, jakie miał wtedy, gdy przedmiot znajdował się w kieszeni.

W pozornej sprzeczności z zasadą zachowania ilości ruchu srodka masy znajdują się znane z codziennego doświadczenia fakty, zdające się stwierdzać w pewnych przypadkach całkowite znikanie ilości ruchu. Tak np. gdy kamień, spadając na błotnisty grunt, zagłębia się w nim i zatrzymuje, skłonni jesteśmy przy-

puszczać, że ilość ruchu, istniejąca poprzednio w układzie — kamień, ziemia, — bezpowrotnie została zniszczona; tak jednak nie jest: straconą przez kamień ilość ruchu zyskała ziemia, wobec jednak olbrzymiej różnicy mas kamienia i ziemi prędkość, nabyta przez ziemię, jest tak mała, że nie możemy jej zmierzyć najczulszymi nawet przyrządami. Podobnie zahamowaniu ruchu pociągu towarzyszy wzrost ilości ruchu ziemi.

17. ZDERZENIA PUNKTÓW MATERIALNYCH

Zasady zachowania energii i zachowania ilości ruchu środka masy zastosujemy do rozpatrzenia zjawiska zderzania się ciał. Gdy poruszające się ciało spotyka na swej drodze inne ciało, wtedy następuje zderzenie, którego kierunek wyznacza normalna NN' do powierzchni obydwu zderzających się ciał, wystawiona w punkcie ich zetknięcia. Gdy normalna ta przechodzi przez środek masy danego ciała, zderzenie nazywamy środkowym (centralnym); na rys. 61 zderzenie jest środkowe dla ciała *A*, dla ciała *B* — ekscentryczne. Rozróżniamy poza tym zderzenia proste, gdy normalna NN' ma kierunek prędkości, z jaką ciało się porusza, i zderzenia skośne, gdy kierunki normalnej i prędkości są różne. Zderzenie powoduje na ogół nie tylko zmianę prędkości zderzających się ciał, ale również i ich odkształcenie, które, zależnie od rodzaju zderzających się ciał, może pozostać trwałym albo też zniknąć, gdy ciała przestaną się stykać ze sobą. Tak np. kula ołowiana, opuszczona z pewnej wysokości na nieruchomą płytę stalową, odbije się od niej nieco spłaszczona, kula z kości słoniowej zachowa po odbiciu swój kształt kulisty tak, że o jej odkształceniu podczas zderzenia możemy wnioskować tylko pośrednio, na mocy np. następującego doświadczenia. Posmarujmy płytę, na którą spada kula, sadzą; po odbiciu zobaczymy na kuli czarną



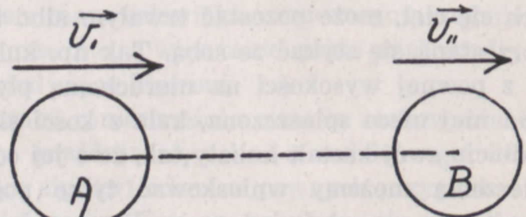
rys. 61

plamę, tym większą z im większej wysokości kula spadała. Zetknięcie zatem nastąpiło nie w jednym punkcie, lecz na pewnej powierzchni kuli, co jest niewątpliwym dowodem spłaszczenia się jej podczas zderzenia. Przebieg zjawiska możemy z gruba przedstawić sobie w sposób następujący. Odkształceniu ciała, spowodowanemu przez opór, jaki płyta stawia ruchowi kuli, towarzyszy powstanie sił wewnętrznych — sprężystości — w kuli, przeciwdziałających odkształceniu. Gdy prędkości kuli i płyty się zrównają (w danym przykładzie, gdy prędkość kuli stanie się równa zeru), odkształcenie przestanie wzrastać; wtedy siły sprężystości, działając w dalszym ciągu i przywracając poprzedni kształt kuli, odpychają kulę i wykonywają pracę, równą tej, jaka była użyta na odkształcenie. W tego rodzaju zderzeniu, które nazwiemy s p r ę ż y s t y m, możemy, zgodnie z określeniem, danym w ust. 10, siły, działające w układzie, uważać za zachowawcze. Biegunowo przeciwny przypadek zajdzie wtedy, gdy ciało nie stawia żadnego oporu odkształceniu; mamy wtedy do czynienia ze zderzeniem n i e s p r ę ż y s t y m. Zazwyczaj jednak zachodzi przypadek pośredni: część tylko odkształcenia pozostaje po zderzeniu, jako odkształcenie trwałe; praca sił sprężystych, nie będąc równa zeru, jest jednak mniejsza od pracy zużytej przy odkształceniu.

Rozpatrując te trzy rodzaje zderzeń, ograniczymy się do zderzeń środkowych i prostych, zachodzących między ciałami o kształcie kulistym, tylko wtedy bowiem będziemy mogli uważać zderzające się ciała za punkty materialne.

18. ZDERZENIA NIESPRĘŻYSTE

Przypuśćmy, że dwie doskonale niesprężyste kule poruszają się w tym samym kierunku z niejednakowymi prędkościami, przy



rys. 62

czym prędkość kuli tylnej jest większa; wobec tego w pewnej chwili kule te się zderzą (rys. 62). Ilość ruchu środka masy tych kul była przed zderzeniem wyznaczona, zgodnie ze wzorem (16), równaniem

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v$$

Po zderzeniu ta ilość ruchu pozostała bez zmiany, układ bowiem dwu kul możemy uważać za odosobniony, i siły, działające podczas zderzenia, za wewnętrzne; oznaczając więc przez v'_1 wspólną prędkość obydwu kul po zderzeniu i stosując jeszcze raz wzór (16), będziemy mieli

$$(m_1 + m_2)\, v'_1 = (m_1 + m_2)\, v, \text{ a przeto}$$

$$v'_1 = v.$$

Prędkość zatem v kul po zderzeniu będzie równa

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{18}$$

Gdy kule poruszają się w kierunkach przeciwnych, otrzymamy, uważając jedną z prędkości, np. v_1 za dodatnią, drugą za ujemną

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{18 a}$$

Zderzenie kul niesprężystych, których ilości ruchu są przed zderzeniem równe i przeciwnie skierowane, powoduje całkowite ich zatrzymanie.

Gdy $v_2 = 0$ $$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \tag{18 b}$$

Zastosujmy ten wzór do omawianego w poprzednim ustępie przykładu ciała, spadającego na ziemię, i załóżmy, że ciałem tym jest meteor. Niech masa jego wynosi 1 tonnę $= 10^3$ kg $= 10^6$ g, prędkość, z jaką dobiega do ziemi, 100 km/sek $= 10^7$ cm/sek (prędkość meteorów na granicy atmosfery waha się w granicach od 10 km/sek do 100 km/sek, w przykładzie naszym bierzemy zatem górną granicę prędkości). Masa ziemi równa jest mniej więcej 6.10^{27} g (rozdz. IV, ust. 5). Podstawiając te dane do wzoru (18 b), otrzymamy na wspólną prędkość ziemi i meteoru w kierunku początkowej prędkości meteoru

$$v = \frac{10^6 . 10^7}{10^6 + 6 . 10^{27}}$$

i, odrzucając w mianowniku liczbę 10^6 jako bardzo małą w porównaniu z następną,

$$v = \frac{10^{13}}{6 \cdot 10^{27}} = 1{,}3 \cdot 10^{-15}\ \text{cm/sek} = 1{,}3 \cdot 10^{-7}\ \text{Å/sek}$$

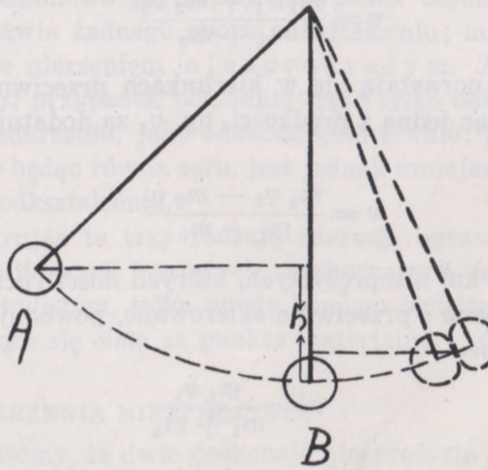
a więc wartość, której najczulsze przyrządy nie mogłyby zmierzyć.

W przeciwieństwie do ilości ruchu energia mechaniczna tego układu rozpraszającego, występująca tutaj jako energia ruchu, nie zachowuje wartości stałej. Zmniejszenie jej wyznacza wzór

$$L_0 - L_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - v^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - v^2) = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \qquad (19)$$

Niech np. A i B będą kulami z wilgotnej gliny, zawieszonymi na niciach jednakowej długości (rys. 63). Kula A, spada-



rys. 63

jąc z wysokości h, posiada, zderzając się z kulą B, prędkość $v_1 = \sqrt{\frac{2Qh}{m_1}}$ (wzór (13), ust. 13). Energia ruchu obydwu kul po zderzeniu

$$L_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2} \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2},$$

gdy $v_2 = 0$ $\qquad L_1 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2}{m_1 + m_2}.$

Jeżeli masy obydwu kul są równe

$$L_1 = \frac{1}{4} m_1 v_1^2 = \frac{1}{4} 2Q \cdot h = 2Q \cdot \frac{h}{4}.$$

Kule po zderzeniu podniosą się na wysokość $\frac{h}{4}$.

Często dogodniej jest używać zamiast prędkości v_1 i v_2, wyznaczanych względem jakiegoś układu dowolnego (np. ziemi), prędkości φ_1 i φ_2, wyznaczanych względem środka masy układu, a raczej względem osi spółrzędnych, związanych ze środkiem masy.

Przed zderzeniem

$$\varphi_1 = v_1 - v = v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

$$\varphi_2 = v_2 - v = v_2 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \tag{18c}$$

Po zderzeniu $\varphi'_1 = \varphi'_2 = 0$.

Ubytek zatem energii ruchu, zachodzący podczas zderzenia, wyniesie

$$L'_0 - L'_1 = \frac{1}{2} m_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \varphi_2^2. \tag{19a}$$

Podstawiając zamiast φ_1 i φ_2 znaczenia ich ze wzoru (18 c), otrzymamy wzór (19).

Suma ilości ruchu kul względem ich środka masy jest zarówno przed zderzeniem, jak i po nim równa zeru, środek bowiem masy ma w tym nowym układzie zawsze prędkość zero.

19. ZDERZENIE SPRĘŻYSTE

Gdy zderzające się kule są doskonale sprężyste, prędkości ich po zderzeniu nie są równe. Stosując i tym razem zasadę zachowania ilości ruchu środka masy, otrzymamy równanie

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2,$$

gdzie v_1 i v_2 oznaczają prędkości kul przed zderzeniem, v'_1 i v'_2 — prędkości kul po zderzeniu. To równanie nie wystarcza do wyznaczenia dwu wielkości niewiadomych v'_1 i v'_2. W tym jednak przypadku możemy zastosować również i zasadę zachowania energii mechanicznej, ten bowiem układ jest, jak o tym była mowa w ust. 17, układem zachowawczym. Mamy zatem

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2.$$

Przepiszmy te równania w postaci

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)$$
$$\frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - v'^2_1) = \frac{1}{2} m_2 (v'^2_2 - v_2^2) \tag{a}$$

stąd po podzieleniu drugiego równania przez pierwsze i po skróceniu przez $\frac{1}{2}$

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2.$$

Z tego równania i z pierwszego z równań (a) otrzymujemy

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$
$$v'_2 = \frac{2 m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}. \tag{20}$$

W przypadku, gdy kierunki prędkości kul są przeciwne, we wzorach (20) zmieniamy na przeciwny znak tej prędkości, którą uważamy za ujemną.

Gdy $m_1 = m_2$

$$v'_1 = v_2 \text{ i } v'_2 = v_1. \tag{20 a}$$

kule zamieniają się prędkościami.

Gdy $v_2 = 0$

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1;\; v'_2 = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \tag{20 b}$$

Niech $m_1 \ll m_2$. (Znak podwójnej nierówności oznacza, że m_1 jest znacznie mniejsze od m_2). Dzieląc licznik i mianownik (20 b) przez m_2 i przyjmując, że $\frac{m_1}{m_2} \doteq 0$, otrzymujemy

$$v'_1 = -v_1;\; v'_2 = 0. \tag{20 c}$$

Kula o masie mniejszej odskakuje z tą samą prędkością, jaką miała przed zderzeniem, zmienia się jedynie kierunek prędkości na odwrotny; masa większa pozostaje w spoczynku.

Jest to przypadek, rozpatrywany w ust. 17: kula z kości słoniowej, spadając na płytę stalową, odbija się od niej, i gdyby istotnie obydwa ciała były doskonale sprężyste, podniosłaby się na tę samą wysokość, z jakiej spadła. W rzeczywistości podnosi się na wysokość mniejszą. Gdy ciałem, na które spada, jest płyta marmurowa, wysokość po odbiciu jest, jak to stwierdził doświadczalnie Dupré, dla niewielkich wartości h (do 20 cm) równa 0,8 h.

Gdy odwrotnie $m_1 \gg m_2$, otrzymujemy, dzieląc (20 b) przez m_1 i przyjmując, że $\frac{m_2}{m_1} \doteq 0$

$$v'_1 = v_1 \qquad v'_2 = 2v_1. \tag{20 d}$$

Największa zatem prędkość, jaką może ciało o wielkiej masie udzielić przez zderzenie ciału o masie małej, równa jest podwójnej prędkości ciała uderzającego.

Biorąc za układ odniesienia układ, związany ze środkiem masy, i oznaczając przez φ_1 i φ_2 prędkości kul względem środka masy przed zderzeniem, przez φ'_1 i φ'_2 — po zderzeniu, mamy (patrz. ust. 18)

$$m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 = 0 \tag{a}$$

$$m_1\varphi'_1 + m_2\varphi'_2 = 0 \tag{b}$$

i wobec tego, że układ jest zachowawczy

$$\frac{1}{2}m_1\varphi_1^2 + \frac{1}{2}m_2\varphi_2^2 = \frac{1}{2}m_1\varphi_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\varphi_2'^2. \tag{c}$$

Podstawiając do równania (c) wartości φ_2 i φ'_2 z równań (a) i (b), znajdujemy, że $\varphi'_1 = \pm\varphi_1$. Znak + odpowiada przypadkowi, gdy kule poruszają się stale z tą samą prędkością, gdy więc nie ma zderzenia; gdy zderzenie zachodzi, mamy $\varphi'_1 = -\varphi_1$. Podobnie znajdziemy $\varphi'_2 = -\varphi_2$.

20. ZDERZENIA NIEDOSKONALE SPRĘŻYSTE

Rozpatrywane przez nas przypadki są przypadkami granicznymi. Jak o tym była już mowa w ust. 17, pospolicie nie mamy do czynienia ani z ciałami doskonale sprężystymi, ani z ciałami doskonale niesprężystymi. Prędkość względna jednej kuli względem drugiej, która w przypadku zderzenia niesprężystego staje się po zderzeniu równą zeru (kule poruszają się z jednakową prędkością), w przypadku zaś zderzenia sprężystego zachowuje tę samą wartość, co poprzednio, zmieniając jedynie swój kierunek (przed zderzeniem $\psi = v_1 - v_2$, po zderzeniu

$$\psi' = v'_1 - v'_2 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2 - 2m_1v_1 - (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} = -\psi)$$

w przypadkach, z jakimi się spotykamy w rzeczywistości, zachowuje po zderzeniu pewien ułamek poprzedniej wartości. Mamy zatem

$$\psi' = v'_1 - v'_2 = -\varepsilon\psi = -\varepsilon(v_1 - v_2),$$

gdzie $0 < \varepsilon < 1$. Z zasady zachowania ilości ruchu wynika

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2.$$

Z tych dwu równań znajdujemy

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{(m_1 - \varepsilon m_2)\, v_1 + (1+\varepsilon)\, m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ v'_2 &= \frac{(m_2 - \varepsilon m_1)\, v_2 + (1+\varepsilon)\, m_1 v_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{21}$$

kładąc $\varepsilon = 0$, otrzymujemy wzory (18), kładąc $\varepsilon = 1$, wzory (20). Stratę energii ruchu znajdziemy, obliczając różnicę

$$L_0 - L_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2.$$

Po podstawieniu zamiast v'_1 i v'_2 wartości, wyznaczonych przez wzory (21), i po dokonaniu odpowiednich przeróbek, otrzymamy

$$L_0 - L_1 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - \varepsilon^2)(v_1 - v_2)^2. \tag{22}$$

Oznaczając stratę energii w zderzeniu niesprężystym przez ΔL_n, możemy napisać na mocy wzoru (19)

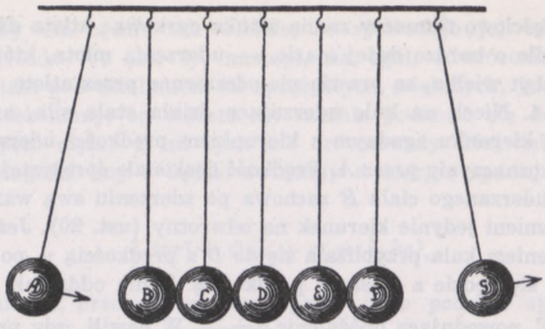
$$L_0 - L_1 = (1 - \varepsilon^2) \Delta L_n \quad \text{lub} \quad \Delta L_n - (L_0 - L_1) = \varepsilon^2 \Delta L_n.$$

Te same wzory możemy również stosować, jak to wykazał Voigt, i w przypadku, gdy ciałami zderzającymi się są walce z jednakowego materiału, o jednakowej długości i jednakowym przekroju, oczywiście, przy zachowaniu podstawowego warunku, aby zderzenia były środkowe i proste. Gdy rozmiary walców są różne, zjawisko staje się o wiele bardziej zawiłe, prędkość ciała uderzonego zależy wtedy od stosunku długości tego ciała do długości ciała uderzającego.

20 a) PRZYPADKI SZCZEGÓLNE

1. Przypuśćmy, że kula druga, będąca początkowo w spoczynku, po wprawieniu jej w ruch przez kulę pierwszą, zderza się następnie z nieruchomą początkowo kulą trzecią, która znów zderza się z kulą czwartą itd. Zakładając, że kule są doskonale sprężyste i że posiadają jednakowe masy, znajdujemy, stosując kolejno do wszystkich kul wzór (20 b), w którym prędkość kuli uderzonej stale przyjmujemy za równą zeru, że prędkość ostatniej z uderzonych kul równa jest prędkości pierwszej kuli uderzającej i że wszystkie kule z wyjątkiem ostatniej pozostaną po zderzeniu w spoczynku.

Ten wniosek można sprawdzić przy pomocy przyrządu Mariotte'a (rys. 64). Gdy kula A, spadając z wysokości h, uderzy kulę B, ta zaś kulę C, która znów zderzy się z kulą D itd., ostatnia kula G odskoczy na wysokość równą mniej więcej h, wszystkie zaś pozostałe kule, nie



rys. 64

wyłączając pierwszej, pozostaną bez ruchu. Gdy spadną dwie kule A i B, odskoczą dwie ostatnie kule F i G itd.

2. Przypuśćmy teraz, że mamy trzy kule o masach niejednakowych i niech np. masa kuli pierwszej m_1 jest większa od masy kuli ostatniej m_3. Gdy masa kuli środkowej m_2, znajdującej się przed zderzeniem, podobnie jak i kula trzecia, w spoczynku, zawarta jest w granicach m_1 i m_3 tak, że mamy

$$m_1 > m_2 > m_3,$$

prędkość, jaką otrzymuje po zderzeniu kula trzecia, jest większa od tej, jaką by jej nadała kula pierwsza, uderzając ją bezpośrednio z tą samą prędkością. Oznaczmy przez v_1 prędkość kuli pierwszej przed zderzeniem, przez v'_2 — prędkość kuli drugiej po zderzeniu, przez v'_3 — prędkość, jakiej nabywa kula trzecia, uderzona bezpośrednio przez kulę pierwszą, przez v''_3 — prędkość, jakiej nabywa za pośrednictwem kuli drugiej. Ze wzorów (20 b) otrzymujemy:

$$v'_3 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_3} \qquad v'_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \qquad v''_3 = \frac{2m_2 v'_2}{m_2 + m_3} = \frac{4m_1 m_2 v_1}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}$$

skąd otrzymujemy

$$v''_3 - v'_3 = \frac{4m_1 m_2 v_1}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)} - \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_3} =$$

$$= \frac{2m_1 (m_1 - m_2)(m_2 - m_3)}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)(m_3 + m_1)} v_1 > 0,$$

gdyż mianownik jest wielkością zawsze dodatnią, w liczniku zaś wobec założenia, że $m_2 < m_1$ i $m_3 < m_2$, wszystkie trzy czynniki są dodatnie. Można dowieść, że największą różnicę prędkości otrzymamy, gdy $\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_2}{m_3}$. Niech np. $m_1 = 8$ g, $m_2 = 4$ g, $m_3 = 2$ g, $v_1 = 10$ cm/sek, $v'_3 = \frac{16.10}{10} = 16$ cm/sek i $v''_3 = \frac{128.10}{72} = \frac{160}{9} \doteq 18$ cm/sek.

3. Odwrotny przypadek zachodzi, gdy masa m_2 jest większa od m_1 i m_3. Przyjmijmy, że $m_1 = 1$ g, $m_2 = 100$ g, $m_3 = 20$ g, $v_1 = 20$ cm/sek. Mamy wtedy $v'_3 = \frac{2.20}{21} = 1{,}9$ cm/sek ; $v''_3 = 0{,}67$ cm/sek. Tym

się częściowo tłumaczy znana sztuka cyrkowa: atleta dźwiga na sobie kowadło o bardzo dużej masie, — uderzenia młota, którego masa nie jest zbyt wielka, są prawie nie odczuwane przez atletę.

4. Niech na kulę uderzającą działa stała siła, np. siła ciężkości, o kierunku zgodnym z kierunkiem prędkości uderzającego ciała, które oznaczymy przez A. Prędkość doskonale sprężystej kuli A względem uderzanego ciała B zachowa po zderzeniu swą wartość poprzednią, zmieni jedynie kierunek na odwrotny (ust. 20). Jeżeli więc przed zderzeniem kula przybliżała się do B z prędkością ψ, po zderzeniu oddalać się będzie z tą samą prędkością. Temu oddaleniu przeciwdziała siła F, powodująca opóźnienie $a = \frac{F}{m_A}$. W chwili, gdy prędkość A stawać się będzie równa zeru, co nastąpi, gdy $\psi - at_1 = 0$, a więc, gdy $t_1 = \frac{\psi}{a}$, oddalenie będzie największe i wyniesie $s_1 = \psi t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{a}$. Siła F zacznie wtedy przybliżać ruchem jednostajnie przyspieszonym kulę A do B; zderzenie nastąpi, gdy droga przebyta równa będzie s_1. Jak łatwo się przekonać, nastąpi to po upływie $t_2 = t_1$ sek. Prędkość względna ciała A będzie w chwili tego drugiego zderzenia taka sama, jak w chwili zderzenia pierwszego, zjawisko zatem się powtórzy i powtarzać będzie periodycznie co $T = t_1 + t_2 = \frac{2\psi}{a}$ sek. W przypadku ciał niedoskonale sprężystych prędkość względna kuli A będzie po zderzeniu równa $-\varepsilon\psi$, gdzie $0 < \varepsilon < 1$. Największe oddalenie kuli A do B po pierwszym odbiciu równe będzie $\frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2\psi^2}{a}$, czas między pierwszym i drugim zderzeniem $\frac{2\varepsilon\psi}{a}$, po drugim odbiciu — $s_2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^4\psi^2}{a}$, czas między drugim i trzecim zderzeniem $\frac{2\varepsilon^2\psi}{a}$, zderzenia więc będą coraz częstsze, kula A będzie coraz to mniej oddalała się od B.

5. Z zagadnieniami, rozpatrywanymi w ustępach poprzednich, wiąże się również i zagadnienie następujące.

Do zwiniętej liny, w jednym końcu przymocowanej, przywiązane jest na drugim końcu ciało o ciężarze Q. Ciało to i lina leżą na podstawie, znajdującej się na pewnej wysokości h nad ziemią. W pewnej chwili podstawę usuwamy i ciało zaczyna spadać, pociągając za sobą linę, której ciężar uważamy za mały w porównaniu z ciężarem Q. Dopóki lina się nie wyprostuje, ciało spada tak, jak gdyby było całkowicie swobodne. Od chwili jednak wyprostowania się liny dalsze jego spadanie możliwe jest tylko przy rozciąganiu się liny, powodującym powstawanie w linie sił sprężystych, przeciwdziałających dalszemu ruchowi. Gdy nabyta wskutek spadania energia ruchu ciała zużyje się całkowicie na pokonanie oporu sił sprężystości, wzrastających proporcjonalnie do wzrostu długości liny, wtedy, o ile na-

pięcie liny nie będzie tak wielkie, że spowoduje jej odkształcenie trwałe (rozdz. V, ust. 6), nastąpi, na ogół, odwrócenie kierunku ruchu; ciało pod działaniem sił sprężystych, większych, jak się o tym zaraz przekonamy, od ciężaru Q, zacznie podnosić się do góry dopóty, dopóki ciężar Q sił tych nie zrównoważy. Największy zatem wzrost długości liny s będzie związany z energią spadającego ciała wzorem

$$\frac{1}{2} mv^2 = Q(h+s) = \frac{1}{2} ks^2,$$

gdzie h droga, przebyta pionowo przez ciało podczas spadania do chwili wyprostowania się liny; $\frac{1}{2} ks^2$ — praca przeciwko oporowi sił sprężystych (patrz ust. 13).

Wtedy siły sprężyste F osiągną wartość największą

$$Q(h+s) = \frac{1}{2} ks \,.\, s = \frac{1}{2} F \,.\, s \quad \text{i stąd} \quad F = 2Q\frac{h+s}{s}.$$

Im bardziej zatem wzrasta długość liny w porównaniu z wysokością h, tym F, równe napięciu liny, jest mniejsze. Można to osiągnąć, albo używając liny o możliwie małym spółczynniku k (np. kauczukowej), albo biorąc liny dostatecznie długie, wzrost bowiem długości jest, jak o tym później będzie mowa (rozdz. V, ust. 2), proporcjonalny do długości początkowej. Najmniejsze napięcie otrzymamy, gdy $h = 0$, tzn. gdy lina od początku jest wyprostowana i tylko ciało Q umieszczone jest na podstawie; wtedy $F = 2Q$.

21. RUCH PUNKTU MATERIALNEGO WZGLĘDEM PORUSZAJĄCEGO SIĘ UKŁADU

a) RUCH UKŁADU JEDNOSTAJNY PROSTOLINIOWY

Z wywodów ust. 6, rozdz. I wynika, że punkt materialny, poruszający się ze stałą prędkością względem pewnego układu odniesienia A, poruszać się będzie również ruchem prostoliniowym jednostajnym (z inną, oczywiście, prędkością) względem układu B, względem którego A porusza się z prędkością niezmienną co do kierunku i wartości. Układy A i B będą zatem mechanicznie równoważne. Przyspieszenie, jakie dowolna siła udzieli danemu punktowi, będzie miało tę samą wartość zarówno w jednym, jak i drugim układzie odniesienia. Istotnie, niech stała prędkość układu A względem B będzie równa $\vec{v}_1$, prędkość początkowa punktu materialnego względem A — $\vec{v}_0$, prędkość początkową $\vec{v}'_0$ względem układu B, znajdziemy ze wzoru (rozdz. I, ust. 6)

$$\vec{v}'_0 = \vec{v}_0 + \vec{v}_1. \qquad \text{(a)}$$

Siła $\vec{f}$ udziela punktowi materialnemu przyspieszenia względem A równego $\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m}$ po upływie więc Δt sek prędkość jego wzrośnie o $\vec{a}\,\Delta t = \frac{\vec{f}}{m}\Delta t$. Prędkość jego względem układu B będzie

$$\vec{v}''_0 = \vec{v}_0 + \frac{\vec{f}}{m}\Delta t + \vec{v}_1$$

stąd przyrost prędkości względem układu B wyniesie

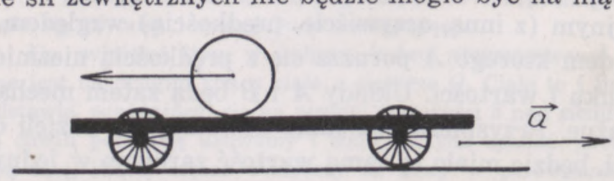
$$\vec{v}''_0 - \vec{v}'_0 = \frac{\vec{f}}{m}\Delta t,$$

a więc równy będzie przyrostowi prędkości względem układu A. Obserwator przeto, związany stale z układem A, otrzyma z pomiaru przyspieszenia tę samą wartość siły działającej na dany punkt materialny, co obserwator, związany stale z układem B.

Ten wniosek jest słuszny o tyle, o ile słuszny jest wzór (a), a więc o ile prędkości nie przekraczają granic, o których była mowa w ust. 6, rozdz. I.

b) RUCH UKŁADU PROSTOLINIOWY NIEJEDNOSTAJNY

Inaczej jednak bedzie, gdy układ A porusza się względem układu B ruchem niejednostajnym. Przypuśćmy, że na wózku o doskonale gładkiej powierzchni leży kula, będąca względem wózka w spoczynku. Nadajmy wózkowi (układ A) przyspieszenie $\vec{a}$ względem ziemi (układ B), działając na niego pewną siłą. Kula, leżąca na wózku, żadnego przyspieszenia nie dozna, gdyż wobec tego, że siły tarcia są, zgodnie z założeniem, równe zeru, działanie sił zewnętrznych nie będzie mogło być na nią przenie-



rys. 65

sione, zachowa więc względem ziemi to samo położenie, co poprzednio, względem wózka jednak poruszy się z przyspieszeniem $-\vec{a}$ (rys. 65). Dla obserwatora, związanego z wózkiem (układem A), kula będzie się tak poruszała, jak gdyby działała na

nią siła $\vec{f} = -m\vec{a}$, gdzie m — masa kuli, o kierunku przeciwnym do kierunku siły zewnętrznej, działającej na wózek. Siłę tę, którą nazwiemy s i ł ą b e z w ł a d n o ś c i, będzie mógł obserwator A zmierzyć w ten sam sposób, w jaki zazwyczaj mierzy się siłę.

Nazwa siły bezwładności, jaką nadaliśmy tej sile, nie jest ogólnie przyjęta; w różnych podręcznikach fizyki termin: „siła bezwładności" posiada różne na ogół znaczenia.

A więc obserwator chcąc siłę tę zrównoważyć, tzn. utrzymać kulę w spoczynku względem wózka, będzie musiał działać na nią siłą równą i przeciwnie skierowaną, co z punktu widzenia obserwatora, stojącego na ziemi (układ B), nie będzie bynajmniej zrównoważeniem nieistniejącej według niego siły, lecz nadaniem kuli tego samego przyspieszenia, jakie ma wózek. Podobnie ciśnienie, jakie kula będzie wywierała na umocowaną na wózku ściankę C, będzie dla obserwatora A dowodem istnienia siły, z jaką kula ciśnie na C, dla obserwatora zaś B stwierdzać będzie przenoszenie na kulę przez tę ściankę działania siły zewnętrznej. Gdy na wózku leży więcej kul o masach $m_1, m_2, \ldots$, każda z nich dozna względem wózka tego samego przyspieszenia $-\vec{a}$, ruch zatem tych kul względem układu A zachodzić będzie tak, jak gdyby na nie działały siły proporcjonalne do ich mas.

Tym się tłumaczą zjawiska takie np., jak wzrost ciśnienia, wywieranego na podłogę windy przez znajdujące się w niej ciała, przy ruszaniu windy w górę. Wtedy bowiem prócz ciężaru działa na podłogę windy siła bezwładności $\vec{f} = -m\vec{a}$, gdzie $\vec{a}$ przyspieszenie windy, skierowane do góry. Odwrotnie, gdy winda rusza na dół, ciśnienie na podłogę zmniejsza się o wielkość $m\vec{a}$, jak gdyby ciężar ciała uległ zmniejszeniu. Gdyby winda spadała z przyspieszeniem g (rozdz. IV, ust. 4), ciała w niej się znajdujące nie cisnęłyby wcale na podłogę tak, że obserwator A, znajdujący się w windzie, mógłby stąd wnioskować o chwilowym zniknięciu siły ciężkości. Obserwator B, względem którego winda posiada przyspieszenie g, wyciągnie stąd ważny wniosek, o którym będzie mowa w rozdz. IV, że zarówno winda, jak i znajdujące się w niej ciała, spadają pod działaniem siły ciężkości z jednakowym przyspieszeniem.

Potwierdzeniem tych wniosków mogą być dwa następujące doświadczenia. W dużej, hermetycznie zamkniętej skrzyni umieszczamy zapaloną świecę; podczas swobodnego spadku z pewnej wysokości na miękką podstawę świeca gaśnie; ustaje bowiem podczas spadania krążenie powietrza w skrzyni, konieczne dla odnowienia zapasu tlenu w warstwie, bezpośrednio otaczającej świecę.

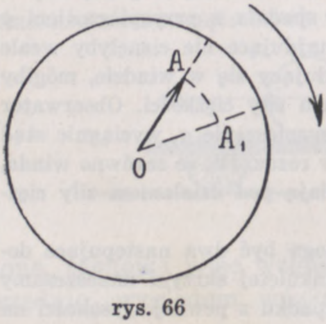
Gdy rurkę kształtu litery U napełnimy wodą tak, aby poziom jej w obydwu ramionach nie był jednakowy (co można osiągnąć, zatykając palcem podczas nalewania jeden z górnych otworów rurki), i pozwolimy jej swobodnie spadać (odkrywając jednocześnie przykryty poprzednio otwór), różnica poziomów pozostanie podczas spadania bez zmiany (Diesselhorst).

c) RUCH OBROTOWY UKŁADU: 1. PUNKT MATERIALNY W SPOCZYNKU WZGLĘDEM DANEGO UKŁADU

W przypadku, gdy układ znajduje się w jednostajnym ruchu obrotowym, przyspieszenia różnych jego punktów są na ogół różne. Wartość i kierunek siły bezwładności zależne będą zatem od chwilowego położenia ciała w układzie. W punkcie, odległym o r od osi obrotu i poruszającym się względem układu nieruchomego z przyspieszeniem dośrodkowym $\frac{v^2}{r} = \omega^2 r$, siła bezwładności, działająca na umieszczoną tam kulę, równa będzie $m\omega^2 r$ i skierowana od osi ku zewnątrz; stąd nazwa odśrodkowej siły bezwładności, jaką jej nadajemy. Obserwator związany z obracającym się układem i chcący utrzymać dane ciało w spoczynku względem układu, będzie musiał działać na nie siłą równą i przeciwnie skierowaną.

2. PUNKT MATERIALNY, PORUSZAJĄCY SIĘ WZGLĘDEM UKŁADU

Gdy ciało porusza się względem układu, oprócz siły odśrodkowej należy uwzględnić jeszcze jedną siłę bezwładności, której wielkość otrzymujemy z następujących rozważań. Przypuśćmy, że na tarczy, obracającej się ruchem jednostajnym, znajduje się kula, poruszająca się ze stałą prędkością $\vec{v}$, prostopadłą do osi obrotu. Gdyby tarcza była nieruchoma, kula po upływie Δt sek $= \frac{r}{v}$ doszłaby z punktu O do punktu A tarczy, odległego o r od osi (rys. 66). Na skutek jednak ruchu obrotowego punkt A przeszedł do A_1, przebywając drogę



rys. 66

$$r\omega \cdot \Delta t = v\omega\Delta t^2$$

kula więc, dochodząc do miejsca, gdzie początkowo znajdował się punkt A, pozornie odchyla się od początkowego kierunku swego

ruchu. W odniesieniu więc do tarczy ruch kuli zachodzi tak, jak gdyby na kulę działała siła, skierowana przeciwnie do kierunku ruchu obrotowego tarczy i prostopadła do wektora $\vec{v}$. Ponieważ droga, przebyta pod działaniem tej siły, wynosi $v\omega.\Delta t^2$, przyspieszenie udzielone przez nią kuli, równe jest

$$a_c = \frac{2s}{\Delta t^2} = 2v\omega. \qquad (23)$$

Przyspieszenie to nazywamy *przyspieszeniem Coriolisa*, siłę zaś bezwładności $f_c = ma_c = 2mv\omega$ *siłą Coriolisa* od nazwiska fizyka, który pierwszy wyprowadził (1835 r.) wzór (23).

Gdybyśmy chcieli, aby prędkość $\vec{v}$ poruszającej się kuli zachowała stale ten sam kierunek w poruszającym się układzie, musielibyśmy działać na nią siłą, równą i przeciwnie skierowaną do siły f_c. Przypuśćmy np., że kula porusza się wzdłuż deseczki, mającej kierunek OA i obracającej się razem z tarczą. Deseczka podlega ze strony kuli działaniu siły f_c, skierowanej w stronę przeciwną do obrotu tarczy; dla obserwatora nieruchomego działanie to jest przeciwdziałaniem ze strony kuli, której obracająca się deseczka udziela przyspieszenia $2v\omega$ w tym samym kierunku, w jakim obraca się tarcza.

Gdy prędkość punktu materialnego tworzy z osią obrotu nie kąt prosty, lecz jakikolwiek dowolny kąt α, przyspieszenie Coriolisa wyraża się wzorem $2v\omega\sin\alpha$. Przyspieszenie to jest prostopadłe do płaszczyzny, równoległej do osi obrotu i przechodzącej przez wektor prędkości $\vec{v}$, i skierowane tak, aby śruba, wkręcana w tym samym kierunku i złączona sztywnie z wektorem $\vec{v}$, doprowadzała go przy obrocie o kąt mniejszy (lub równy) od 180° do zetknięcia się z wektorem $\vec{\omega}$, odłożonym (rozdz. I, ust. 14) na osi obrotu.

Używając znakowania rachunku wektorowego, możemy napisać, że

$$\vec{f_c} = 2m\,[\vec{v}\,\vec{\omega}].$$

Z rozważań powyższych wynika, że przy wyznaczaniu ruchów punktów materialnych względem układów, poruszających się ruchem niejednostajnym względem innego układu B (którym jest zazwyczaj układ inercyjny), musimy do wzorów wprowadzić oprócz tych sił,

które wyznaczały ruch danego punktu względem układu *B*, jeszcze siły dodatkowe, nazwane przez nas siłami bezwładności. Siły te w przypadku układu, poruszającego się przyspieszonym ruchem prostoliniowym, są proporcjonalne do mas ciał, na które według założenia działają i którym udzielają przyspieszenia równego i przeciwnie skierowanego do przyspieszenia układu; w przypadku ruchu obrotowego wyrażają się wyprowadzonymi wyżej wzorami i noszą nazwy siły odśrodkowej i siły Coriolisa.

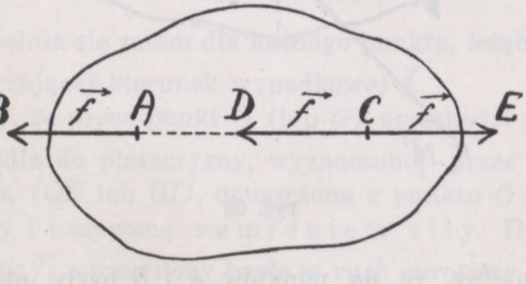
ROZDZIAŁ III

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

1. SKŁADANIE SIŁ, DZIAŁAJĄCYCH NA BRYŁĘ SZTYWNĄ. MOMENT SIŁY

Twierdzenia dotyczące ruchu układu punktów materialnych, stosują się również i do ruchu dowolnej bryły, którą wyobrażamy sobie wtedy podzieloną na tak małe elementy objętości, aby można je było uważać za punkty materialne. W przypadku jednak, gdy otrzymany w ten sposób układ punktów materialnych poddamy warunkowi dodatkowemu, aby odległość między punktami układu była, bez względu na wielkość działających sił, stała, gdy więc założymy, podobnie jak w ostatnich ustępach rozdziału I, że bryła jest sztywna, twierdzenia powyższe można znacznie uprościć.

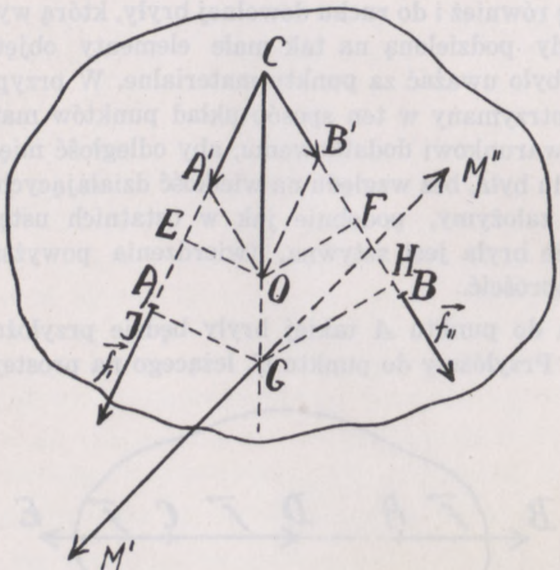
Niech do punktu A takiej bryły będzie przyłożona siła $\vec{f}$ (rys. 67). Przyłóżmy do punktu C, leżącego na prostej AB, wy-



rys. 67

znaczającej kierunek działania tej siły, dwie siły równe f, o kierunkach wzajemnie przeciwnych. Wypadkowa tych sił, działających na ten sam punkt materialny, jest, oczywiście, równa

zeru, wobec czego przyłożenie ich do bryły w niczym nie zmienia stanu jej ruchu. Z trzech sił $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ i $\vec{CE}$, działających obecnie na bryłę, siły $\vec{AB}$ i $\vec{CE}$ wzajemnie się równoważą, gdyż wobec sztywności bryły odległości punktów A i C nie mogą ulec zmianie; nie zrównoważoną pozostaje jedynie siła $\vec{CD}$ i jej działanie wyznacza ruch bryły, który, w myśl wywodów poprzednich, jest taki sam, jak pod działaniem siły $\vec{AB}$. Przeniesienie więc siły, działającej na bryłę sztywną, do dowolnego punktu, leżącego na prostej, wyznaczającej jej kierunek, nie zmienia w niczym jej działania. To twierdzenie podstawowe pozwala rozwiązać bardziej złożone zagadnienie, a mianowicie wyznaczyć ruch bryły, na którą działają dwie lub więcej sił.



rys. 68

Przypuśćmy, że do punktów A i B bryły przyłożone są siły $\vec{f}_1$ i $\vec{f}_2$ (rys. 68), leżące w jednej płaszczyźnie, których kierunki przecinają się w punkcie C, leżącym w skończonej odległości od punktów przyłożenia sił. Przenieśmy obydwie siły do punktu C i zastosujmy do nich regułę dodawania geometrycz-

nego sił, działających na ten sam punkt materialny; otrzymamy wypadkową $\vec{f} = CO$.

Gdy punkt przecięcia leży poza bryłą, możemy przyjąć, że jest on w jakikolwiek sposób sztywnie związany z bryłą; takie założenie nie osłabi w niczym ogólności wywodów; z poprzedniego bowiem twierdzenia wynika, że punkt przyłożenia wypadkowej możemy wybrać gdziekolwiek na prostej, wyznaczającej kierunek jej działania, a więc z punktu C przenieść do dowolnego punktu bryły, leżącego na odcinku CO lub jego przedłużeniu.

$\Delta CA'O$ jest równy $\Delta CB'O$; jeżeli z punktu O opuścimy prostopadłe na CA' i CB', iloczyny $EO \times CA'$ i $OF \times CB'$, wyrażające podwojone pola tych trójkątów, też będą równe. Będziemy mieli zatem

$$EO \times f_1 = OF \times f_2. \qquad (1)$$

Wybierzmy na odcinku CO lub na jego przedłużeniu dowolny punkt G i opuśćmy z niego prostopadłe GH i GI na kierunki sił $\vec{f}_1$ i $\vec{f}_2$. $\triangle CGI$ i $\triangle COE$ oraz $\triangle CGH$ i $\triangle COF$ są podobne

$$\frac{OE}{GI} = \frac{CO}{CG} \text{ i } \frac{OF}{GH} = \frac{CO}{CG}, \text{ stąd } \frac{OE}{GI} = \frac{OF}{GH} \text{ i } OF = GH \cdot \frac{OE}{GI}$$

Po podstawieniu do wzoru (1) otrzymujemy

$$EO \,.\, f_1 = \frac{OE}{GI} \cdot GH \,.\, f_2$$

i ostatecznie

$$GI \,.\, f_1 = GH \,.\, f_2.$$

Wzór (1) spełnia się zatem dla każdego punktu, leżącego na prostej, wyznaczającej kierunek wypadkowej $\vec{f}$.

Załóżmy, że przez punkt O (lub G) przechodzi nieruchoma oś, prostopadła do płaszczyzny, wyznaczonej przez wektor $\vec{f}_1$ i prostopadłą (OE lub GI), opuszczoną z punktu O (lub G) na kierunek siły i nazywaną r a m i e n i e m s i ł y. Działanie samej tylko siły $\vec{f}_1$ wprawiłoby bryłę w ruch obrotowy dookoła tej osi w pewnym oznaczonym kierunku, zależnym od kierunku działania siły. Nazwiemy m o m e n t e m s i ł y w z g l ę d e m p u n k t u O (lub G) wektor, którego wartość liczbową przyjmiemy za równą iloczynowi z wartości tej siły i długości jej ra-

mienia, kierunek zaś za zgodny z kierunkiem, w którym patrząc, widzimy ruch obrotowy bryły spowodowany działaniem siły $\vec{f_1}$, jako zachodzący w kierunku ruchu wskazówek zegara. W przypadku zatem, przedstawionym na rysunku, moment $\vec{M_1}$ siły $\vec{f_1}$ względem dowolnego punktu, wziętego na prostej CO, jest skierowany przed płaszczyznę rysunku, moment zaś $\vec{M_2}$ siły $\vec{f_2}$ — za płaszczyznę rysunku. Momenty te są więc skierowane przeciwnie, wobec czego wzór (1) przybiera postać

$$\vec{M_1} + \vec{M_2} = 0 \tag{1 a}$$

(Względem punktu C każdy z tych momentów równy jest zeru, wobec czego wzór (1 a) spełnia się i dla tego punktu).

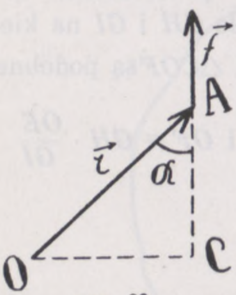
Niech O (rys. 69) jest punktem, względem którego wyznaczamy moment siły $\vec{f}$, przyłożonej w punkcie A. Moment $\vec{M}$ możemy wyrazić wzorem (rozdz. I, ust. 14)

$$\vec{M} = [\vec{r}\,\vec{f}] \tag{1 b}$$

gdzie za dodatni kierunek $\vec{r}$ bierzemy tym razem kierunek OA. Istotnie: wartość liczbowa tego iloczynu wektorowego równa jest $rf \sin\,(\vec{r}, \vec{f})$. Opuśćmy z O prostopadłą na kierunek siły $\vec{f}$; odcinek OC — ramię siły — jest równy

$$l = r \sin \alpha = r \sin\,(\vec{r}, \vec{f}),$$

a zatem $rf \sin\,(\vec{r}, \vec{f}) = rl = M$.



rys. 69.

Kierunek zaś tego iloczynu wektorowego jest, jak łatwo się o tym można przekonać, zgodny z wyżej określonym kierunkiem $\vec{M}$.

Wzór (1 a) odpowiada szczególnemu przypadkowi twierdzenia ogólniejszego: moment siły wypadkowej względem dowolnego punktu jest sumą momentów sił składowych względem tego samego punktu. W przypadku przez nas rozpatrywanym punkt, względem którego obliczamy momenty sił składowych, leży na prostej, wyznaczającej kierunek wypadkowej, wobec czego moment wypadkowej względem tego punktu jest równy zeru.

Twierdzenie to można udowodnić, podstawiając do wzoru (1 b) zamiast $\vec{f}$ sumę składowych $\vec{f_1}$ i $\vec{f_2}$, tak, że

$$\vec{M} = [\vec{r}\,(\vec{f_1} + \vec{f_2})].$$

Nie wchodząc w szczegóły rachunku, które wymagałyby uzupełnienia podanych wyżej twierdzeń rachunku wektorowego, poprzestaniemy jedynie na stwierdzeniu, że wyznaczenie składowych momentu $\vec{M}$ w kierunku osi spółrzędnych doprowadza do następujących równości

$$M_x = [\vec{r}\,\vec{f}_1]_x + [\vec{r}\,\vec{f}_2]_x;\ M_y = [\vec{r}_1\,\vec{f}_1]_y + [\vec{r}\,\vec{f}_2]_y \text{ i } M_z = [\vec{r}\,\vec{f}_1]_z + [\vec{r}\,\vec{f}_2]_z,$$

gdzie $[\vec{r}\,\vec{f_1}]_x$ oznacza składową w kierunku osi x momentu siły $\vec{f_1}$, $[\vec{r}\,\vec{f_1}]_y$ — w kierunku osi y itd. Stąd wynika

$$\vec{M} = [\vec{r}\,\vec{f_1}] + [\vec{r}\,\vec{f_2}] = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

Pod działaniem wypadkowej $\vec{f}$ bryła porusza się ruchem postępowym, o przyspieszeniu równym $\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m}$, gdzie m — masa bryły. Dla zrównoważenia więc sił, działających na bryłę, należałoby do bryły przyłożyć siłę $\vec{f}'$, równą i przeciwnie skierowaną do wypadkowej $\vec{f}$ i działającą wzdłuż prostej, której wszystkie punkty czynią zadość równaniu (1 a), a więc mającą moment $\vec{M}'$ względem dowolnego punktu równy i przeciwnie skierowany do momentu $\vec{M}$ wypadkowej $\vec{f}$. Siły zatem wtedy tylko będą się równoważyły, gdy spełnione będą dwa warunki

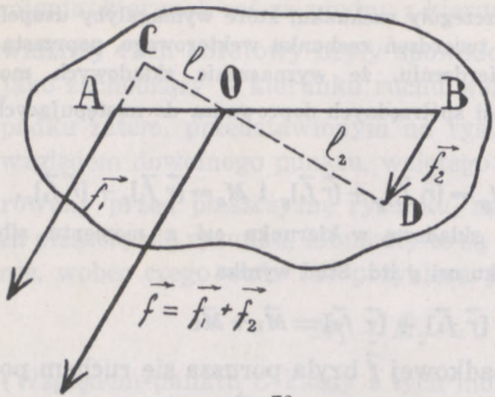
$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}' = 0 \quad \text{i} \quad \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}' = 0. \qquad (2)$$

Spełnienie pierwszego tylko warunku spowoduje spoczynek lub ruch jednostajny środka masy bryły (patrz. ust. 16, rozdz. II), nie będzie mogło jednak zapobiec powstaniu ruchu punktów bryły względem układu odniesienia, związanego ze środkiem masy.

Do podobnych wniosków dojdziemy, rozpatrując przypadki, gdy siły, działające na bryłę, są równoległe i skierowane w tę samą stronę. Punkt przecięcia kierunków tych sił znajduje się w nieskończoności; wypadkowa ich jest zatem równa ich sumie arytmetycznej. Punkty prostej, wyznaczającej jej kierunek, i tym razem czynią zadość równaniu (1a).

Przenieśmy punkt przyłożenia wypadkowej do punktu O, leżącego na prostej AB, łączącej punkty przyłożenia sił $\vec{f_1}$ i $\vec{f_2}$ (rys. 70). Zgodnie ze wzorem (1) mamy

$$l_1 f_1 = l_2 f_2 \quad \text{lub} \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{f_2}{f_1}.$$



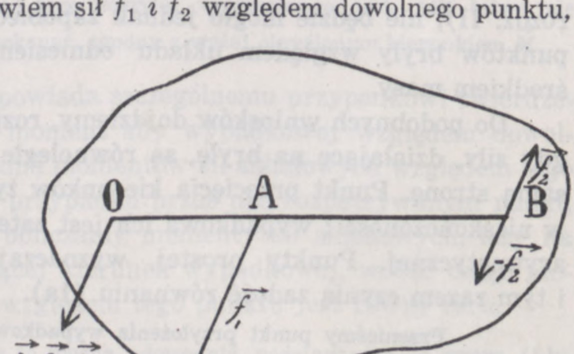
rys. 70

Podobne trójkąty AOC i DOB dają nam proporcję

$$\frac{AO}{OB} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{f_2}{f_1}.$$

Punkt O dzieli więc odcinek AB na części odwrotnie proporcjonalne do wartości sił, przyłożonych w końcowych punktach odcinka; nie zmieni on swego położenia na prostej AB, gdy będziemy zmieniali kierunek sił działających, tak jednak, aby siły te pozostawały stale równoległymi. Dlatego punkt O bywa często nazywany ś r o d k i e m s i ł r ó w n o l e g ł y c h.

Wywody nasze niewielkiej ulegną zmianie, gdy jedna z sił działających zmieni swój kierunek na przeciwny, pozostając jednak mniejszą lub większą od drugiej siły działającej. Jak i w dwu przypadkach poprzednich, ruch bryły będzie ruchem postępowym, którego przyspieszenie wyznaczy wypadkowa $\vec{f}$, skierowana w stronę siły większej i równa różnicy arytmetycznej sił $\vec{f_1}$ i $\vec{f_2}$. Przenosząc punkt przyłożenia wypadkowej do punktu O, leżącego na prostej AB (rys. 71), przekonamy się, że punkt ten musi leżeć nie na odcinku AB, lecz na jego przedłużeniu, momenty bowiem sił $\vec{f_1}$ *i* $\vec{f_2}$ względem dowolnego punktu, leżącego na prostej AB między punktami A i B, mają zawsze kierunki zgodne, suma więc ich nie mogłaby nigdy być równa zeru.



rys. 71

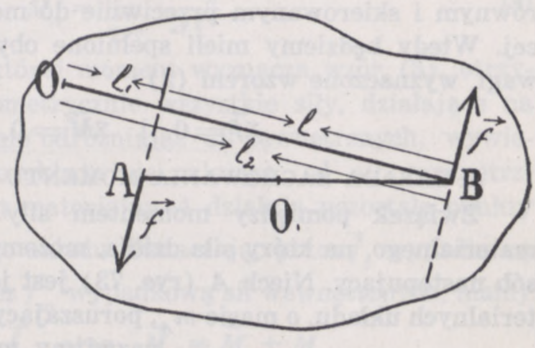
Gdy wreszcie siły $\vec{f_1}$ i $\vec{f_2}$ mają kierunki przeciwne i wartości rów-

ne, wypadkowa ich jest równa zeru, punkt zaś jej przyłożenia oddala się do nieskończoności.

Działania takich dwu sił, nazywanych **p a r ą s i ł**, nie możemy więc zastąpić jedną wypadkową; spowodują one ruch obrotowy bryły dookoła osi prostopadłej do płaszczyzny, wyznaczonej przez kierunki obydwu sił.

Pojęcie pary sił wprowadził do fizyki Poinsot (1808 r.). Parę sił oznaczamy często symbolem $(\vec{f}, -\vec{f})$.

Suma momentów sił, stanowiących parę, jest niezależna od wyboru punktu, względem którego je wyznaczamy. Załóżmy dla uproszczenia, że punkt O leży w tej samej płaszczyźnie, co dana para sił (rys. 72). Długości prostopadłych, opuszczonych z punktu O na kierunki sił $\vec{f}$, niech będą odpowiednio równe l_1 i l_2, przy czym l_2 jest w przypadku, przedstawionym na rysunku, sumą l_1 i l, gdzie l — **r a m i ę p a r y s i ł** — wyznacza najkrótszą wzajemną ich odległość. Moment M_1 siły, przyłożonej w A, równy fl_1 jest skierowany przeciwnie do momentu M_2 siły $\vec{f}$, przyłożonej w B, równego $fl_2 = f\,(l_1 + l)$. Moment więc wypadkowy



rys. 72

$$M = M_2 - M_1 = f \, . \, l$$

Moment ten ma kierunek taki, jak moment siły, przyłożonej do punktu bardziej odległego od O, jest więc w danym przypadku skierowany przed płaszczyznę rysunku; wartość jego jest całkowicie wyznaczona przez wartość jednej z sił pary i ich wzajemną odległość. Obliczając w ten sam sposób sumę momentów sił pary względem punktu O_1, leżącego między punktami A i B, sprawdzimy bez trudu, że moment wypadkowy będzie miał względem tego punktu tę samą wartość i ten sam kierunek,

co względem punktu O. Ten stały moment nazywamy m o m e n t e m p a r y s i ł.

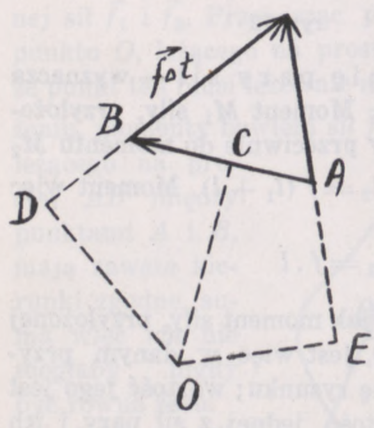
Parę sił można zrównoważyć jedynie inną parą o momencie równym i przeciwnie skierowanym, tylko wtedy bowiem suma momentów względem dowolnego punktu sił działających na ciało będzie równa zeru.

Do tych prostych przypadków można sprowadzić wszelkie inne. Jakiekolwiek siły działałyby na bryłę, zawsze możemy je zastąpić układem sił, złożonym z jednej wypadkowej i z jednej pary sił. Dla zrównoważenia tych sił należy przyłożyć do bryły siłę równą i przeciwnie skierowaną do wypadkowej i przy tym działającą wzdłuż tej samej prostej, oraz parę sił o momencie równym i skierowanym przeciwnie do momentu pary działającej. Wtedy będziemy mieli spełnione obydwa warunki równowagi, wyznaczone wzorem (2)

$$\Sigma\vec{f} = 0 \quad \text{i} \quad \Sigma\vec{M} = 0. \tag{2a}$$

2. ZASADA ZACHOWANIA MOMENTU ILOŚCI RUCHU

Związek pomiędzy momentem siły a prędkością punktu materialnego, na który siła działa, możemy wyprowadzić w sposób następujący. Niech A (rys. 73) jest jednym z punktów materialnych układu, o masie m_A, poruszającym się z prędkością v_A; nazwijmy momentem ilości ruchu $\vec{H}_A$ punktu materialnego A względem punktu O wektor, którego wartość otrzymamy, mnożąc $m_A \vec{v}_A$ przez długość prostopadłej, opuszczonej z punktu O na kierunek wektora $m\vec{v}$, kierunek zaś wyznaczymy w sposób analogiczny do tego, w jaki wyznaczaliśmy kierunek momentu siły, a mianowicie, odkładając na prostopadłej do płaszczyzny, przesuniętej przez prostą OC i wektor $m\vec{v}$, odcinek równy H i skierowany w tę stronę, w którą patrząc, widzimy punkt materialny A, poruszający się przy obrocie dookoła osi przechodzącej przez O w kierunku ruchu wskazówek zegara.



rys. 73

Siły, działające na punkt materialny A, których wypadkowa niech będzie równa $\vec{f}_A$, spowodują w ciągu Δt sek zmianę ilości ruchu $m\vec{v}' - m\vec{v} = \Delta(m\vec{v})$ tak, że będziemy mieli

$$\vec{f}_A \Delta t = \Delta(m\vec{v})$$

Moment względem punktu O wektora $\vec{f}_A \Delta t$ równy jest momentowi względem tego samego punktu przyrostu ilości ruchu punktu materialnego A. Mamy zatem

$$\vec{M}_A \Delta t = \Delta\vec{H}_A \quad \text{lub} \quad \vec{M}_A = \frac{\Delta\vec{H}_A}{\Delta t}$$

i w granicy
$$\vec{M}_A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{H}_A}{\Delta t}. \tag{3}$$

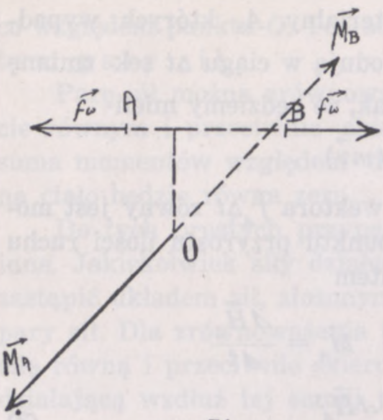
Wypadkową $\vec{f}_A$, której moment wyznacza wzór (3), otrzymaliśmy, dodając geometrycznie wszystkie siły, działające na punkt materialny A, nie odróżniając sił zewnętrznych, wywieranych przez ciała, do układu nie należące, od sił wewnętrznych, jakimi na punkt materialny A działają pozostałe punkty materialne tego samego układu. Oznaczając przez $\vec{f}_z$ wypadkową sił zewnętrznych i przez $\vec{f}_w$ wypadkową sił wewnętrznych, mamy

$$\vec{f}_A = \vec{f}_z + \vec{f}_w \quad \text{oraz} \quad \vec{M}_A = \vec{M}_z + \vec{M}_w.$$

Wykonywając ten rachunek dla wszystkich punktów materialnych układu i dodając geometrycznie zarówno momenty sił działających na poszczególne punkty, jak i momenty ich ilości ruchu, które wyobrazimy sobie przeniesione do jednego punktu (np. punktu O), otrzymamy

$$\vec{M} = \Sigma\vec{M}_A = \Sigma\vec{M}_z + \Sigma\vec{M}_w = \lim_{\Delta t \to 0} \Sigma \frac{\Delta\vec{H}_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta}{\Delta t} \Sigma\vec{H}_A.$$

Siły wewnętrzne, których sumę momentów oznaczyliśmy przez $\Sigma\vec{M}_w$, występują zawsze, zgodnie z trzecią zasadą mechaniki, parami. Gdy siły te działają wzdłuż prostych, łączących dane punkty materialne, gdy więc są to tzw. **siły środkowe**, suma geometryczna ich momentów względem dowolnego punktu O jest zawsze równa zeru (rys. 74), wobec czego i $\Sigma\vec{M}_w$ też jest zerem. Temu warunkowi czyni zadość bryła sztywna, z warunku bowiem niezmiennej odległości między poszczególnymi elementami jej objętości wynika, czego tu dowo-



rys. 74

dzić nie będziemy, że siły, z jakimi te elementy wzajemnie na siebie działają, są siłami środkowymi. Mamy zatem

$$\vec{M} = \Sigma \vec{M}_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta}{\Delta t} \Sigma \vec{H}_A . \quad (4)$$

Suma momentów względem danego punktu O sił zewnętrznych, działających na bryłę sztywną (lub na układ, w którym siły wewnętrzne są siłami środkowymi), równa jest zmianie sumy geometrycznej momentów ilości ruchu względem tego samego punktu elementów objętości bryły (lub punktów układu), odniesionej do jednostki czasu. Gdy $M = 0$, a więc gdy na bryłę (lub układ) działają tylko siły wewnętrzne, albo oprócz nich, takie siły zewnętrzne, których kierunki przecinają się w punkcie O, względem którego wyznaczamy momenty, suma momentów ilości ruchu elementów objętości bryły (lub punktów układu) jest stała. Twierdzenie to nazwiemy z a s a d ą z a c h o w a n i a m o m e n t u i l o ś c i r u c h u.

Moment wypadkowy $\vec{M}$, a co za tym idzie, i zmiana wypadkowego momentu ilości ruchu, są na ogół zależne od wyboru punktu O. Jedynie w przypadku szczególnym, gdy wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych $\Sigma \vec{f}_z$ równa jest zeru, gdy więc środek masy bryły (lub układu) jest w spoczynku (albo porusza się jednostajnym ruchem prostoliniowym), moment $\vec{M}$ nie zależy od wyboru punktu odniesienia, wtedy bowiem siły zewnętrzne sprowadzają się, jak wiemy, do pary sił, których moment ma wartosc stałą, niezależną od położenia punktu, względem którego go wyznaczamy.

3. MOMENT ILOŚCI RUCHU BRYŁY OBRACAJĄCEJ SIĘ DOKOŁA STAŁEJ OSI

Przypuśćmy,, że bryła obraca się z prędkością kątową około stałej osi ZZ', leżącej w płaszczyźnie rysunku (rys. 75).

Przetnijmy bryłę płaszczyzną, prostopadłą do osi i przechodzącą przez punkt A bryły (a właściwie przez element objętości bryły, który przyjmujemy za punkt materialny), którego moment ilości ruchu chcemy wyznaczyć. Niech punkt O będzie punktem przecięcia tej płaszczyzny z osią ZZ'. Prosta $OA = r_1$ jest prostopadłą zarówno do osi ZZ', jak i do wektora $\Delta m_1 \vec{v}_1$ (gdzie Δm_1 oznacza bardzo małą masę elementu A), jest bowiem promieniem koła, opisywanego przez punkt A w jego ruchu obrotowym dookoła osi ZZ'. Moment ilości ruchu punktu materialnego względem tak wybranego punktu O na osi nazwiemy **momentem ilości ruchu względem osi** ZZ'.



rys. 75

Wartość liczbowa ilości ruchu punktu materialnego A równa jest, jak wiadomo,

$$\Delta m . v_1 = \Delta m r_1 \omega,$$

skąd wartość momentu ilości ruchu

$$\Delta H = \Delta m r_1^2 \omega.$$

Momenty ilości ruchu wszystkich punktów (elementów objętości bryły) mają kierunki zgodne, takie, jak wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ (rozdz. I, ust. 14), (w przypadku, przedstawionym na rysunku, leżą w płaszczyźnie rysunku i są skierowane ku górze), wobec czego wypadkowa ich jest ich sumą arytmetyczną

$$H = \Sigma \Delta H = \Sigma \Delta m r_1^2 \omega = \omega \Sigma \Delta m r_1^2$$

lub, uwzględniając kierunek wektorów $\vec{H}$ i $\vec{\omega}$

$$\vec{H} = \vec{\omega} \Sigma \Delta m r_1^2 . \tag{5}$$

Wielkość skalarową $\Sigma \Delta m r_1^2$, wyrażającą sumę iloczynów z mas nieograniczenie małych elementów objętości bryły przez kwadrat ich odległości od osi, nazywamy **momentem bezwładności** bryły względem danej osi. W bryle sztywnej wartość momentu bezwładności zależy jedynie od wyboru osi odniesienia i nie zmienia swej wartości na skutek ruchu. Oznaczając

moment bezwładności przez B, otrzymujemy wzór (5) w postaci

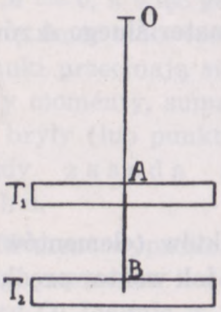
$$\vec{H} = B\vec{\omega}. \tag{5a}$$

Gdy na bryłę działają wzdłuż prostych, nie przecinających osi obrotu, siły zewnętrzne, moment ich względem danej stałej osi jest równy

$$M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta H}{\Delta t} = B \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = B\gamma. \tag{6}$$

Przyspieszenie kątowe ma, wobec stałego kierunku osi, kierunek zawsze ten sam, co prędkość kątowa; moment więc sił zewnętrznych zmienia jedynie wartość wektora $\vec{\omega}$, pozostawiając bez zmiany jego kierunek. Gdy $M = 0$, ω zachowuje wartość stałą.

Załóżmy, że mamy układ, złożony z pewnej ilości brył sztywnych, związanych ze sobą siłami wewnętrznymi układu. Niech to będą np. dwie tarcze metalowe (rys. 76), zawieszone na niesprężystej nici OA i połączone ze sobą drutem AB. Skręcając ten drut, odchylmy jedną z tarcz, np. T_1 o kąt α i pozostawmy układ samemu sobie. Pod działaniem sił sprężystości drutu, będących w tym przypadku siłami wewnętrznymi układu, tarcza T_1 zacznie się wahać około osi AB, jako osi obrotu. Siły zewnętrzne, działające na układ, sprowadzają się do siły ciężkości, której moment względem osi obrotu równy jest zeru, jeżeli tylko nić OA i drut AB mają kierunek pionowy i przechodzą przez środek masy każdej z tarcz (ust. 7). Załóżmy, że w chwili, gdy odchylona tarcza zaczęła się wahać, prędkość jej była równa zeru, a więc, że suma momentów ilości ruchu była początkowo równa zeru. Wobec $M = 0$ tę samą wartość musi suma ta zachować i podczas wahania się tarczy T_1. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy jednocześnie druga tarcza wahać się będzie w stronę przeciwną z prędkością kątową taką, abyśmy w każdej chwili mieli



rys. 76

$$B_1\omega_1 + B_2\omega_2 = O,$$

gdzie B_1 i B_2 momenty bezwładności tarcz względem osi obrotu.

Kąty, na jakie tarcze te się odchylą w przeciągu czasu t, będą, jak łatwo się o tym można przekonać, związane wzorem analogicznym

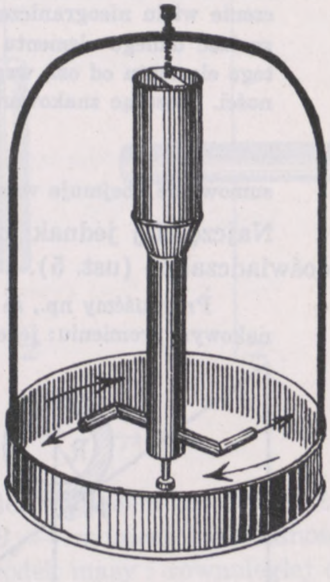
$$B_1\alpha_1 + B_2\alpha_2 = O.$$

Odchylenie zatem każdej z tarcz będzie zależne od stosunku ich momentów bezwładności (Bruhat).

Podobnie, gdyby w pewnej chwili cała ludność ziemi zaczęła się poruszać w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu obrotowego ziemi

a więc np. wzdłuż równika z zachodu na wschód, prędkość kątowa ziemi musiałaby ulec zmniejszeniu. (Zakładamy tutaj, że ziemia nie podlega działaniu żadnych sił zewnętrznych i że oś jej obrotu jest stała (por. ust. 8)).

W analogiczny sposób można wyjaśnić znane doświadczenie z tzw. młynkiem Segnera, który w najprostszym przypadku składa się z pionowego walca, mogącego obracać się dookoła swej osi, i dwu poziomych, połączonych z nim rur, zaopatrzonych w boczne otwory (rys. 77). Gdy woda, którą napełniamy walec, zacznie wypływać przez otwory, rury zaczynają się obracać w kierunku przeciwnym.



rys. 77

Gdy układ jest tego rodzaju, że jego moment bezwładności możemy dowolnie zmieniać, zwiększeniu momentu bezwładności towarzyszy zmniejszenie prędkości kątowej układu, na który działają siły zewnętrzne o łącznym momencie $M = 0$. Tak np. człowiek, siedzący na stołku, umieszczonym na obracającej się tarczy, może do pewnego stopnia regulować prędkość kątową obrotu, wyciągając ręce w ten sposób, aby zwiększyć swój moment bezwładności, lub przeciwnie, przyciskając je do ciała i zmniejszając moment bezwładności. Działanie to będzie tym wydatniejsze, im większe będą zmiany momentu bezwładności, a więc np., gdy człowiek będzie trzymał w ręku znaczne masy.

Energię ruchu obrotowego bryły dookoła danej osi otrzymamy, wyznaczając energię ruchu poszczególnych elementów bryły i sumując otrzymane wartości

$$L_{\text{ob.}} = \frac{1}{2}\Sigma \Delta m \, . v^2 = \frac{1}{2}\Sigma \Delta m . r^2\omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2\Sigma \Delta m . r^2 = \frac{1}{2}B\omega^2. \quad (7)$$

Z porównania tych wzorów z odpowiednimi wzorami, jakie uprzednio otrzymaliśmy dla ruchu postępowego brył (lub, co na jedno wychodzi, dla ruchu punktu materialnego) wynika, że tę samą rolę, jaką w ruchu postępowym odgrywają siła, masa, prędkość i przyspieszenie liniowe, w ruchu obrotowym spełniają moment siły, moment bezwładności, prędkość i przyspieszenie kątowe.

4. WYZNACZENIE MOMENTU BEZWŁADNOŚCI. MOMENT BEZWŁADNOŚCI WZGLĘDEM OSI, PRZECHODZĄCEJ PRZEZ ŚRODEK MASY

Gdy chodzi o bryły prawidłowe, możemy wyznaczyć ich moment bezwładności, posługując się metodami rachunku nieskończonościowego.

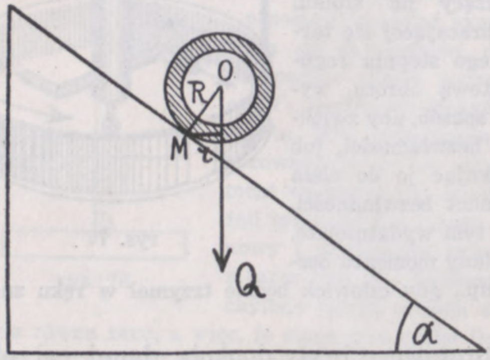
Zagadnienie sprowadza się wtedy do wyznaczenia masy nieskończenie wielu nieograniczenie małych wyrazów $r^2\rho dv$, gdzie ρ oznacza gęstość danego elementu o objętości dv, r — najmniejszą odległość tego elementu od osi, względem której wyznaczamy moment bezwładności. Stosując znakowanie rachunku całkowego, możemy napisać, że

$$B = \int r^2\rho dv;$$

sumowanie obejmuje wszystkie elementy dv danej bryły.

Najczęściej jednak moment bezwładności wyznaczany jest doświadczalnie (ust. 5).

Przypuśćmy np., że mamy dwa walce o jednakowej masie i jednakowym promieniu: jeden z nich — drewniany — jest pełny, drugi — metalowy — jest wydrążony, i że walce te staczają się wzdłuż równi pochyłej (rys. 78). Z gruba ujmując zjawisko, możemy powiedzieć, że w pewnych warunkach ruch staczających się walców możemy rozpatrywać jako szereg ruchów obrotowych dookoła tych tworzących walca, wzdłuż których walec styka się w danej chwili z powierzchnią równi. Momenty bezwładności walców względem tych osi chwilowych są stale te same; rozmieszczenie bowiem mas względem każdej tworzącej walca jest identyczne; podobnie moment siły zewnętrznej, którą w danym przypadku jest siła ciężkości, również zachowuje wartość stałą $Q \cdot r = Q \cdot R \sin\alpha$, gdzie R jest promieniem walca, α — nachyleniem równi do poziomu. Stosując wzór (6), otrzymamy



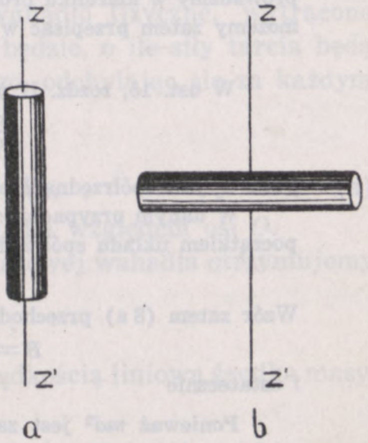
rys. 78

$$Q \cdot R \sin\alpha = B\gamma, \text{ skąd } \gamma = \frac{Q R \sin\alpha}{B}.$$

Przyspieszenie kątowe będzie więc tym mniejsze, im większy jest moment bezwładności walca. Walec zatem pełny — drewniany —

o mniejszym momencie bezwładności prędzej stoczy się z równi, niż wydrążony walec metalowy. Gdyby walce te spadały, ślizgając się po równi, doszłyby do podstawy równi w tym samym czasie (Pohl).

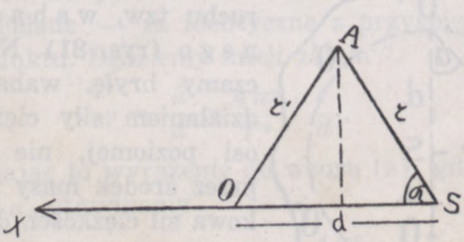
Wartość momentu bezwładności zależy, jak o tym była już wyżej mowa, od wyboru osi, względem której go wyznaczamy. Tak np. moment bezwładności walca jest mniejszy względem osi, będącej jego osią geometryczną, niż względem osi prostopadłej do osi geometrycznej (rys. 79). Na ogół jednak wystarcza wyznaczenie momentu bezwładności względem osi, przechodzącej przez środek masy bryły; znając go, możemy obliczyć moment bezwładności względem każdej osi równoległej i przechodzącej przez dowolny punkt bryły, ze wzoru, wyrażającego tzw. twierdzenie Steinera



rys. 79

$$B = B_s + md^2, \quad (8)$$

gdzie B oznacza moment bezwładności względem osi OO', przechodzącej przez dany punkt bryły, B_s — moment bezwładności względem osi, przechodzącej przez środek masy i równoległej do osi OO', m — masę bryły, d — najkrótszą odległość między tymi osiami.



rys. 80

Niech oś OO' będzie prostopadła do płaszczyzny rysunku (rys. 80) i niech S będzie środkiem masy bryły. $OS = d$ jest wtedy najkrótszą odległością między osią OO' i równoległą do niej osią przechodzącą przez S. $B_s = \Sigma \Delta m . r^2$, gdzie r odległość osi przechodzącej przez środek masy od poszczególnych elementów A objętości bryły; $B = \Sigma \Delta m . r_1^2$,

gdzie r_1 odległość osi OO' od elementów A. Między r i r_1 istnieje następujący związek

$$r_1^2 = r^2 + d^2 - 2\,rd\cos\alpha.$$

Mamy zatem

$$B = \Sigma\Delta m\,.\,r^2 + \Sigma\Delta m\,.\,d^2 - \Sigma\Delta m\,.\,rd\cos\alpha. \qquad (8\,a)$$

Weźmy środek masy za początek układu spółrzędnych i oś x poprowadźmy w kierunku prostej SO. Wtedy $r\cos\alpha = x$. Ostatni wyraz możemy zatem przepisać w postaci

$$d\,\Sigma\Delta m\,.\,x.$$

W ust. 15, rozdz. II ustaliliśmy, że

$$\frac{\Sigma\Delta m\,.\,x}{\Sigma\Delta m} = x_s,$$

gdzie x_s jest spółrzędną środka masy.

W danym przypadku x_s jest równe zeru, gdyż środek masy jest początkiem układu spółrzędnych. Mamy więc

$$\Sigma\Delta m\,.\,x = 0.$$

Wzór zatem (8 a) przechodzi w następujący

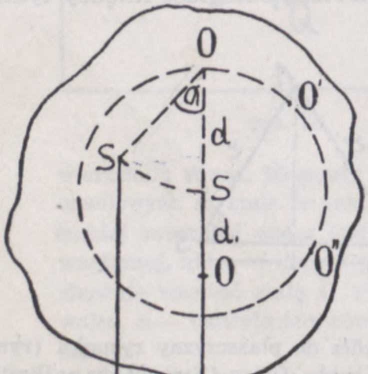
$$B = \Sigma\Delta m\,.\,r^2 + d^2\Sigma\Delta m$$

i ostatecznie

$$B = B_s + md^2.$$

Ponieważ md^2 jest zawsze wielkością dodatnią, B jest zawsze większe od B_s. Moment bezwładności względem osi, przechodzącej przez środek masy, jest najmniejszy ze wszystkich momentów bezwładności bryły względem prostych, równoległych do danej osi.

5. WAHADŁO FIZYCZNE. DOŚWIADCZALNE WYZNACZENIE MOMENTU BEZWŁADNOŚCI



rys. 81

Zastosujemy twierdzenia ustępów poprzednich do wyznaczenia ruchu tzw. w a h a d ł a f i z y c z n e g o (rys. 81). Nazwą tą oznaczamy bryłę, wahającą się pod działaniem siły ciężkości dookoła osi poziomej, nie przechodzącej przez środek masy bryły. Wypadkowa sił ciężkości, działających na poszczególne elementarne masy, z których bryła się składa, jest, jak o tym będzie mowa niżej (rozdz. IV, ust. 9), przyłożona w środku masy bryły, skierowana pionowo na dół i równa ich sumie Q.

Bryła jest w równowadze, gdy moment siły ciężkości względem osi obrotu równy jest zeru, a więc gdy prosta, wyznaczająca kierunek siły ciężkości, przecina oś O. Gdy wahadło odchylimy o kąt α, moment ciężaru staje się równy $Qd' = Q \cdot d \sin \alpha$. Rozumowanie identyczne z tym, jakim posługiwaliśmy się przy rozpatrywaniu wahań wahadła matematycznego (rozdz. II, ust. 13), doprowadzi nas do wniosku, że wahadło fizyczne, wytrącone z położenia równowagi, wahać się będzie, o ile siły tarcia będą znikomo małe, nieograniczenie długo, odchylając się za każdym wahnięciem o ten sam kąt α.

Stosując wzór (6) otrzymujemy

$$Q\, d \sin \alpha = B\gamma, \tag{a}$$

gdzie B moment bezwładności wahadła względem osi O.

Wartość chwilowej prędkości kątowej wahadła otrzymujemy ze wzoru

$$\omega = \frac{v}{d},$$

gdzie d jest wartością stałą, v — prędkością liniową środka masy, wobec czego

$$\gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{1}{d} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{dv}{\Delta t} = \frac{a}{d}.$$

Załóżmy, że podobnie, jak w przypadku wahadła matematycznego, kąt α jest dostatecznie mały, abyśmy mogli przyjąć $\sin \alpha$ za równe α. Wtedy, jak wiemy, składową siły ciężkości, działającą w kierunku ruchu, możemy uważać za proporcjonalną do odchylenia s od położenia równowagi, przyspieszenie więc przez nią udzielane — za identyczne z przyspieszeniem ruchu drgającego punktu. Będziemy mieli zatem

$$\gamma = \frac{a}{d} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{s}{d}.$$

Podstawiając to wyrażenie do wzoru (a), gdzie $\sin \alpha$ zastępujemy przez α, otrzymamy

$$Q \cdot d \cdot \alpha = B\gamma = B \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{s}{d}$$

i z uwagi, że
$$\alpha = \frac{s}{d}$$

$$Q \cdot s = B \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{s}{d},$$

skąd

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{B}{Qd}}. \tag{9}$$

Przypuśćmy, że cała masa bryły skupiona jest w jednym punkcie; moment bezwładności względem osi O zachowa tę samą wartość, co poprzednio, gdy masa ta znajdzie się w takiej odległości k od osi O, że $mk^2 = B$, a więc $k = \sqrt{\frac{B}{m}}$; k nazywamy ramieniem bezwładności bryły względem danej osi. Wzór (9) możemy zatem przepisać w postaci

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mk^2}{Q \cdot d}}. \tag{9 a}$$

Wahadło matematyczne o tym samym okresie wahania miałoby długość (rozdz. II, ust. 13)

$$l = \frac{k^2}{d}. \tag{10}$$

Długość ta nosi nazwę długości zredukowanej wahadła. Odłóżmy na pionie, przechodzącym przez oś O, odcinek równy l; końcowy punkt O_1 tego odcinka jest środkiem wahań wahadła.

Moment bezwładności B względem osi O możemy wyrazić, zgodnie ze wzorem (8), w sposób następujący

$$B = B_s + md^2$$

lub, oznaczając przez k_0 ramię bezwładności bryły względem poziomej osi, równoległej do osi O i przechodzącej przez środek masy

$$B = mk^2 = mk_0^2 + md^2, \tag{b}$$

skąd długość zredukowana wahadła

$$l = \frac{k^2}{d} = \frac{k_0^2}{d} + d. \tag{11}$$

Długość ta jest jednakowa dla wszystkich osi poziomych, równoległych do osi O i przechodzących przez punkty bryły, leżące w tej samej odległości d od środka masy, a więc leżących na obwodzie koła, opisanego ze środka masy promieniem równym d.

Okresy więc wahań około osi poziomych, prostopadłych do płaszczyzny rysunku i przechodzących przez punkty $O, O', O'' \dots$ będą miały wartości jednakowe (rys. 80).

Okres ten nie zmieni się również i wtedy, gdy pozioma i równoległa do osi O oś obrotu przechodzić będzie przez środek wahań O_1. Istotnie, oznaczmy ramię bezwładności bryły względem tej osi przez k_1. Mamy wtedy

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{mk_1^2}{Q \cdot d_1}},$$

gdzie d_1 odległość SO_1.

Ze wzoru (b) otrzymujemy

$$k_1^2 = k_0^2 + d_1^2,$$

skąd długość zredukowana, odpowiadająca wahaniu koło tej osi

$$l_1 = \frac{k_1^2}{d_1} = \frac{k_0^2}{d_1} + d_1,$$

lub z uwagi, że $l = d + d_1$ i $d_1 = l - d = \frac{k_0^2}{d}$ (c)

$$l_1 = \frac{k_0^2 \cdot d}{k_0^2} + \frac{k_0^2}{d} = d + \frac{k_0^2}{d} = l. \qquad \text{(d)}$$

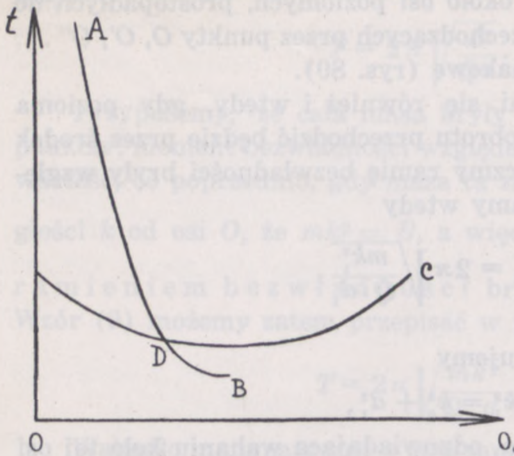
A więc okres wahań będzie ten sam. Równoległe osi O i O_1 są osiami sprzężonymi.

Na tej własności wahadła fizycznego oparta jest budowa wahadła rewersyjnego (Kater 1818).

Wahadło to stanowi sztaba metalowa, zaopatrzona w dwa ostrza, umieszczone w stałej odległości jedno od drugiego. Nad jednym z ostrzy umieszczona jest masa m_1, której położenie podczas pomiaru jest na ogół stałe, między ostrzami znajduje się druga masa m_2, której odległość od ostrzy tak zmieniamy, aby okres wahania około obydwu ostrzy był jednakowy. Wtedy odległość wzajemna ostrzy $s = d + d_1$ równa jest długości zredukowanej wahadła.

Na osi odciętych odkładajmy od początku spółrzędnych odległości masy m_2 od osi O, na osi rzędnych odpowiednie okresy wahań. Otrzymamy w ten sposób krzywą AB.

Odwróćmy wahadło i wyznaczajmy okresy wahań około osi O_1, zmieniając stopniowo odległość masy m_2. Od punktu O_1, na osi odcię-



rys. 82

tych, odległego o s od punktu O, odkładajmy w stronę x ujemnych odległości m_2 od O_1 i w kierunku osi rzędnych odpowiednie okresy wahań. Odcięta punktu przecięcia się D krzywych AB i CD wyznaczy to położenie masy m_2, przy którym odległość ostrzy równa jest długości zredukowanej wahadła (Bouasse).

Wzór (9) stosuje się również i do przypadków, gdy siłą działającą jest nie ciężar, lecz jakakolwiek inna siła, byleby spełniająca warunek zasadniczy, że wartość jej jest proporcjonalna do odchylenia od położenia równowagi. Temu warunkowi czynią zadość wahania, zachodzące pod działaniem sił sprężystości (rozdz. V, ust. 4), gdy bryła zawieszona jest na drucie sprężystym, który skręcamy o pewien kąt tak, aby nie przekroczyć granicy sprężystości drutu, i następnie pozostawiamy samemu sobie, lub, gdy na nici zawieszamy magnes, który odchylamy o niewielki kąt od położenia równowagi, jakie przybiera pod działaniem magnetyzmu ziemskiego. W obydwu przypadkach tak zawieszamy ciało, aby pionowa oś obrotu przechodziła przez środek masy bryły i była jedną z głównych osi jej obrotu (ust. 7), wtedy bowiem moment ciężaru bryły równy jest zeru i wahania zachodzą w płaszczyźnie poziomej koło stałej osi. W tych przypadkach stosujemy ogólniejszą postać wzoru (9); oznaczając przez D tzw. m o m e n t k i e r u j ą c y, otrzymujemy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{B}{D}}. \tag{12}$$

Znając D i mierząc okres wahań, możemy wyznaczyć B moment bezwładności bryły względem osi obrotu. Gdy wartości momentu kierującego nie znamy, możemy go wyrugować ze wzoru, mierząc dwa razy okres wahań T: raz, gdy waha się sama tylko bryła, drugi raz, gdy na bryle umocujemy dodatkowe masy, któ-

rych moment bezwładności względem danej osi umiemy obliczyć i których dołączenie nie zmienia wartości momentu kierującego. (W przypadku zatem magnesu masy dodatkowe są z mosiądzu lub z innego metalu, co do którego możemy założyć, że prawie nie podlega działaniom magnetyzmu ziemskiego). Niech ten dodatkowy moment bezwładności wynosi B_1. Okres wahań bryły z dodatkowymi masami

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{B+B_1}{D}},$$

stąd

$$\frac{T^2}{T_1^2} = \frac{B}{B+B_1}$$

$$\text{i} \quad B = B_1\frac{T^2}{T_1^2 - T^2}. \tag{12a}$$

6. ŚRODEK UDERZEŃ. WAHADŁO BALISTYCZNE

Rozważania ustępu poprzedniego pozwolą nam ustalić jeszcze jedną ważną własność środka wahań, tę mianowicie, że siły chwilowe, przyłożone w tym punkcie i działające prostopadle do płaszczyzny, przechodzącej przez oś i środek masy, nie wywierają żadnego działania na oś obrotu.

Załóżmy, że na punkt O_1 działają w przeciągu czasu Δt siły $\vec{f}$, stanowiące impuls $\Sigma\vec{f}\Delta t = \vec{I}$. Jeżeli działanie tych sił nie przenosi się na oś, o której zakładamy w dalszym ciągu, że jest stała, oś nie wywiera również żadnej siły reakcji na bryłę; na środek masy działają wtedy jedynie siły impulsu I. Stąd przyrost jego ilości ruchu, w przypuszczeniu, że bryła początkowo była w spoczynku

$$m\vec{v} = \vec{I}$$

gdzie m — masa bryły, v — prędkość środka masy, nabyta na skutek uderzenia. Prędkość ta związana jest z prędkością kątową obrotu środka masy około osi O wzorem

$$v = \omega d, \text{ a więc } I = m\omega d \tag{e}$$

skądinąd jednak wiemy (wzór 6)

$$M\Delta t = I \,.\, r = B\gamma \,.\, \Delta t = B\omega \tag{f}$$

gdzie r oznacza odległość prostej, wzdłuż której działa impuls od osi obrotu, ω — prędkość kątową, nabytą wskutek uderzenia.

Podstawiając wyznaczoną przez wzór (f) wartość ω do wzoru (e), otrzymujemy

$$r = \frac{B}{md}$$

lub, zgodnie ze wzorem (8)

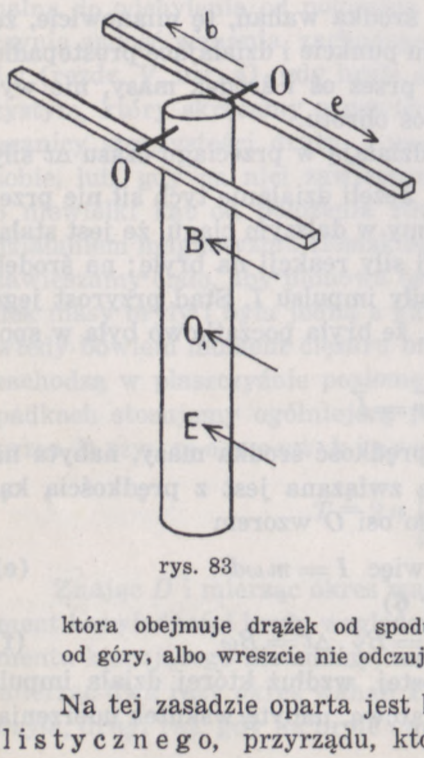
$$r = \frac{B_s}{md} + d$$

oraz z uwagi, że $B_s = mk_0^2$

$$r = \frac{k_0^2}{d} + d = l.$$

Taki więc ruch środka masy możliwy jest tylko wtedy, gdy uderzenie przechodzi przez środek wahań. Z tego też powodu nazywamy ten punkt bryły ś r o d k i e m u d e r z e ń.

Przypuśćmy, że gruby i sztywny drut O (rys. 83), wbity w drewniany walec, wspiera się na dwu poziomych klockach tak, że walec może się wahać około osi poziomej. Uderzając lekko walec w punkcie B prostopadle do płaszczyzny, przechodzącej przez oś i środek masy walca, w danym więc przypadku poziomo, spowodujemy przesunięcie się osi w kierunku b, uderzając w punkcie E, przesuniemy oś O w kierunku e. Możemy jednak zawsze znaleźć taki punkt O_1, w którym uderzenie nie zmieni położenia osi O (Bouasse). Rachunek, którego tu nie będziemy przytaczali, wykaże, że punkt O_1 jest istotnie środkiem wahań.

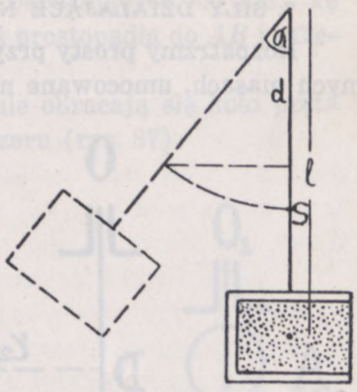


rys. 83

Podobnie, uderzając drążkiem w jakiś twardy przedmiot, przekonamy się, że zależnie od tego, w którym miejscu trzymamy ręką drążek, odczujemy uderzenie drążka albo w tej części dłoni, która obejmuje drążek od spodu, albo w tej, która go obejmuje od góry, albo wreszcie nie odczujemy go wcale.

Na tej zasadzie oparta jest budowa tzw. w a h a d ł a b a l i s t y c z n e g o, przyrządu, który dawniej był w powszech-

nym użyciu przy wyznaczaniu prędkości pocisków. Nie wdając się w szczegółowy opis tego wahadła, zaznaczmy, że główną jego część stanowi walec (rys. 84), napełniony piaskiem i zawieszony na mocnych sztabach metalowych, pozwalających mu wahać się w płaszczyźnie pionowej dookoła poziomej osi. Oś walca znajduje się w odległości l, wyznaczonej wzorem (11), od osi obrotu. Kierunek ruchu pocisku jest tak dobrany, aby pocisk trafiał walec wzdłuż jego osi. Uderzenie jest w tym przypadku całkowicie niesprężyste: pocisk, zanurzony w piasku, porusza się nadal z tą samą prędkością, jaką nadał wahadłu.



rys. 84

Niech v_0 będzie prędkością początkową pocisku, m jego masą. Strata momentu ilości ruchu, jakiej doznał podczas zderzenia, równa jest przyrostowi momentu ilości ruchu wahadła. Mamy zatem, kładąc, jak poprzednio, $\omega_0 = 0$

$$B\omega = lm\,(v_0 - \omega l),$$

ωl jest prędkością pocisku po zderzeniu. Stąd

$$\omega = \frac{mv_0 l}{B + ml^2}.$$

Energia więc ruchu wahadła i pocisku po zderzeniu

$$L = \frac{1}{2} B\omega^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 l^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2 v_0^2 l^2}{B + ml^2}.$$

Na skutek nabytej w ten sposób energii wahadło wraz z pociskiem odchyli się o kąt α, wykonywając przeciwko sile ciężkości pracę, równą L. Praca ta wynosi

$$(Qd + ql)\,(1 - \cos\alpha),$$

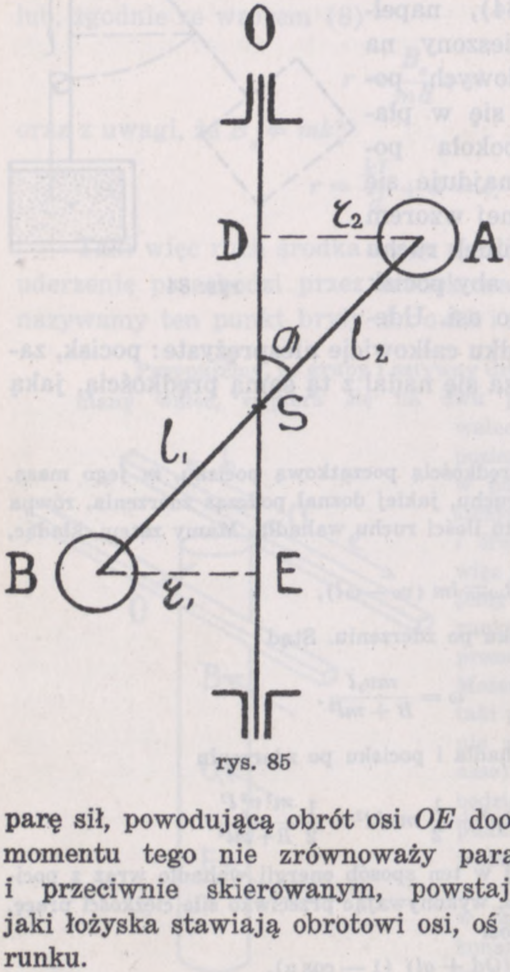
gdzie Q ciężar wahadła, q ciężar pocisku, $d\,(1 - \cos\alpha)$ — wysokość, na jaką został podniesiony środek ciężkości wahadła, $l\,(1 - \cos\alpha)$ — wysokość, na jaką został podniesiony pocisk. Mamy zatem

$$(Qd + ql)\,(1 - \cos\alpha) = (Qd + ql)\; 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} m^2 v_0^2 \frac{l^2}{B + ml^2},$$

z którego można wyznaczyć v_0.

7. SIŁY DZIAŁAJĄCE NA OŚ OBROTU OSI SWOBODNE

Rozpatrzmy prosty przypadek, gdy dwie kule A i B o znacznych masach, umocowane na końcach sztywnego pręta, którego masę, jako małą w porównaniu z masami kul, w rachunku pominiemy, obracają się ruchem jednostajnym koło pionowej osi OE, tworzącej dowolny kąt α z prętem AB i przechodzącej przez środek masy kul A i B (rys. 85). Przyjmując kule za punkty materialne, znajdziemy, że siły odśrodkowe, którymi kule A i B działają podczas ruchu na oś OE, równają się odpowiednio



rys. 85

$$m_1 \omega^2 r_1 = m_1 \omega^2 l_1 \sin \alpha$$

i

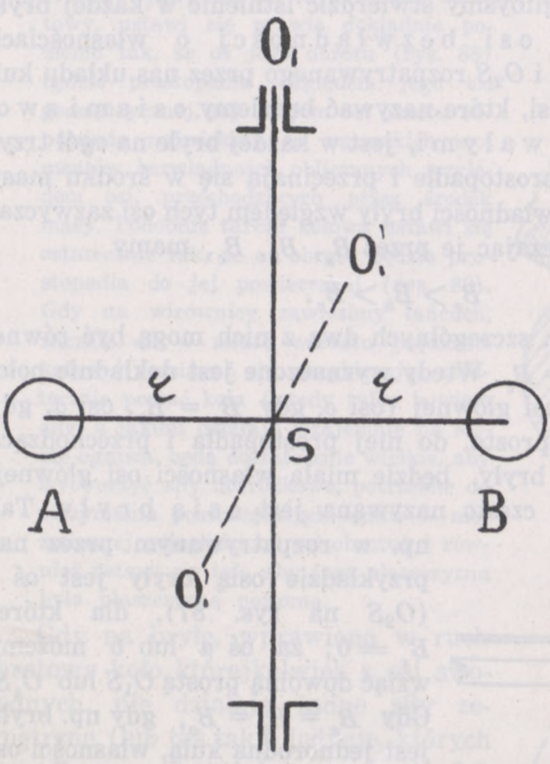
$$m_2 \omega^2 r_2 = m_2 \omega^2 l_2 \sin \alpha .$$

Wobec tego, że, zgodnie z określeniem środka masy, $m_1 l_1 = m_2 l_2$, siły te są równe; tworzą one parę sił, powodującą obrót osi OE dookoła osi poziomej. Jeżeli momentu tego nie zrównoważy para o momencie równym i przeciwnie skierowanym, powstająca na skutek oporu, jaki łożyska stawiają obrotowi osi, oś nie zachowa stałego kierunku.

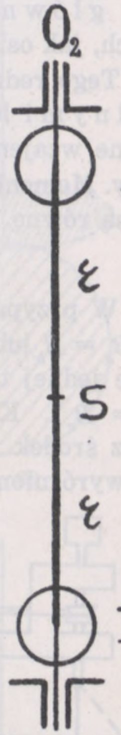
Ten nacisk, jakiemu podlega oś, przenosząca go na podtrzymujące ją łożyska, zniknie dopiero wtedy, gdy oś, przechodząc przez środek masy, będzie prostopadła do sztaby AB (rys. 86). Siły odśrodkowe równe i przeciwnie skierowane, przyłożone do tego samego punktu S, wzajemnie się wtedy równoważą. Oś O_1S w tym przypadku nie wywiera na łożyska żadnego działania,

które by było wywołane przez ruch obracających się kul. Tę własność posiada, oczywiście, każda oś prostopadła do AB i przechodząca przez S, jak np. oś O'_1S.

Podobnie i w przypadku, gdy kule obracają się koło pręta AB, nacisk osi na łożyska równy jest zeru (rys. 87).



rys. 86



rys. 87

Obliczmy momenty bezwładności kul: B względem osi OE (rys. 85), B_1 względem osi O_1S (rys. 86), B_2 względem osi O_2S (rys. 87).

$$B = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m_1 l_1^2 \sin^2\alpha + m_2 l_2^2 \sin^2\alpha$$

i, przyjmując dla uproszczenia rachunku, że $m_1 = m_2$, a więc $l_1 = l_2$

$$B = 2m\, l^2 \sin^2\alpha$$

$$B_1 = 2ml^2 \quad \text{i} \quad B_2 = 0.$$

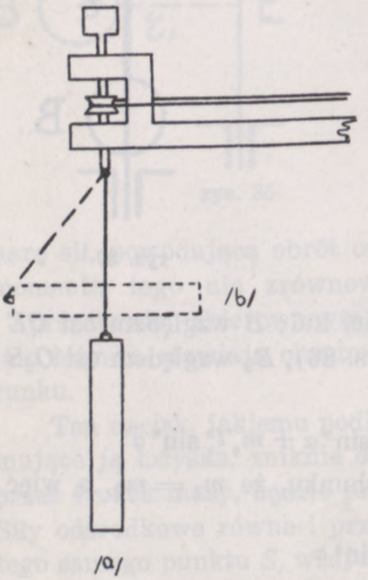
Kule zatem, obracając się koło osi O_1S posiadają większy moment bezwładności,. niż przy obrocie koło jakiejkolwiek innej osi, przechodzącej przez środek masy, obracając się zaś koło osi O_2S, mają moment najmniejszy.

W podobny sposób, ale przy użyciu o wiele bardziej złożonego rachunku, moglibyśmy stwierdzić istnienie w każdej bryle tzw. głównych osi bezwładności o własnościach takich, jak osie O_1S i O_2S rozpatrywanego przez nas układu kul.

Tego rodzaju osi, które nazywać będziemy osiami swobodnymi lub trwałymi, jest w każdej bryle na ogół trzy; są one wzajemnie prostopadłe i przecinają się w środku masy bryły. Momenty bezwładności bryły względem tych osi zazwyczaj nie są równe. Oznaczając je przez B_a, B_b, B_c, mamy

$$B_a > B_b > B_c.$$

W przypadkach szczególnych dwa z nich mogą być równe, np. $B_a = B_b$ lub $B_b = B_c$. Wtedy wyznaczone jest dokładnie położenie jednej tylko osi głównej (osi c, gdy $B_a = B_b$, osi a, gdy $B_b = B_c$). Każda prosta, do niej prostopadła i przechodząca przez środek masy bryły, będzie miała własności osi głównej. Ta wyróżniona oś często nazywana jest osią bryły. Tak np. w rozpatrywanym przez nas przykładzie osią bryły jest oś c (O_2S na rys. 87), dla której $B_c = 0$; za oś a lub b możemy wziąć dowolną prostą O_1S lub O'_1S. Gdy $B_a = B_b = B_c$, gdy np. bryła jest jednorodną kulą, własności osi głównej posiada każda prosta, przechodząca przez środek masy; każdy więc układ trzech wzajemnie prostopadłych prostych, przecinających się w środku masy, jest układem osi głównych.

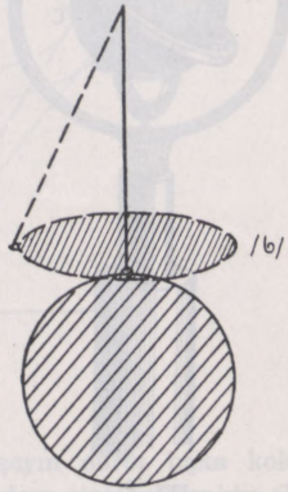


rys. 88

Tą różnicą wartości momentów bezwładności tłumaczy się fakt, że bryła wprawiona w ruch obrotowy i mogąca zmieniać kierunek swej osi obrotu, przechodzą-

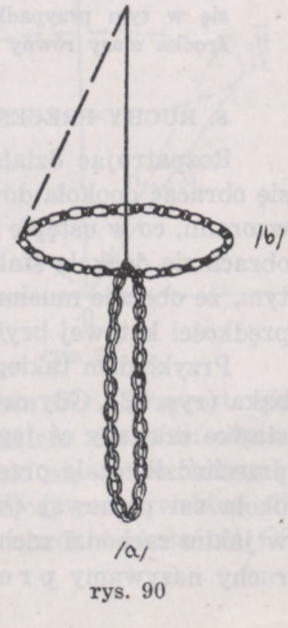
cej przez jej środek masy, ustawia się na skutek chwilowych słabych oddziaływań zewnętrznych tak, aby osi jej obrotu odpowiadał największy moment bezwładności.

Niech *AB* będzie walcem drewnianym, umocowanym na cienkim drucie metalowym, zawieszonym na haczyku wirownicy (rys. 88). Walec, wprawiony w szybki ruch obrotowy, ustawi się prawie dokładnie poziomo tak, że oś jego obrotu (rys. 88) będzie prostopadła względem jego osi geometrycznej, tej bowiem osi obrotu odpowiada największy ze wszystkich momentów bezwładności, obliczanych względem osi, przechodzących przez środek masy. Podobnie tarcza kołowa ustawi się ostatecznie tak, że oś obrotu będzie prostopadła do jej powierzchni (rys. 89). Gdy na wirownicy zawiesimy łańcuch, zacznie on w miarę wzrostu prędkości kątowej rozciągać się, przybierając ostatecznie postać koła (wtedy tylko bowiem siły, z jakimi działają wzajemnie na siebie ogniwa, będą dostatecznie wielkie, aby wytworzyć siły dośrodkowe, potrzebne do utrzymania poszczególnych ogniw w niezmiennej odległości od osi obrotu) i również ustawi się tak, aby jego płaszczyzna była płaszczyzną poziomą.

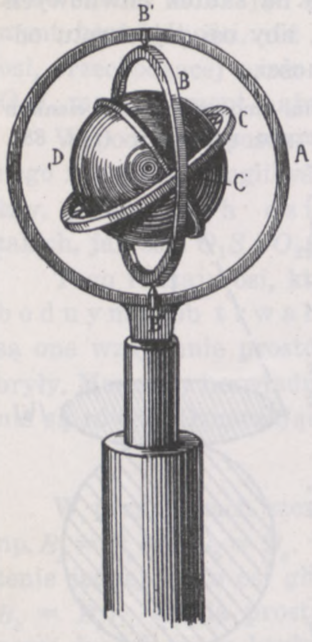


rys. 89

Gdy na bryłę, wprawioną w ruch obrotowy koło którejkolwiek z osi swobodnych, nie działają żadne siły zewnętrzne (lub też takie jedynie, których wypadkowa przechodzi przez środek masy), bryła trwać będzie w tym ruchu nieograniczenie długo. Tę własność posiadają jedynie osi swobodne; ruch obrotowy bowiem koło jakiejkolwiek innej osi powoduje, jak o tym wyżej była mowa, powstanie sił, działających na oś i zmieniających jej położenie, wobec czego dla zachowania niezmiennego kierunku ruchu obrotowego muszą na oś działać równocześnie siły zewnętrzne, wywierane przez łożyska.



rys. 90



rys. 91

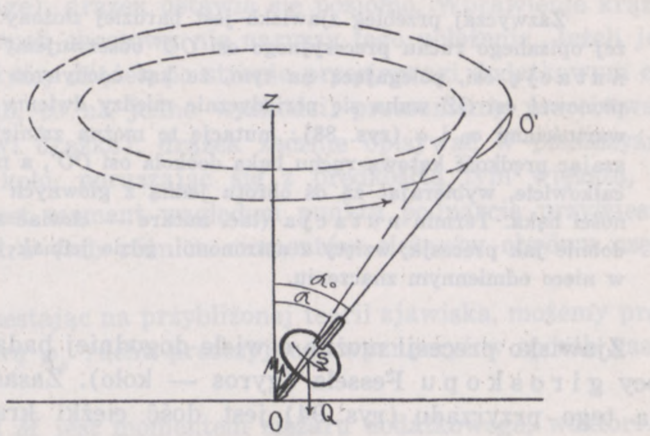
O tych własnościach osi swobodnych możemy się przekonać przy pomocy przyrządu, zbudowanego przez Bohnbergera (1817 r.). Jednorodna metalowa kula *D* (rys. 91) może się obracać koło osi *CC*, przechodzącej przez jej środek geometryczny i opartej na pierścieniu *C*, mogącym się obracać koło osi poziomej *C'C''*. Oś ta oparta jest na pionowym pierścieniu *B*, obracającym się w płaszczyźnie pionowej koło osi *B'B''*, która umocowana jest w pierścieniu *A*, mogącym również się obracać koło osi pionowej. W ten sposób oś obrotu kuli, będąca, jak wynika z rozważań poprzednich, jej osią swobodną, może przyjmować dowolne położenie w przestrzeni (tzw. zawieszenie Cardana). Gdy wprawimy kulę w szybki ruch obrotowy (np. przez nagłe odwinięcie sznurka, nawiniętego wielokrotnie na osi) przy oznaczonym, dowolnym zresztą położeniu osi *CC*, kula, jakkolwiek przesuwalibyśmy przyrząd, zachowa stale niezmienny kierunek obrotu. Nawet jeżeli zaczniemy obracać pierścień zewnętrzny, oś *CC* nie zmieni swego kierunku. Siły bowiem zewnętrzne, działające na kulę, sprowadzają się w tym przypadku do siły ciężkości, której moment względem środka masy równy jest zeru.

8. RUCHY PRECESYJNE. GIROSKOP

Rozpatrując działanie sił zewnętrznych na bryłę, mogącą się obracać dookoła dowolnej osi, posługujemy się tymi samymi wzorami, co w ustępie 3, wyprowadzonymi w założeniu, że bryła obraca się dookoła stałej osi. Różnica polegać będzie jedynie na tym, że obecnie musimy uwzględniać możność zmiany nie tylko prędkości kątowej bryły, lecz również i kierunku osi obrotu.

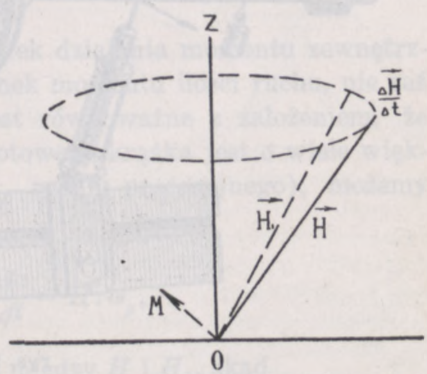
Przykładem takiego ruchu może być ruch obracającego się bąka (rys. 92). Gdy ostrze bąka umieścimy w odpowiedniej podstawce tak, aby oś jego obrotu *OO'*, tworząca z pionem kąt α_0, przechodziła stale przez punkt *O*, drugi koniec osi *O'* opisze dookoła osi pionowej *OZ* koło, poruszając się w tym kierunku, w jakim zachodzi ruch obrotowy dookoła osi *OO'*. Tego rodzaju ruchy nazywamy p r e c e s y j n y m i, zapożyczając termin ten

z astronomii, która używa go przy opisywaniu ruchu ziemi (łac. praecedere — wyprzedzać, iść naprzód).



rys. 92

Momentem zewnętrznym, powodującym obrót bąka koło osi *OZ*, jest moment ciężaru bąka względem stałego punktu *O*. Moment ten jest w danym przypadku prostopadły do płaszczyzny rysunku i skierowany poza nią. Załóżmy, że oś obrotu *OO'* jest jedną z osi swobodnych bąka i że prędkość kątowa ruchu obrotowego bąka dookoła tej osi jest bardzo wielka w porównaniu z prędkością kątową jego ruchu precesyjnego. Wtedy będziemy mogli uważać, że kierunek momentu ilości ruchu bąka jest zgodny z kierunkiem osi obrotu *OO'*; przyrost więc wektora *H* o kierunku zgodnym z kierunkiem momentu siły zewnętrznej będzie powodował przesuwanie się osi w kierunku prostopadłym do płaszczyzny, przechodzącej przez wektor siły ciężkości i chwilową oś obrotu, a więc obrót dookoła osi *OZ*.

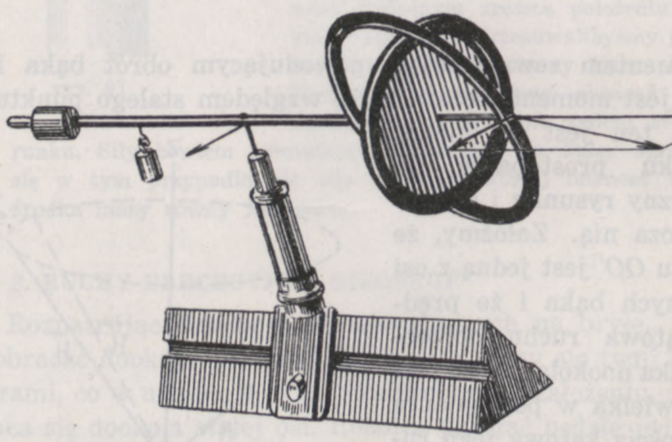


rys. 93

W ostatecznym więc wyniku otrzymamy przesuwanie się środka masy w kierunku prostopadłym do działającej na niego siły.

Zazwyczaj przebieg zjawiska jest bardziej złożony. Oprócz wyżej opisanego ruchu precesyjnego osi OO' obserwujemy jeszcze tzw. n u t a c j ę osi, polegającą na tym, że kąt odchylenia α osi OO' od pionowej osi OZ waha się periodycznie między dwiema granicznymi wartościami α_0 i α (rys. 88); nutację tę można zmniejszyć, zwiększając prędkość kątową ruchu bąka dookoła osi OO', a nawet usunąć całkowicie, wybierając za oś obrotu jedną z głównych osi bezwładności bąka. Termin n u t a c j a (łac. nutare — chwiać się) jest, podobnie jak precesja, wzięty z astronomii, gdzie jednak jest używany w nieco odmiennym znaczeniu.

Zjawisko precesji można o wiele dogodniej badać przy pomocy g i r o s k o p u Fessela (gyros — koło). Zasadniczą częścią tego przyrządu (rys. 94) jest dość ciężki krążek meta-



rys. 94

lowy, mogący się obracać dookoła osi, prostopadłej do jego płaszczyzny i przechodzącej przez środek masy; oś ta jest jedną z osi swobodnych krążka. Oś umocowana jest w pierścieniu, osadzonym na drążku metalowym, mogącym się obracać zarówno koło osi pionowej, jak i poziomej. Drążek zaopatrzony

jest w przeciwwagę, którą można przesuwać wzdłuż drążka. W przypadku, gdy punkt podparcia drążka przypada na środek masy układu (co można osiągnąć, przesuwając odpowiednio przeciwwagę), drążek ustawia się poziomo. Wprawienie krążka w szybki ruch obrotowy nie naruszy tego położenia. Jeżeli jednak obciążymy drążek po stronie przeciwwagi dodatkowym ciężarem (lub, co na jedno wychodzi, przesuniemy przeciwwagę ku końcowi drążka), drążek zacznie opisywać w płaszczyźnie poziomej koło, poruszając się z prędkością tym większą, im większy jest moment względem punktu podparcia przywieszonego ciężaru (lub różnica momentów ciężarów obydwu części drążka).

Poprzestając na przybliżonej teorii zjawiska, możemy prędkość kątową ω_p ruchu precesyjnego wyznaczyć w sposób następujący.

Niech $\vec{M}$ jest momentem ciężaru dodatkowego, wektor $\vec{H}$, mający kierunek ten sam, co oś obrotu krążka, doznaje przyrostu $\Delta\vec{H}$, wobec czego przybiera on wartość $\vec{H}_1$. Mamy

$$\vec{M} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{H}}{\Delta t}. \tag{a}$$

Przypuszczając, że na skutek działania momentu zewnętrznego zmienił się jedynie kierunek momentu ilości ruchu, nie zaś jego wartość liczbowa (co jest równoważne z założeniem, że prędkość kątowa ω ruchu obrotowego krążka jest o wiele większa od prędkości kątowej ω_p ruchu precesyjnego), możemy wzór (a) przepisać w postaci

$$M = H \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = H \,.\, \omega_p,$$

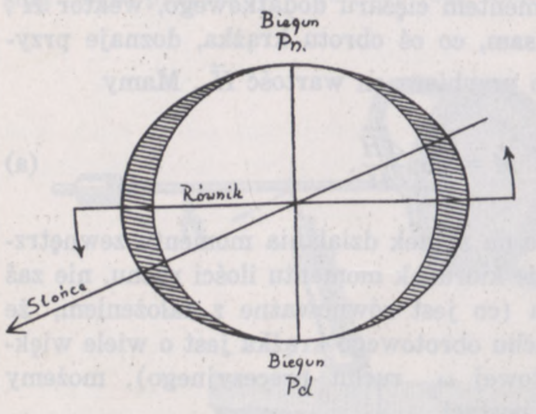
gdyż $\Delta H = H \,.\, \Delta\alpha$, gdzie α kąt między H i H_1, skąd

$$\omega_p = \frac{M}{H} = \frac{M}{B\omega}. \tag{13}$$

Im większy jest moment bezwładności krążka względem jego osi obrotu i im większa jest jego prędkość kątowa, tym mniejsza jest prędkość kątowa precesji.

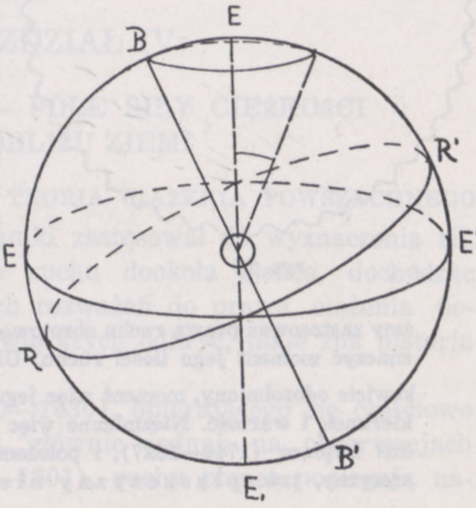
Podobnie można wyjaśnić, dlaczego szybki ruch obrotowy kół roweru uniemożliwia przewrócenie się cyklisty, który by na nieruchomym rowerze nie mógł nawet na chwilę utrzymać równowagi. Siła ciężkości powoduje precesyjny ruch kół rowerowych tak, że środek masy układu porusza się i w tym przypadku prostopadle do kierunku działającej siły, nie zaś w kierunku tej siły, jakby to było przy nieobracających się kołach.

Teoria ruchów precesyjnych pozwala wyjaśnić ważne zjawisko astronomiczne, o którym była mowa wyżej. Tym zjawiskiem jest cofanie się punktów równonocnych, to znaczy punktów przecięcia się pozornej drogi słońca po sklepieniu niebieskim (ekliptyki) z równikiem niebieskim. Załóżmy dla uproszczenia, że ziemia jest bryłą sztywną, obracającą się dookoła jednej ze swoich osi głównych, tej mianowicie, której odpowiada największy moment bezwładności B_a. Gdyby moment względem środka masy sił przyciągających, jakimi słońce działa na ziemię, był równy zeru, oś ziemi zachowywałaby niezmienny kierunek w przestrzeni. W rzeczywistości jednak tak nie jest. Ziemię bowiem możemy sobie wyobrazić jako kulę, na którą nałożona jest powłoka o grubości, wzrastającej od bieguna do równika (rys. 95). Natężenie pola grawitacyjnego słońca (patrz. rozdz. IV) ma w punktach części powłoki, zwróconej do słońca, wartość większą, niż w środku ziemi, wobec czego punkty materialne, stanowiące tę powłokę, doznają względem środka ziemi przyspieszeń w kierunku słońca, wyznaczonych przez różnicę natężeń w środku ziemi i w danych punktach powłoki. Wypadkowa wzbudzonych w ten sposób sił przyłożona jest do środka masy tej części powłoki, a ponieważ ten środek masy nie leży na ogół na prostej łączącej środek ziemi ze środkiem słońca, moment tej wypadkowej względem środka masy ziemi nie jest równy zeru. Analogiczne rozważanie zastosowane do tej części powłoki, która jest odwrócona od słońca, doprowadzi nas do wniosku, że do jej środka masy przyłożona jest siła, skierowana w stronę przeciwną.



rys. 95

Wobec tego działanie słońca na pierścień równoważne jest parze sił, której moment jest prostopadły do płaszczyzny, przechodzącej przez środek masy słońca i chwilową oś obrotu ziemi, co powoduje ruch precesyjny osi obrotu ziemi dookoła osi prostopadłej do płaszczyzny ekliptyki. Punkt przecięcia osi ziemskiej ze sklepieniem niebios, tzw. biegun niebieski *B*, opisuje dookoła bieguna ekliptyki *EE*, znajdującego się w gwiazdozbiorze Smoka, koło *B* (rys. 96). Prędkość tej precesji nie jest stała, gdyż moment siły zewnętrznej zmienia się od wartości największej, jaką ma w chwilach letniego i zimowego przesilenia, do wartości zero w czasie wiosennego i jesiennego porównania dnia z nocą, gdy para sił przechodzi w dwie siły równe, przeciwnie skierowane i działające wzdłuż tej samej prostej. Wahania więc prędkości ruchu precesyjnego, wywołanego przez działanie słońca, mają okres półroczny.



rys. 96

W tym samym kierunku, lecz o wiele silniej, działa księżyc. (Precesja wywołana przez słońce, wynosi w ciągu roku około 16″, przez księżyc — 34″). Podobnie jak działanie słońca, i to działanie podlega okresowym wahaniom, a to na skutek przesuwania się punktów przecięcia drogi księżyca z ekliptyką (tzw. węzłów księżyca), spowodowanego ruchem precesyjnym osi obrotu księżyca. Okres tych wahań wynosi około 18,6 lat, jest więc bardzo mały w porównaniu z okresem 25700 lat, w ciągu którego biegun ziemski opisuje koło precesyjne. Wahania te sprawiają, że droga, opisywana przez biegun, nie jest dokładnie kołowa, lecz przypomina raczej zamkniętą i mało od koła się różniącą linię wężykowatą (rys. 97). Te odchylenia, nazywane przez astronomów nutacjami (w znaczeniu odmiennym od tego, jakie nadawaliśmy temu słowu na str. 144), są w porównaniu z promieniem koła precesyjnego bardzo małe, kąt bowiem, jaki oś ziemska tworzy z osią ekliptyki, jest równy 23° 27′, odchylenia zaś nutacyjne osi ziemskiej nie przekraczają 10″.

Poza tym oś ziemska podlega jeszcze nutacjom właściwym, zmieniającym położenie bieguna na powierzchni ziemi i powstającym stąd, że ziemia nie jest bryłą sztywną i że oś jej obrotu nie jest, ściśle



rys. 97

biorąc, jej osią swobodną. Wahania stąd powstające, zaobserwowane po raz pierwszy przez Chandlera, wynoszą ± 0,3″, okres zaś ich przeszło 400 dni. Wahania te powodują zmiany szerokości geograficznej.

Gdybyśmy podobnie, jak to zrobił Gauss (1777—1855) przy wyznaczaniu ruchu księżyca, zastąpili każdą z planet pierścieniem sztywnym o tej samej masie, co dana planeta, i o promieniu równym promieniowi jej orbity, oraz założyli, że pierścień ten wykonywa jeden całkowity obrót w ciągu czasu, jaki zużywa planeta na obieg dookoła słońca, moglibyśmy zastosować prawa ruchu obrotowego do układu planetarnego i wyznaczyć moment jego ilości ruchu. Układ ten można uważać za całkowicie odosobniony, moment więc jego $\vec{H}$ zachowuje stale niezmienny kierunek i wartość. Niezmienne więc będzie, jak to pierwszy stwierdził Laplace (1749—1827), i położenie prostopadłej do niego płaszczyzny, tzw. płaszczyzny niezmiennej.

ROZDZIAŁ IV

GRAWITACJA — POLE SIŁY CIĘŻKOŚCI W POBLIŻU ZIEMI

1. PRAWA KEPLERA. TEORIA CIĄŻENIA POWSZECHNEGO

Newton zasady mechaniki zastosował do wyznaczenia sił, utrzymujących planety w ruchu dookoła słońca, dochodząc (1687 r.) w wyniku swoich rozważań do prawa ciążenia powszechnego, jednego z największych odkryć, jakie zna historia nauki.

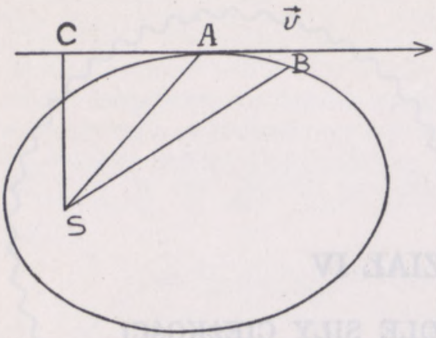
Według Keplera (1570—1630), opierającego się częściowo na własnych obserwacjach, głównie jednak na obserwacjach Tychona de Brahe (1546—1601), ruchy planet podlegają następującym prawom.

Prawo pierwsze: wszystkie planety poruszają się po elipsach, w których wspólnym ognisku znajduje się słońce.

Prawo drugie: promień wodzący planety (tzn. prosta, łącząca planetę ze słońcem) zakreśla w ciągu równych odstępów czasu równe pola (innymi słowy, pole to wzrasta proporcjonalnie do czasu).

Prawo trzecie: kwadraty czasów obiegu dookoła słońca dwu jakichkolwiek planet mają się do siebie, jak trzecie potęgi średnich odległości tych planet od słońca.

Przypuśćmy, że w ciągu czasu Δt planeta przebyła drogę $AB = v\Delta t$ (rys. 98). Pole, opisane w ciągu tego czasu przez promień wodzący SA, równe jest $\frac{1}{2} AB \times SC$, gdzie SC jest prostopadłą, opuszczoną z S na kierunek prędkości (wobec tego, że Δt jest bardzo małe, uważamy odcinek AB za prostoliniowy). Mamy zatem pole $SAB = \frac{1}{2} v \,.\, SC \,.\, \Delta t$.



rys. 98

Według prawa drugiego stosunek pola SAB do czasu. w ciągu którego pole to zostało opisane, jest stały. a więc

$$v \,.\, SC = \text{stałej}.$$

Wtedy jednak stały jest również iloczyn $mv \,.\, SC$, (tzn. moment ilości ruchu planety względem słońca), moment zatem względem słońca siły, działającej na planetę, równy jest zeru (rozdz. III, ust. 3). A ponieważ siła ta nie jest równa zeru, planeta bowiem porusza się po torze krzywoliniowym, prosta, wyznaczająca jej kierunek, musi przechodzić przez słońce. Dla wyznaczenia wartości siły załóżmy, że tor planety jest kołem, w którego środku znajduje się słońce. To założenie nie będzie zbyt odbiegało od rzeczywistości, gdyż eliptyczne tory planet są na ogół mało spłaszczone, tak np. dla ziemi stosunek wielkiej osi elipsy do małej równy jest mniej więcej stosunkowi 1 do 0,9998. (Dla innych planet, z wyjątkiem Wenus i Neptuna, stosunek ten jest większy).

Ruch planety będzie wtedy ruchem jednostajnym, gdyż promienie wodzące będą miały tę samą długość we wszystkich punktach toru. Niech r będzie promieniem toru planety P. Siła dośrodkowa, utrzymująca planetę w ruchu kołowym, równa jest

$$f = \frac{v^2}{r} m_p = \frac{4\pi^2}{T^2} r \,.\, m_p, \qquad \text{(a)}$$

gdzie T — czas obiegu planety dookoła słonca, m_p — jej masa. Z trzeciego prawa Keplera wynika, że

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{r \,.\, r^2}{T^2} = C,$$

gdzie C ma tę samą wartość dla wszystkich planet. Stąd mamy

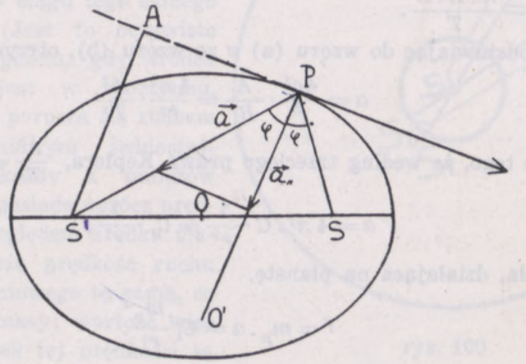
$$\frac{r}{T^2} = \frac{C}{r^2}$$

i po podstawieniu do wzoru (a)

$$f = 4\pi^2 . C \frac{m_p}{r^2} = C_1 \frac{m_p}{r^2} . \quad (1)$$

Siła zatem, działająca na planetę, jest wprost proporcjonalna do jej masy, odwrotnie zaś proporcjonalna do kwadratu jej odległości od słońca.

Niech O będzie środkiem geometrycznym toru planety, S i S' — jej ogniskami i niech w S znajduje się słońce (rys. 99).



rys. 99

Przyspieszenie normalne w punkcie P toru jest równe, jak wiadomo (rozdz. I, ust. 10),

$$a_n = \frac{v^2}{\varrho},$$

gdzie ρ jest promieniem krzywizny w danym punkcie toru. To przyspieszenie jest składową w kierunku promienia krzywizny przyspieszenia w kierunku prostej PS, mamy zatem

$$a = \frac{a_n}{\cos\varphi} = \frac{v^2}{\varrho\cos\varphi}.$$

Promień krzywizny elipsy jest równy, czego tu dowodzić nie będziemy,

$$\varrho = \frac{B^2}{A\cos^3\varphi},$$

gdzie B — mała, A — wielka oś elipsy. Stąd

$$a = \frac{v^2 . A}{B^2}\cos^2\varphi. \quad \text{(a)}$$

Oznaczmy przez c wartość pola, opisanego w ciągu jednostki czasu przez promień wodzący $SP = r$. Zgodnie z drugim prawem Keplera c jest wielkością dla danej planety stałą.

Ze wzoru

$$cdt = \frac{1}{2} v . SA . dt = \frac{1}{2} v . r \cos \varphi dt$$

znajdujemy

$$v = \frac{2c}{r \cos \varphi}. \tag{b}$$

W ciągu czasu T promień opisuje pole elipsy równe $\pi . A . B$, wobec czego $c = \frac{\pi . A . B}{T}$.

Podstawiając do wzoru (a) v ze wzoru (b), otrzymujemy

$$a = \frac{4c^2}{r^2} \cdot \frac{A}{B^2} = \frac{4\pi^2}{r^2} \cdot \frac{A^3}{T^2}$$

i wobec tego, że według trzeciego prawa Keplera, $\frac{A^3}{T^2} = C$,

$$a = 4\pi^2 . C \cdot \frac{1}{r^2} = C_1 \cdot \frac{1}{r^2},$$

skąd siła, działająca na planetę,

$$f = m_p . a = C_1 \frac{m_p}{r^2}. \tag{1 a}$$

Przyjmijmy za Newtonem, że źródłem siły, utrzymującej planetę w ruchu krzywoliniowym, jest słońce; wtedy, w myśl trzeciej zasady Newtona, sile tej towarzyszy siła równa i przeciwnie skierowana, z jaką planeta działa na słońce. Zakładając, że i ona również jest proporcjonalna do masy ciała, podlegającego jej działaniu, otrzymamy

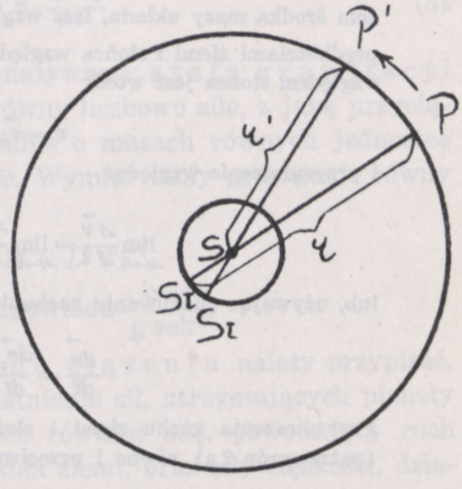
$$C_2 \frac{m_s}{r^2} = C_1 \frac{m_p}{r^2},$$

gdzie m_s jest masą słońca. Ta równość może być spełniona tylko wtedy, gdy $C_2 = Cm_p$ i $C_1 = Cm_s$, gdy więc mamy

$$f = C \frac{m_s m_p}{r^2}. \tag{2}$$

Z wzajemności działań słońca i planety wynika, że w układzie odosobnionym, złożonym z planety i słońca, zarówno jedno, jak i drugie ciało porusza się względem wspólnego środka masy, który zgodnie z zasadą zachowania ilości ruchu (rozdz. II, ust. 16) jest albo w spoczynku, albo w prostoliniowym ruchu jednostajnym. Niech P i $Sł$ oznaczają chwilowe położenia planety i słońca (rys. 100).

Z warunku, że środek masy musi zawsze leżeć na prostej, łączącej dwa dane punkty materialne, dzieląc ją na odcinki, odwrotnie proporcjonalne do mas, wynika, że kąt, o jaki w ciągu dowolnego czasu odchyli się od pierwotnego położenia prosta *SP*, jest równy kątowi, o jaki w tym samym czasie odchyli się w kierunku przeciwnym prosta *SłS* tak, że gdy planeta porusza się dookoła środka masy *S* po torze kołowym, a więc gdy odcinek *SP* ma długość stałą, słońce również opisze koło, przebiegając je w ciągu tego samego czasu. (Jest to oczywiste w przypadku, gdy środek masy jest w spoczynku, gdy zaś porusza się ruchem prostoliniowym jednostajnym, każdy z punktów układu posiada oprócz prędkości względem środka masy jeszcze prędkość ruchu prostoliniowego tę samą, co środek masy; wartość więc i kierunek tej prędkości są dla wszystkich punktów układu jednakowe; ten wspólny ruch prostoliniowy jednostajny w niczym nie zmienia położenia punktów układu względem środka masy).



rys. 100

Promień torów planety i słońca wyznaczymy ze wzorów

$$\frac{r'}{r''} = \frac{m_s}{m_p}; \quad r' + r'' = r,$$

skad mamy

$$r' = \frac{m_s}{m_s + m_p}\, r\,; \quad r'' = \frac{m_p}{m_s + m_p}\, r \;\text{ i }\; r = \frac{m_s + m_p}{m_s}\, r'.$$

Wzór (2) możemy zatem przepisać w postaci

$$f = C\,\frac{m_s \cdot m_p}{r^2} = C\left(\frac{m_s}{m_s + m_p}\right)^2 \frac{m_s \cdot m_p}{r'^2}. \qquad (2\,\mathrm{a})$$

Planeta więc porusza się tak, jak gdyby działał na nią siłą przyciągającą środek masy, w którym byłaby skupiona masa

$$m = \left(\frac{m_s}{m_s + m_p}\right)^2 m_s.$$

Masa m mało na ogół różni się od m_s, masa bowiem słońca jest wielekroć większa od masy poszczególnej planety. Kładąc masę ziemi równą

jednostce, otrzymujemy na masę słońca liczbę 333432. Dla tych więc dwu ciał niebieskich mamy

$$m = \left(\frac{333\,432}{333\,433}\right)^2 m_s = 0{,}9967\, m_s .$$

Obserwowany przez nas ruch planety jest jednak ruchem nie względem środka masy układu, lecz względem słońca. Niech $\vec{v}_z$ i $\vec{v}_s$ będą prędkościami ziemi i słońca względem środka masy, prędkość $\vec{v}$ ziemi względem słońca jest wtedy

$$\vec{v} = \vec{v}_z - \vec{v}_s$$

i przyspieszenie względne

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_z}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_s}{\Delta t}$$

lub, używając znakowania rachunku nieskończonościowego

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_z}{dt} - \frac{d\vec{v}_s}{dt}.$$

Przyspieszenia ruchu ziemi i słońca są spowodowane przez siły (patrz wzór 2 a) równe i przeciwnie skierowane. Mamy zatem

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{f}}{m_z} + \frac{\vec{f}}{m_s} = \frac{m_s + m_z}{m_z m_s} \vec{f}.$$

Napiszmy, że $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{\vec{f'}}{m_z}$,

$$\vec{f'} = \frac{m_s + m_z}{m_s} \vec{f}$$

oraz z uwagi, że $f = C\,\dfrac{m_s m_z}{r^2}$

$$f' = C\,\frac{(m_s + m_z)\, m_z}{r^2}. \tag{2 b}$$

Ruch ziemi względem słońca zachodzi zatem tak, jak gdyby na ziemię działała nie masa m_s, lecz masa $m_s + m_z$. We wzorze (1) i (1 a) wielkość C_1 jest równa nie Cm_s, lecz $C\,(m_s + m_z)$, jest więc zależna od masy przyciąganej planety. Stąd wynika, że i stosunek $\dfrac{A^3}{T^2}$ nie jest dokładnie ten sam dla wszystkich planet i że przeto trzecie prawo Keplera jedynie w przybliżeniu wyraża istotne ruchy planet i obowiązywałoby ściśle tylko wtedy, gdyby masa słońca była nieskończenie wielka w porównaniu z masami planet.

Wzór (2) jest, według Newtona, szczególnym przypadkiem prawa ogólniejszego, według którego wszystkie ciała przyciągają się wzajemnie siłami, które dla punktów materialnych o masach m_1 i m_2 można wyrazić wzorem

$$f = k\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{3}$$

gdzie k — spółczynnik stały, nazywamy stałą grawitacji (łac. gravitas — ciężkość), równy liczbowo sile, z jaką przyciągają się dwa punkty materialne o masach równych jednostce z odległości równej jednostce. Wymiar stały grawitacji równy jest, według wzoru (3)

$$[k] = M^{-1} L^3 T^{-2},$$

czemu w układzie C. G. S. odpowiada $\dfrac{\text{cm}^3}{\text{g sek}^2}$.

Temu powszechnemu ciążeniu należy przypisać, według Newtona, nie tylko istnienie sił, utrzymujących planety w ruchu dookoła słońca, lecz również siłę, powodującą ruch krzywoliniowy księżyca dookoła ziemi, oraz siły ciężkości, działające na ciała znajdujące się w pobliżu ziemi.

2. PRZYCIĄGANIE, WYWIERANE NA PUNKT MATERIALNY PRZEZ WARSTWĘ KULISTĄ I KULĘ

We wszystkich tych przypadkach obserwowana przez nas siła jest wypadkową sił, z jakimi działają na siebie wzajemnie elementarne masy, na które moglibyśmy podzielić przyciągające się ciała.

Niech m będzie niewielką masą, skupioną w punkcie materialnym, na który działa dane ciało. Rozbijmy ciało na tak małe elementy objętości dv, abyśmy każdy z nich mogli uważać za punkt materialny, i oznaczmy gęstość ich przez ρ, wtedy masa każdego z nich wynosi ρdv i siła przyciągająca, jaką działa na punkt materialny m, jest, zgodnie ze wzorem (3), równa $k\dfrac{m\,.\,\rho\,dv}{r^2}$ i skierowana wzdłuż prostej, łączącej dany element objętości z punktem materialnym. Oznaczmy kąty, jakie ta prosta tworzy z osiami spółrzędnych, przez α, β, γ. Na wartości składowych w kierunku osi otrzymamy wtedy wzory

$$df_x = k\frac{m\,.\,\rho\,dv}{r^2}\cos\alpha\,;\quad df_y = k\frac{m\,.\,\rho\,dv}{r^2}\cos\beta\,;\quad df_z = k\frac{m\,\rho\,dv}{r^2}\cos\gamma.$$

Sumując składowe o tym samym kierunku, otrzymamy na wartości składowych siły f, z jaką ciało działa na punkt materialny, wzory

$$f_x = km \int \frac{\varrho\, dv}{r^2} \cos \alpha ; \; f_y = km \int \frac{\varrho\, dv}{r^2} \cos \beta ; \; f_z = km \int \frac{\varrho\, dv}{r^2} \cos \gamma ,$$

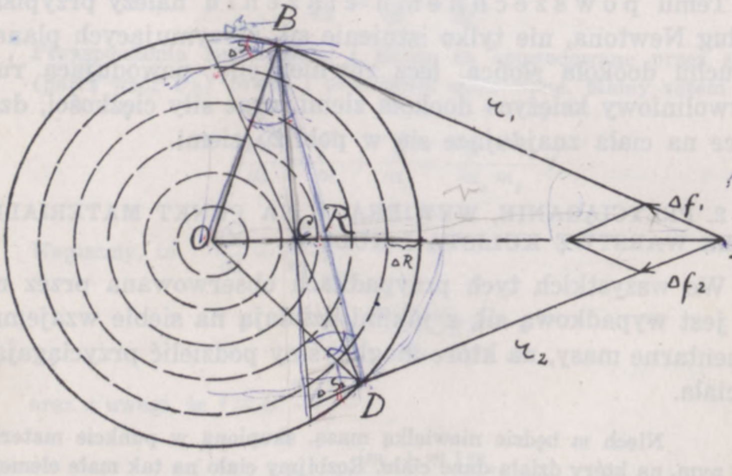
skąd

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}$$

i kąty a, b, c, jakie tworzy z osiami spółrzędnych

$$\cos a = \frac{f_x}{f} ; \quad \cos b = \frac{f_y}{f} ; \quad \cos c = \frac{f_z}{f} .$$

W przypadku, gdy ciało ma kształt kulisty, wyznaczenie wypadkowej elementarnych sił przyciągania nie przedstawia szczególnych trudności. Podzielmy ciało to kulami, opisanymi ze środka, na współśrodkowe warstwy o bardzo małej grubości ΔR (rys. 101) i wyznaczmy siły, jakimi każda z tych warstw przy-



rys. 101

ciąga zewnętrzny punkt materialny A, odległy o r od środka kuli. Na prostej OA, łączącej środek kuli z punktem A, obierzmy taki punkt C, abyśmy mieli

$$\frac{OA}{R} = \frac{R}{OC}, \tag{a}$$

gdzie R promień kuli. Przez punkt C przeprowadźmy w dowolnym kierunku bardzo cienki stożek BCD, który wytnie w roz-

patrywanej przez nas warstwie (niech nią będzie np. zewnętrzna warstwa kuli) bardzo małe elementy objętości $\Delta v_1 = \Delta S_1 . \Delta R$ i $\Delta v_2 = \Delta S_2 . \Delta R$, gdzie ΔS_1 i ΔS_2 są elementami powierzchni warstwy, wyciętymi przez stożek. Masy tych elementów są odpowiednio równe $\varrho \Delta S_1 \Delta R$ i $\varrho \Delta S_2 \Delta R$, gdzie ϱ — gęstość warstwy, siły zatem, jakimi działają na masę m punktu materialnego A

$$\Delta f_1 = k \frac{\varrho \Delta S_1 \Delta R}{r_1^2} m \text{ i } \Delta f_2 = k \frac{\varrho \Delta S_2 \Delta R}{r_2^2} m. \tag{b}$$

Opiszmy z punktu C, jako ze środka kule o promieniach $l_1 = CB$ i $l_2 = CD$. Stożek BCD wytnie z tych kul powierzchnie $\Delta\sigma_1$ i $\Delta\sigma_2$. Jeżeli przez $\Delta\omega$ oznaczymy powierzchnię, którą stożek wycina w kuli, opisanej z C promieniem równym jedności — powierzchnia ta jest miarą tzw. k ą t a b r y ł o w e g o, odpowiadającego danemu stożkowi — powierzchnie $\Delta\sigma_1$ i $\Delta\sigma_2$ będą odpowiednio równe

$$\Delta\sigma_1 = l_1^2 \Delta\omega \text{ i } \Delta\sigma_2 = l_2^2 \Delta\omega.$$

Powierzchnie te tworzą z elementarnymi powierzchniami warstwy ΔS_1 i ΔS_2 kąty jednakowe. Trójkąt bowiem BOD jest równoramienny, kąt zatem $OBD = \alpha$ równy jest kątowi ODB, a ponieważ BD jest prostopadłe do $\Delta\sigma_1$ i $\Delta\sigma_2$, OB zaś — do ΔS_1, OD — do ΔS_2, kąty między $\Delta\sigma_1$ i ΔS_1 oraz między $\Delta\sigma_2$ i ΔS_2 są równe kątom OBD i ODB, a więc każdy z nich równy jest α. Możemy przeto napisać

$$\Delta\sigma_1 = \Delta S_1 \cos\alpha \text{ i } \Delta\sigma_2 = \Delta S_2 \cos\alpha$$

stad

$$\Delta S_1 = \frac{l_1^2 \Delta\omega}{\cos\alpha} \text{ i } \Delta S_2 = \frac{l_2^2 \Delta\omega}{\cos\alpha}.$$

Podstawiając te wartości do wzorów (b), otrzymamy

$$\Delta f_1 = k \frac{\varrho \Delta R . l_1^2 \Delta\omega}{r_1^2 \cos\alpha \cdot} m \quad \text{i} \quad \Delta f_2 = k \frac{\varrho \Delta R l_2^2 \Delta\omega}{r_2^2 \cos\alpha} m. \tag{c}$$

Z podobieństwa trójkątów OBC i OBA, posiadających wspólny kąt BOA i boki (wzór a) wzajemnie proporcjonalne, wynika, że

$$\frac{CB}{BA} = \frac{OB}{OA} \text{ lub } \frac{l_1}{r_1} = \frac{R}{r}. \tag{d}$$

Podobnie z podobieństwa trójkątów *ODC i ODA* otrzymamy

$$\frac{l_2}{r_2} = \frac{R}{r}.$$

Wzory (c) będziemy mogli zatem przepisać w postaci

$$\Delta f_1 = k\frac{\varrho \Delta R . R^2 \Delta \omega}{r^2 \cos \alpha} m \quad \text{i} \quad \Delta f_2 = k\frac{\varrho \Delta R . R^2 \Delta \omega}{r^2 \cos \alpha} m.$$

Siły te są więc równe i kierunki ich tworzą z prostą OA jednakowe kąty α, jak to wynika bezpośrednio z równości stosunków

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OB}{OA}.$$

Wypadkowa ich zatem ma kierunek prostej OA i równa jest sumie rzutów sił Δf_1 i Δf_2 na tę prostą

$$\Delta f = \Delta f_1 \cos \alpha + \Delta f_2 \cos \alpha = k \cdot \frac{\varrho \Delta R . R^2 . 2 \Delta \omega}{r^2} m.$$

Wartość i kierunek tej wypadkowej nie zależy zupełnie od kierunku stożka, przeprowadzonego przez punkt C. Jeżeli więc w podobny sposób podzielimy całą warstwę kulistą na elementy objętości, każda ich para działać będzie na masę m siłą o tej samej wartości i tak samo skierowaną. Działanie więc warstwy wyrazi się ich sumą arytmetyczną

$$f = k\frac{m}{r^2} \varrho R^2 . \Delta R \Sigma 2 \Delta \omega.$$

$\Sigma 2 \Delta \omega$ jest sumą wszystkich kątów bryłowych, jakie możemy przeprowadzić z punktu C. Suma ta równa jest 4π, taką bowiem wartość ma powierzchnia kuli, opisana z C promieniem równym jednostce. Mamy przeto

$$f = k\frac{m}{r^2} 4\pi R^2 \Delta R . \varrho$$

i wobec tego, że $4\pi R^2 \Delta R$ jest objętością v' warstwy, $\varrho v'$ — jej masą Δm_c

$$f = k\frac{m \Delta m_c}{r^2}. \qquad \text{(e)}$$

Warstwa zatem przyciąga punkt materialny A tak, jak gdyby cała jej masa skupiona była w jej środku geometrycznym. Stosując analogiczne rozumowanie do wszystkich warstw, na jakie podzieliliśmy kulę, znajdziemy, że siła, z jaką kula działa na punkt materialny A, jest skierowana wzdłuż prostej OA i równa

$$F = \Sigma f = k \frac{m}{r^2} \Sigma \Delta m_c = k \frac{m_c m}{r^2} \quad \text{(f)}$$

a więc równa sile, z jaką by działała masa m_c, skupiona w środku geometrycznym kuli.

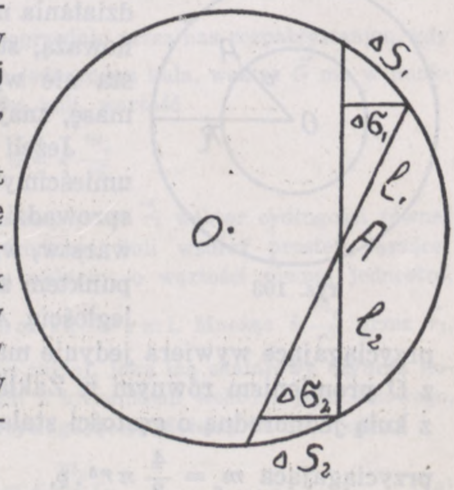
Z taką samą siłą, lecz przeciwnie skierowaną, działa punkt materialny A na kulę. Siła ta przyłożona jest do środka geometrycznego kuli. Stąd wynika, że gdy punkt ten stanowić będzie elementarną część drugiego ciała kulistego, wypadkowa wszystkich sił, jakimi druga kula działa na pierwszą, będzie miała kierunek prostej, łączącej ich środki, i będzie równa

$$F_1 = k \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{(g)}$$

gdzie m_1 i m_2 są masami kul.

Wniosek ten obowiązywać będzie zarówno w przypadku kul jednorodnych o gęstości stałej, jak i w przypadku, gdy gęstość ich zmienia się wraz z odległością od środka, a więc, gdy ma wartość stałą w każdej z warstw współśrodkowych, na które dzielimy kule.

Załóżmy teraz, że punkt materialny A znajduje się gdziekolwiek wewnątrz warstwy kulistej. Podobnie jak poprzednio, przeprowadźmy przez punkt A stożek, który wytnie z warstwy elementy powierzchni ΔS_1 i ΔS_2 o objętościach



$\Delta S_1 \,.\, \Delta R$ i $\Delta S_2 \,.\, \Delta R$,

rys. 102

gdzie ΔR grubość warstwy (nie oznaczona na rys. 102). Rozumowanie identyczne z tym, jakim posługiwaliśmy się wyżej, pozwoli nam stwierdzić, że powierzchnie $\Delta\sigma_1$ i $\Delta\sigma_2$, jakie w kulach, opisanych z A promieniami l_1 i l_2, wytnie stożek, przechodzący przez A, są odpowiednio równe

$$\Delta\sigma_1 = \Delta S_1 \cos\alpha \quad \text{i} \quad \Delta\sigma_2 = \Delta S_2 \,.\, \cos\alpha.$$

Siły, wywierane na masę m, umieszczoną w punkcie A, przez te dwa elementy warstwy, są skierowane w strony przeciwne, przy czym

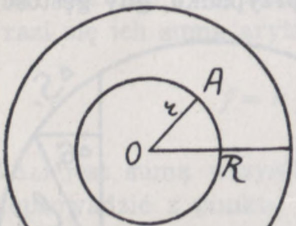
$$\Delta f_1 = k\frac{\varrho\Delta S_1 \Delta R}{l_1^2} m \quad \text{i} \quad \Delta f_2 = k\frac{\varrho\Delta S_2 \,.\, \Delta R}{l_2^2} m$$

lub $$\Delta f_1 = k\frac{\varrho\Delta\sigma_1 \Delta R}{l_1^2 \cos\alpha} m \quad \text{i} \quad \Delta f_2 = k\frac{\varrho\Delta\sigma_2 \Delta R}{l_2^2 \cos\alpha} m$$

oraz z uwagi, że $\Delta\sigma_1 = l_1^2 \Delta\omega$ i $\Delta\sigma_2 = l_2^2 \Delta\omega$

$$\Delta f_1 = k\varrho\frac{l_1^2 \Delta R \Delta\omega}{l_1^2 \cos\alpha} m = k\varrho\frac{\Delta R \Delta\omega}{\cos\alpha} m \quad \text{i} \quad \Delta f_2 = k\varrho\frac{\Delta R \Delta\omega}{\cos\alpha} \cdot m.$$

Siły te są równe, wypadkowa więc ich równa jest zeru. A ponieważ całą warstwę kulistą możemy podzielić na pary takich elementarnych objętości, których działania na masę m wzajemnie się równoważą, stwierdzamy, że warstwa kulista nie wywiera żadnego działania na masę, znajdującą się wewnątrz niej.



rys. 103

Jeżeli więc punkt materialny A umieścimy wewnątrz kuli, działanie jej sprowadzi się do działania tych jej warstw, względem których punkt A jest punktem zewnętrznym. Niech r jest odległością A od O (rys. 103). Działanie przyciągające wywiera jedynie masa, skupiona w kuli, opisanej z O promieniem równym r. Zakładając, że mamy do czynienia z kulą jednorodną o gęstości stałej ϱ, możemy napisać, że masa

przyciągająca $m_c = \frac{4}{3}\pi r^3 \,.\, \varrho,$

skąd

$$F = k \cdot \frac{m_c \cdot m}{r^2} = k \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho}{r^2} m = \frac{4}{3} k \pi \varrho m \cdot r. \quad \text{(h)}$$

Siła przyciągania będzie w tym przypadku proporcjonalna do odległości przyciąganej masy od geometrycznego środka kuli.

3. POLE GRAWITACYJNE. NATĘŻENIE POLA. POTENCJAŁ GRAWITACYJNY

Jak wynika z założeń teorii ciążenia powszechnego, działanie przyciągające, wywierane przez dany układ punktów materialnych na niewielką w porównaniu z masą układu przyciągającego masę m punktu materialnego, którego działanie na przyciągający układ można pominąć, wyraża się zawsze w postaci iloczynu

$$\vec{f} = \vec{G} \cdot m, \quad (4)$$

gdzie $\vec{G}$ jest wielkością, zależną jedynie od konfiguracji przyciągającego układu i od położenia punktu przyciąganego względem danego układu, niezależną zaś od wartości masy m. Przy niezmiennej konfiguracji układu wektor $\vec{G}$ ma w każdym punkcie otaczającej układ przestrzeni oznaczoną niezmienną wartość.

Tak np. w przypadku poprzednio przez nas rozpatrywanym, gdy układem przyciągającym jest jednorodna kula, wektor $\vec{G}$ ma w punkcie A, odległym o r od środka kuli, wartość

$$G = k \frac{m_c}{r^2}$$

(patrz. wzór f ust. 2). Oznaczmy przez $\vec{r}_1$ wektor o długości równej jednostce, skierowany ku środkowi kuli wzdłuż prostej, łączącej punkt A z O. Tego rodzaju wektory, o wartości równej jednostce, nazywamy wektorami j e d n o s t k o w y m i. Mnożąc $k \frac{m_c}{r^2}$ przez $\vec{r}_1$, otrzymamy wektor o wartości takiej, jaką ma skalarowy czynnik iloczynu, i o kierunku zgodnym z kierunkiem wektora jednostkowego, a więc z kierunkiem siły przyciągającej. Możemy zatem napisać

$$\vec{G} = k \frac{m_c}{r^2} \vec{r}_1. \quad (4a)$$

Gdy znamy wartość i kierunek $\vec{G}$ we wszystkich punktach otaczającej układ przyciągający przestrzeni, siłę, z jaką układ przyciąga masę m punktu materialnego, umieszczonego w dowolnym punkcie tej przestrzeni, znajdziemy bezpośrednio ze wzoru (4). Przestrzeń, w której wektor $\vec{G}$ posiada wartość różną od zera, nazywamy p o l e m s i ł g r a w i t a c y j n y c h lub prościej p o l e m g r a w i t a c y j n y m, wektor zaś $\vec{G}$ — n a t ę ż e n i e m p o l a.

Temu wyłącznie formalnemu pojęciu pola, wprowadzonemu jedynie dla ułatwienia rachunku, można by przeciwstawić inne, zakładając, że wektor $\vec{G}$ charakteryzuje te zmiany fizycznych własności przestrzeni, jakie spowodowało umieszczenie w niej układu przyciągającego. Masa m służyłaby jedynie do ujawnienia, pod postacią działań mechanicznych, doznawanych przez masę m, tych zmian własności fizycznych, jakich doznało pole i jakie istnieją niezależnie od tego, czy masa m znajduje się, czy też nie znajduje się w polu. Wprowadzenie tej masy do pola może, co najwyżej, utrudnić nieco badanie pola początkowego. Masa ta bowiem, działając również siłami przyciągającymi, wytwarza własne pole grawitacyjne, a więc, zgodnie z założeniem, na swój sposób zmienia własności fizyczne otaczającej ją przestrzeni. Tej trudności można uniknąć, używając tak, jak uczyniliśmy wyżej, do badania pola masy dostatecznie małej, abyśmy mogli pominąć jej działanie grawitacyjne. Przy takim rozumieniu pola siły grawitacyjne stają się funkcjami zmian jego własności fizycznych; masy zaś przyciągające jedynie czynnikami, powodującymi te zmiany. Założenia Newtona, dotyczące ciążenia powszechnego, nie usprawiedliwiają jednak takiej interpretacji, dlatego też w dalszym rozumowaniu poprzestaniemy na tym określeniu pola, jakie podane zostało w tekście.

Wymiar natężenia znajdziemy ze wzoru (4)

$$[G] = [f]M^{-1} = LT^{-2} \tag{5}$$

jako równy wymiarowi przyspieszenia.

Niech x, y, z oznaczają spółrzędne punktu przestrzeni, dla którego wyznaczamy $\vec{G}$. Przy niezmiennej konfiguracji układu wartość i kierunek $\vec{G}$ są zależne jedynie od spółrzędnych punktu tak, że składowe wektora $\vec{G}$ w kierunku osi spółrzędnych można przedstawić w postaci

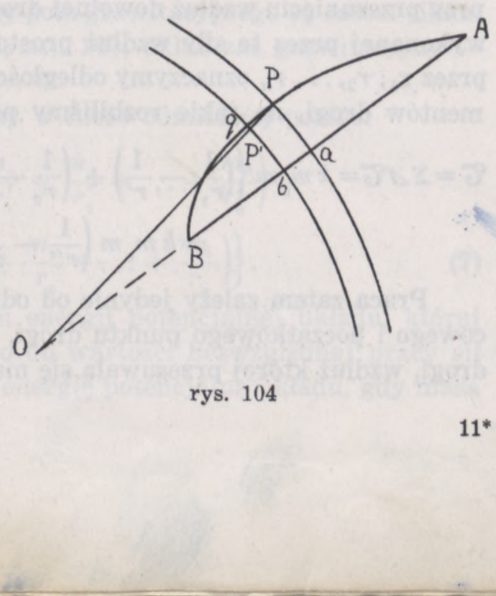
$$G_x = f_1(x, y, z); \quad G_y = f_2(x, y, z); \quad G_z = f_3(x, y, z).$$

Tego rodzaju wielkości nazywamy f u n k c j a m i p u n k t u.

Przypuśćmy, że punkt materialny, umieszczony w polu grawitacyjnym, jest całkowicie swobodny, tzn. nie podlega działaniu żadnych innych sił poza siłami pola i że początkowa jego prędkość równa jest zeru. Punkt ten, poruszając się pod działaniem sił grawitacyjnych, opisze drogę, której kierunek będzie zawsze zgodny z kierunkiem natężenia pola. Tor takiego punktu wyznacza nam tzw. linię sił. W przypadku, gdy pole jest wytworzone przez punkt materialny (lub jednorodną kulę, lub wreszcie kulę, której gęstość zmienia się z odległością od środka — patrz. ust. 2), linie sił są liniami prostymi tak, że natężenie we wszystkich punktach pola, leżących na którejkolwiek z tych prostych, ma ten sam kierunek. W przypadku ogólniejszym, gdy linia sił jest linią krzywą, kierunek natężenia w dowolnym punkcie pola wyznaczony jest przez kierunek stycznej w tym punkcie do linii sił, przechodzącej przez punkt. Kierunek natężenia jest w ten sposób ściśle oznaczony, gdyż przez dany punkt pola może przechodzić tylko jedna linia sił, w przeciwnym bowiem razie masa *m*, umieszczona w punkcie przecięcia się linij sił, mogłaby się poruszać pod działaniem sił grawitacyjnych w różnych kierunkach, co jest, oczywiście, niemożliwe.

Gdy prędkość początkowa punktu materialnego nie jest równa zeru, tor punktu w najprostszym przypadku pola, wytworzonego przez jednorodną kulę, jest jednym z przecięć stożkowych. Torem tym jest elipsa, gdy początkowa energia ruchu punktu ma wartość mniejszą od pracy, potrzebnej do przesunięcia punktu poza granice pola (patrz. niżej), — parabola, gdy energia równa jest tej pracy, hiperbola, gdy jest od tej pracy większa.

Niech *ABO* będzie jedną z linij sił pola, wytworzonego przez punkt materialny o masie m_c (rys. 104) i niech siły pola przesuwają masę *m* wzdłuż dowolnej drogi *APB* z punktu *A*, odległego o r' od *O*, do punktu *B*, odległego od *O* o r''. Wobec tego, że siła grawitacyjna posiada w różnych punktach tej drogi różne wartości, praca jej jest sumą prac



rys. 104

elementarnych, wykonanych na bardzo małych odcinkach Δs, na jakie tę drogę dzielimy. Niech jednym z tych odcinków jest odcinek $Pq = \Delta s$. Opiszmy z punktu O koła promieniami OP i Oq i niech a, b będą punktami przecięcia się tych kół z prostą AB. Promień OP przetnie koło, przechodzące przez q, w punkcie P', odległym o $OP - OP' = Oa - Ob = ab$ od punktu P. Przyjmując, że element drogi Δs jest dostatecznie mały, abyśmy mogli go uważać za odcinek linii prostej, znajdziemy, że

$$\Delta \mathcal{T} = f \,.\, \Delta s \,.\, \cos(\vec{f}, \vec{\Delta s})$$

lub z uwagi, że siła grawitacyjna w punkcie P ma kierunek prostej PO, będącej linią sił, przechodzącą przez dany punkt drogi

$$\Delta \mathcal{T} = f \,.\, PP' = f \,.\, ab. \tag{a}$$

Wartość siły, zależna od odległości danego punktu od punktu O, jest ta sama w punkcie P, co w punkcie a, i w punkcie P', co w punkcie b, praca zatem elementarna, wykonana wzdłuż elementu krzywej Δs, jest równa pracy, wykonanej na odcinku linii sił między punktami, leżącymi w tej samej odległości od O, co początkowy i końcowy punkt elementu Δs. Pracę tę wyznaczymy, zakładając, że siła działająca ma na odcinku ab wartość stałą, równą średniej geometrycznej wartości w punktach a i b, których odległości od punktu O niech będą równe r_{p-1} i r_p.

$$\Delta \mathcal{T} = k \frac{m_c m}{r_{p-1} r_p} (r_{p-1} - r_p) = k m_c m \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_{p-1}} \right).$$

Postępując w ten sam sposób z pozostałymi elementami drogi, znajdziemy, że praca, wykonana przez siły grawitacyjne przy przesunięciu wzdłuż dowolnej drogi APB, równa jest pracy, wykonanej przez te siły wzdłuż prostoliniowej drogi AB. Jeżeli przez $r_1, r_2, \ldots r_n$ oznaczymy odległości od O poszczególnych elementów drogi, na jakie rozbiliśmy prostoliniowy odcinek AB,

$$\mathcal{T} = \Sigma \Delta \mathcal{T} = k m_c m \left\{ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'} \right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{r''} - \frac{1}{r_n} \right) \right\} =$$

$$= k m_c m \left(\frac{1}{r''} - \frac{1}{r'} \right). \tag{6}$$

Praca zatem zależy jedynie od odległości od punktu O końcowego i początkowego punktu drogi, nie zależy zaś od kształtu drogi, wzdłuż której przesuwała się masa m.

To rozumowanie wtedy tylko jest całkowicie ścisłe, gdy elementy drogi dr są nieograniczenie małe. Działanie siły przyciągającej powoduje zmniejszanie się odległości r masy m od punktu O. Pracy dodatniej, wykonanej przez siłę grawitacyjną, odpowiada ujemna wartość dr. Nieograniczenie mała praca, wykonana na tym odcinku, równa jest zatem

$$d\mathcal{T} = -k\frac{m_c m}{r^2}dr,$$

praca zaś całkowita

$$\mathcal{T} = -k m_c m \int_{r'}^{r''} \frac{dr}{r^2} = k m_c m\left(\frac{1}{r''} - \frac{1}{r'}\right).$$

W przypadku, gdy układ przyciągający składa się z n punktów materialnych, pracę, wykonaną przez wypadkową sił grawitacyjnych przy przesunięciu punktu materialnego m z punktu pola, odległego odpowiednio o $r_1, r_2, \ldots r_n$ od poszczególnych mas, wytwarzających pole, do punktu, dla którego analogiczne odległości są $r'_1, r'_2, \ldots r'_n$, wyznaczymy, biorąc, zgodnie z twierdzeniem ust. 8 rozdz. II, sumę prac sił składowych

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i = km\left\{m_1\left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r_1}\right) + \right.$$

$$\left. + m_2\left(\frac{1}{r'_2} - \frac{1}{r_2}\right) + \ldots + m_n\left(\frac{1}{r'_n} - \frac{1}{r_n}\right)\right\}, \tag{6 a}$$

gdzie $m_1, m_2, \ldots m_n$ są masami poszczególnych punktów układu. I w tym więc przypadku praca zależy jedynie od końcowego i początkowego położenia masy przyciąganej względem mas przyciągających. Tak będzie również i wtedy, gdy układ przyciągający składać się będzie z nieograniczenie wielu punktów materialnych, gdy więc jest np. bryłą; siły pola grawitacyjnego są zatem siłami zachowawczymi (rozdz. II, ust. 10), układ zaś grawitacyjny — układem zachowawczym.

Wzór (6 a) przepiszmy w nieco odmiennej postaci

$$\mathcal{T} = m\left\{k\left(\frac{m_1}{r'_1} + \frac{m_2}{r'_2} + \ldots + \frac{m_n}{r'_n}\right) - \right.$$

$$\left. - k\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots + \frac{m_n}{r_n}\right)\right\}. \tag{7}$$

Praca ta zachodzi kosztem energii potencjalnej układu, której zmniejszenie równe jest co do wartości bezwzględnej pracy sił pola. Oznaczając przez E_1 energię potencjalną układu, gdy masa

m zajmowała położenie początkowe, przez E_2 — energię potencjalną, gdy masa m znalazła się w położeniu końcowym, otrzymujemy

$$\mathcal{T} = m\left\{k\left(\frac{m_1}{r'_1}+\frac{m_2}{r'_2}+\ldots+\frac{m_n}{r'_n}\right)-\right.$$

$$\left.-k\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}+\ldots+\frac{m_n}{r_n}\right)\right\} = E_1 - E_2$$

lub kładąc

$$V_1 = -k\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}+\frac{m_n}{r_n}\right) \text{ i } V_2 = -k\left(\frac{m_1}{r'_1}+\frac{m_2}{r'_2}+\ldots+\frac{m_n}{r'_n}\right)$$

$$\mathcal{T} = m\,(V_1 - V_2) = E_1 - E_2, \tag{8}$$

gdzie V_1 i V_2 są wielkościami, mającymi dla danej konfiguracji układu przyciągającego w każdym punkcie pola wartość dokładnie oznaczoną, niezależną od wartości przyciąganej masy m, są więc podobnie, jak natężenie pola $\vec{G}$, wielkościami, charakteryzującymi dane pole. Związkiem między tymi wielkościami, a energią potencjalną tłumaczy się nazwa p o t e n c j a ł u, jaką nadajemy wielkościom V.

Jak wynika z określenia potencjału, w punktach pola, dla których suma $\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}+\ldots+\frac{m_n}{r_n}$ ma tę samą wartość, potencjały są równe. Powierzchnie, będące miejscem geometrycznym punktów o jednakowym potencjale, noszą nazwę p o w i e r z c h n i e k w i p o t e n c j a l n y c h lub p o w i e r z c h n i p o z i o m u. W prostym przypadku jednego punktu przyciągającego (lub takich brył kulistych, których działanie możemy zastąpić działaniem jednego punktu) powierzchnie poziomu są kulami o wspólnym środku w punkcie przyciągającym.

Gdy układ przyciągający składa się z nieograniczenie wielu nieograniczenie małych mas (gdy więc układem tym jest np. jakaś bryła), potencjał danego punktu pola znajdujemy ze wzoru

$$V = -\int \frac{\varrho\, dv}{r}, \tag{8 a}$$

gdzie r odległość danego punktu pola od elementu dv bryły, ϱ — gęstość tego elementu. Powierzchnia ekwipotencjalna wyrazi się równaniem $V =$ stałej.

Pojęcie potencjału wprowadził do mechaniki w 1773 r. Lagrange, nazwę potencjału nadał wielkości V w 1828 r. Green (1793—1841).

Wzór (8) pozwala nam w bezpośrednim pomiarze wyznaczyć jedynie różnicę potencjałów dwu punktów pola. Wartość każdego z tych potencjałów oddzielnie znajdziemy, zakładając, że przyciągana masa m znajdowała się początkowo w dostatecznie wielkiej odległości od punktów układu przyciągającego, aby działanie grawitacyjne nie mogło być wykryte przy pomocy jakichkolwiek przyrządów. Mówimy wtedy, że masa m znajduje się poza granicami pola. Potencjał V_1 równy jest tym razem zeru, jak to wynika bezposrednio ze wzoru (7), gdzie kładziemy $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = \infty$ (co jest równoważne założeniu, że każda ze składowych sił przyciągających $f_i = k\frac{mm_i}{r_i^2} = 0$). Mamy więc

$$\frac{\mathcal{T}}{m} = -V_2. \tag{8 b}$$

Potencjał zatem danego punktu pola równy jest liczbowo co do wartości bezwzględnej pracy pola przy przeniesieniu jednostki masy spoza granic pola do danego punktu. Wymiar potencjału otrzymujemy ze wzoru (7) lub (8 b)

$$[V] = \frac{ML^2T^{-2}}{M} = L^2T^{-2}, \tag{9}$$

czemu w układzie C. G. S. odpowiada $\frac{\text{cm}^2}{\text{sek}^2}$.

Potencjał i natężenie pola są więc związane w ten sam sposób, jak praca i siła.

Znając kształt i rozmieszczenie powierzchni poziomu, możemy bez trudu wykreślić linie sił pola. Niech masa m przesuwa się wzdłuż jednej z powierzchni ekwipotencjalnych; praca sił pola jest, jak to wynika ze wzoru (8), zawsze równa zeru bez względu na długość i kierunek przebytej przez masę drogi. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy siły pola są w każdym punkcie drogi do niej prostopadłe, gdy więc linie sił są prostopadłe do powierzchni poziomu. Jeżeli poza tym znamy wartości potencjałów na każdej z tych powierzchni, możemy wyznaczyć również i natężenie pola.

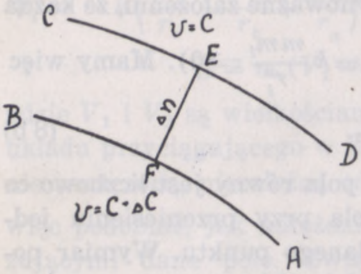
Niech powierzchnie AB i CD (rys. 105) są powierzchniami poziomu o wartości potencjału, równej odpowiednio C i $C + \Delta C$. Przypuśćmy, że siły grawitacyjne przesuwają masę m z punktu E jednej powierzchni do punktu F na powierzchni drugiej, leżą-

cego na tej samej linii sił. Oznaczając odcinek *EF,* stanowiący najkrótszą odległość między tymi powierzchniami (jako prostopadły do obydwu) przez Δn, otrzymamy na pracę sił grawitacyjnych

$$\Delta\mathcal{T} = f \cdot \Delta n = m \cdot G \cdot \Delta n = m(C - C - \Delta C) = -m\Delta C$$

skąd
$$G = -\frac{\Delta C}{\Delta n}. \tag{10}$$

Praca $\Delta\mathcal{T}$ jest dodatnia, gdy ΔC jest ujemne, potencjał zatem powierzchni *AB,* na której leży punkt *F,* musi być mniejszy od potencjału *C.* (Ponieważ *C* ma zawsze znak ujemny, mamy, kładąc $C = -C_1$, $-C_1 - [\Delta C] < -C_1$).



rys. 105

Natężenie pola ma zatem kierunek potencjałów malejących. Wielkość $\frac{\Delta C}{\Delta n}$, będącą miarą zmniejszania się potencjału, odniesionego do przesunięcia o jednostkę długości w kierunku prostopadłym do powierzchni ekwipotencjalnej, nazywamy s p a d e m p o t e n c j a ł u.

Oznaczmy przez dV zmianę potencjału na odcinku dn normalnej do powierzchni ekwipotencjalnej w kierunku natężenia pola. Mamy wtedy, zgodnie z (10), $G = -\frac{dV}{dn}$. Nazwijmy wektor o wartości równej spadowi potencjału i o kierunku, w którym potencjał najszybciej wzrasta, g r a d i e n t e m potencjału (łac. gradiens — postępujący) i oznaczmy go przez grad. Będziemy mieli

$$\vec{G} = -\text{grad } V. \tag{10 a}$$

Jest rzeczą oczywistą, że stosunek zwiększania się potencjału do długości drogi, na której zwiększanie to następuje, ma wartość największą w kierunku normalnej do powierzchni ekwipotencjalnej; odcinek bowiem dn jest najkrótszą odległością między dwiema powierzchniami ekwipotencjalnymi.

4. SPRAWDZENIE DOŚWIADCZALNE ZAŁOŻEŃ TEORII NEWTONA

Potwierdzenie założenia, że siła ciężkości, którą ziemia działa na otaczające ciała, jest identyczna z siłą, która utrzymuje planety w ich ruchu krzywodrożnym dookoła słońca, Newton

widział w zgodności liczb, otrzymanych przy obliczeniu według wzorów, ustalonych przez prawo grawitacji, przyspieszenia, jakie ziemia udziela księżycowi, z liczbami, jakie dają pomiary bezpośrednie.

Przeciętna odległość księżyca od ziemi równa jest mniej więcej 60 promieniom ziemskim. Przyspieszenie, jakiego ziemia udziela księżycowi, powinno być, zgodnie z prawem grawitacji, 60^2 razy mniejsze od przyspieszenia, jakiego doznają ciała, znajdujące się w pobliżu ziemi. Przyjmując, że przyspieszenie to równe jest 981 cm/sek², otrzymujemy na przyspieszenie księżyca a_k

$$a_k = 981 : 60^2 = 0{,}2725 \text{ cm/sek}^2. \tag{a}$$

Wielkość a_k możemy wyznaczyć z obserwacyj astronomicznych. Niech r_k oznacza promień orbity księżyca, o której zakładamy dla uproszczenia, że jest kołową (w rzeczywistości, stosunek największej do najmniejszej odległości księżyca od ziemi jest taki, jak 1000 : 896). Przyspieszenie dośrodkowe, jakiego doznaje księżyc,

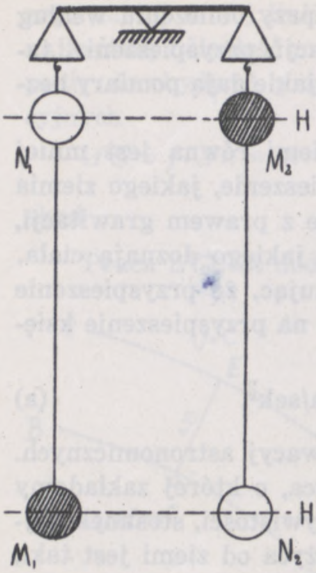
$$a_n = \frac{v^2}{r_k} = \frac{4\pi^2}{T^2} r_k,$$

gdzie T czas tzw. obiegu gwiazdowego księżyca (to jest czas, w ciągu którego księżyc wróciłby do swego położenia początkowego względem ziemi, gdyby ziemia była nieruchoma względem słońca); czas ten równy jest $2{,}3606 \cdot 10^6$ sek; r_k równe jest, jak była mowa wyżej, $60\,R$; przyjmując za Helmertem na wartość promienia ziemi wartość promienia kuli o tej samej objętości, co ziemia, mamy $R = 6{,}371 \cdot 10^8$ cm; stąd

$$a_k = 0{,}2719 \text{ cm/sek}^2, \tag{b}$$

co, jak na bardzo uproszczony rachunek, jest w wystarczającej zgodności z otrzymaną poprzednio liczbą (a).

Jeżeli tak, to i przyspieszenie, udzielane ciałom, znajdującym się w pobliżu ziemi, powinno zmniejszać się wraz z ich oddalaniem się od jej powierzchni. Wniosek ten, sprzeczny z wynikami obserwacyj Galileusza, według którego ciała spadają na ziemię ruchem jednostajnie przyspieszonym, został po raz pierwszy stwierdzony z dostateczną ścisłością przez Jolly'ego (1878 r.



rys. 106

i 1883 r.). Do szalek czułej wagi przyczepiona jest na długich drutach (o długości przeszło 5 m w jednej serii pomiarów, 21 m — w drugiej) druga para szalek. Przyciąganie dwu możliwie równych mas m_1 i m_2 porównywano w ten sposób, że początkowo masę m_1 kładziono na dolnej szalce, m_2 — na górnej i różnicę przyciągań, doznawanych przez te dwie masy, równoważono dodatkowymi odważnikami, kładzionymi na górnej szalce; następnie przenoszono m_2 na szalkę dolną, m_1 — na górną i znów równoważono.

Dla usunięcia poprawki na stratę wagi w powietrzu nie używano zwykłych szalek, lecz na każdym ramieniu wagi zawieszano po dwie kule szklane o tej samej objętości; jedna z tych kul była wypełniona rtęcią, druga zaś pusta (rys. 106); masy m_1 i m_2 są zatem masami rtęci wypełniającymi kule M_1 i M_2. Wtedy, jakkolwiek byśmy przewieszali kule, parcie do góry z obydwu stron jest zawsze jednakowe.

Zakładając, że ziemia jest nieruchomą kulą jednorodną lub też taką, której gęstość zmienia się proporcjonalnie do odległości od jej środka, znajdziemy, że siła, z jaką ziemia działa na ciało o masie m, umieszczone w odległości h od jej powierzchni, jest do siły, wywieranej na to samo ciało, leżące na jej powierzchni, w stosunku

$$f_h : f_0 = \frac{m\,G_h}{m\,G_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2},$$

stąd

$$G_h = G_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} = G_0 \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = G_0\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2} \doteq G_0\left(1-\frac{2h}{R}\right) \quad \text{(c)}$$

gdy h jest, jak w pomiarach Jolly'ego, małe w porównaniu z R. Stąd stosunkowe zmniejszenie ciężaru, przypadające na jednostkę wzniesienia

$$\frac{G_0 - G_h}{h\,G_0} = \frac{2}{R}$$

co, po podstawieniu $R = 6{,}371.10^6$ m, daje na 1 m wzniesienia

$$310 . 10^{-9} \frac{1}{\text{m}} .$$

Jolly otrzymał ze swych pomiarów wartość nieco mniejszą: $301 . 10^{-9} \frac{1}{\text{m}}$ (w pierwszej serii $285 . 10^{-9} \frac{1}{\text{m}}$). Około tej wartości wahają się liczby, otrzymane w analogiczny sposób przez późniejszych badaczy, jak Thiesen (1890 r.), Richarz i Krigar-Menzel (1894 r.) oraz inni. Najbliższą wartości teoretycznej jest liczba, otrzymana przez Thiesena $309 . 10^{-9} \frac{1}{\text{m}}$.

Wzór (c) stosuje się jedynie do przypadków, gdy h oznacza wzniesienie ciała przyciąganego ponad powierzchnią ciała przyciągającego, którą uważamy za powierzchnię poziomu, nie obowiązuje więc w przypadku, gdy h jest wysokością góry lub płaskowzgórza ponad poziomem morza; wtedy bowiem należy również uwzględnić przyciąganie, wywierane przez masę danego wzniesienia. Z podanych wyżej danych liczbowych wynika, że ciało podniesione o 100 m w powietrzu ponad powierzchnię ziemi, doznaje przyspieszenia o $310 . 10^{-7}\ G_0$ mniejszego niż na powierzchni ziemi, w szerokości więc geograficznej 45° przyspieszenie jego wynosi $980{,}64 - 0{,}03 = 980{,}61$ cm/sek². Różnica, jak widzimy, jest tak mała, że całkowicie usprawiedliwia przytoczone wyżej założenie Galileusza.

Podobnie zostało potwierdzone w doświadczeniach, wykonanych na ziemi, drugie założenie teorii ciążenia powszechnego, a mianowicie proporcjonalność siły przyciągającej do przyciąganej masy. Za pierwsze doświadczalne potwierdzenie tego niezmiernie ważnego faktu można uważać wyniki, otrzymane przez Galileusza przy badaniu ruchu ciał, spadających pod działaniem siły ciężkości. Galileusz stwierdził, że wszystkie ciała, spadające jednocześnie z tej samej wysokości z prędkością początkową równą zeru, przebiegały tę samą drogę w ciągu tego samego czasu. Załóżmy za Galileuszem, że przyspieszenie każdego z tych ciał miało we wszystkich punktach drogi wartość niezmienną. Oznaczając przyspieszenie dwu dowolnych ciał odpowiednio przez a_1 i a_2, otrzymujemy

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \quad \text{i} \quad s_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 ,$$

skąd, wobec tego, że $s_1 = s_2$ i, jak to wynika z pomiaru, $t_1 = t_2$, $a_1 = a_2 = a$. Przyspieszenia zatem tych ciał są jednakowe. Stąd wynika, że siły, na nie działające,

$$f_1 = m_1 a \quad \text{i} \quad f_2 = m_2 a$$

są do mas tych ciał proporcjonalne. To niezależne od rodzaju ciała przyspieszenie będziemy oznaczali w przypadku swobodnego spadku ciał literą g.

Newton potwierdził ten wynik doświadczeń Galileusza, mierząc z większą o wiele, niż Galileusz, dokładnością, okres wahania wahadła, w którym wahającym się punktem materialnym (patrz. rozdz. II, ust. 13) były ciała, znacznie różniące się swymi własnościami fizycznymi.

Newton na nici długości około 3,3 m zawieszał okrągłe drewniane naczynie, wypełniając je kolejno złotem, srebrem, ołowiem, szkłem, piaskiem, solą, wodą i pszenicą.

Okazało się, że okres wahań tych wahadeł nie zależał zupełnie od rodzaju zawieszanej masy, lecz jedynie od długości wahadła, zgodnie ze wzorem (13 a) ust. 13 rozdz. II, w którym po podstawieniu $Q = mg$, otrzymamy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{11}$$

Bessel w doświadczeniach, wykonanych tą samą metodą, lecz jeszcze znacznie dokładniejszych, ustalił (1830 r.), że okresy wahań wahadeł o tej samej długości zredukowanej (patrz rozdz. III, ust. 5), zbudowanych z różnych materiałów, różnią się w tym samym miejscu ziemi mniej niż o $\frac{1}{120\,000}$. Jeszcze dalej dokładność pomiarów posunął Eötvös (1909 r.), posiłkując się metodą, odmienną od poprzednich, a która pozwoliła mu stwierdzić, że różnica sił, z jakimi ziemia działa na ciała o równych masach, lecz poza tym różniące się swymi własnościami fizycznymi, na pewno nie przewyższa $\frac{1}{100\,000\,000}$ wartości ich mas. Innymi słowy, mierząc masę 1 kg metodą dynamiczną (rozdz. II, ust. 3), a następnie przy użyciu wagi, możemy być pewni, że różnica otrzymanych wartości nie przekracza 0,01 mg.

Zgodność tych pomiarów, wykonywanych z coraz to większą dokładnością, dochodzącą już, jak się zdaje, do kresu tego, co można osiągnąć przy użyciu znanych nam dotychczas przyrządów, pozwala stwierdzić, że istotnie w tym samym miejscu na powierzchni ziemi siła ciężkości udziela wszystkim ciałom tego samego przyspieszenia, że zatem ciężar ciała jest do masy jego proporcjonalny

$$Q = mg. \qquad (12)$$

Tego wniosku nie mogą osłabić wyniki doświadczeń Brusha, który, opierając się na założeniach stworzonej przez siebie teorii grawitacji, próbował wykazać zależność przyspieszenia grawitacyjnego od magnetycznych własności ciał (1921 r., 1922—1923 r., 1925 r.). Pomiary Brusha zostały zakwestionowane przez Pottera (1922 r., 1927 r.) i Wilsona (1922 r.), którzy jego doświadczenia powtórzyli. Podobnie nie zostało potwierdzone przypuszczenie, wypowiedziane przez Richardsona, o zależności przyciągania od elementarnych składników atomu przyciąganego ciała (Potter 1923 r.). Wcześniejsze (1910 r.) od wyżej przytoczonych pomiary Southerna, wykonane z ciałami promieniotwórczymi, również nie wykazały żadnych, dających się wykazać doświadczalnie, odstępstw od założenia proporcjonalności ciężaru i masy.

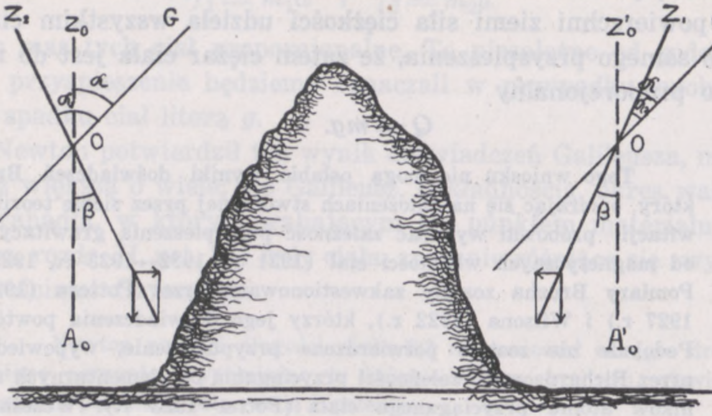
Nie znalazły też dotychczas należytego potwierdzenia hipotezy, dotyczące wpływu środowiska, znajdującego się między przyciąganymi masami, na wartość i kierunek siły przyciągania. Nieliczne doświadczenia, z których by wynikało, że wpływ taki istnieje (Crémieu 1908 r., Schlomka — 1927 r., a zwłaszcza Mayorana — 1919 r., 1921 r., 1930) są odosobnione i zdają się być w sprzeczności z danymi, otrzymanymi przez innych badaczy (Eötvös — 1922 r.).

5. WYZNACZENIE STAŁEJ GRAWITACJI

Z założenia proporcjonalności między siłą grawitacyjną i masą wynika, że stała grawitacji k jest niezależna zarówno od wielkości, jak i od własności fizycznych przyciąganej masy. Wniosek ten został potwierdzony przy wyznaczaniu tej wielkości.

Metody użytych w tym celu pomiarów można podzielić na dwie grupy: w jednej z nich pomiary polegają na wyznaczeniu zmian, zachodzących w normalnym przyciąganiu, wywieranym przez ziemię, przy zmianie rozmieszczenia mas przyciągających w pobliżu ciała przyciąganego, w drugiej wyznaczane są bezpośrednio siły ciążenia, z jakimi działają na siebie wzajemnie dwie masy.

Za pierwowzór pomiarów pierwszej grupy można uważać metodę, zastosowaną po raz pierwszy przez Bouguera (1750 r.). Niech w punktach O i O po dwu stronach góry znajdują się wahadła OA i OA' (rys. 107). Pod działaniem siły ciężkości, nie zakłóconym przez



rys. 107

przyciąganie góry, wahadła byłyby w równowadze w położeniu OA_0 i $O\,A'_0$, proste Z_0A_0 i $Z'_0A'_0$ wyznaczałyby wtedy kierunek pionów w miejscach zawieszenia wahadeł. Gdy punkty O nie są zbyt od siebie odległe, możemy piony te uważać za równoległe (ust. 9), i kąty, jakie tworzą z prostymi OG, wskazującymi kierunek, w jakim widzimy tę samą gwiazdę stałą, patrząc na nią z punktów O, za równe. Przyciąganie góry spowoduje odchylenie punktów materialnych A_0 i A'_0, kierunek nici wahadeł AZ_1 i $A'Z_1$ wyznaczy kierunek wypadkowej ciężaru wahadeł i siły przyciągania, z jaką góra na nie działa. Oznaczając przez α_1 kąt Z_1OG, przez α_2 — analogiczny kąt dla drugiego wahadła znajdziemy w przypadku, gdy siły, z jakimi góra działa na wahadło, są równe, że odchylenie β pionu od kierunku normalnego

$$\beta = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2),$$

stąd przyspieszenie, jakiego udziela wahadłu siła przyciągająca góry, równe jest $g\,.\,tg\beta$. Porównywając otrzymaną w ten sposób wartość z obliczoną ze wzorów, podanych w ust. 3, możemy wyznaczyć k. Jest to możliwe, oczywiście, tylko wtedy, gdy dana góra ma kształt zbliżony do bryły prawidłowej i gdy znamy dokładnie jej gęstość.

Toteż pomiary Bouguera i następne dokładniejsze pomiary Maskelyne'a i Huttona (1776 r.) mają dzisiaj tylko historyczne znaczenie.

W grupie pierwszej należy przede wszystkim wymienić pomiary Jolly'ego, wykonane (w 1880 r.) przy użyciu wagi, opi-

sanej w ustępie poprzednim. Pod ciałem znajdującym się na szalce dolnej, którego nadwyżka ciężaru nad ciałem, umieszczonym w szalce górnej, była zrównoważona przez ciężary dodatkowe, umieszczano dużą kulę ołowianą tak, aby środki mas kuli i ciała, leżącego na szalce, znajdowały się na tym samym pionie. Przyciąganie kuli ołowianej, działając w tym samym kierunku, co ciężar, powoduje naruszenie równowagi; ciężar odważników, jakie należało dodać, aby równowagę przywrócić, równy jest sile przyciągającej kuli ołowianej.

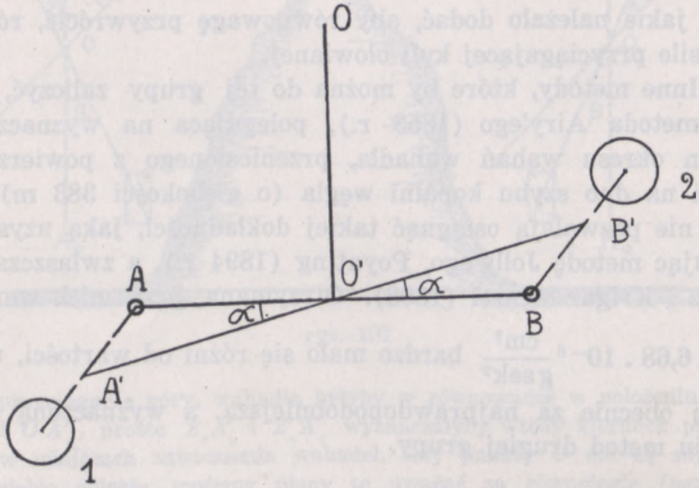
Inne metody, które by można do tej grupy zaliczyć, jak np. metoda Airy'ego (1853 r.), polegająca na wyznaczeniu zmian okresu wahań wahadła, przeniesionego z powierzchni ziemi na dno szybu kopalni węgla (o głębokości 383 m), na ogół nie pozwalają osiągnąć takiej dokładności, jaką uzyskali, stosując metodę Jolly'ego, Poynting (1894 r.), a zwłaszcza Richarz i Krigar-Menzel (1898). Otrzymana przez nich wartość $k = 6{,}68 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{g\,sek}^2}$ bardzo mało się różni od wartości, uważanej obecnie za najprawdopodobniejszą, a wyznaczoną przy użyciu metod drugiej grupy.

Z metod, analogicznych do metody Jolly'ego, zasługuje na wspomnienie metoda Bergeta (1893 r.). Stała prężność pewnej objętości gazu równoważyła ciężar słupa rtęci w manometrze, umieszczonym nad powierzchnią stawu. Berget wyznaczał, przy użyciu metod optycznych, zmianę wysokości tego słupa, gdy spuszczano wodę ze stawu, zmniejszając w ten sposób siłę przyciągającą, działającą na rtęć. Berget otrzymał na k liczbę $6{,}80 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{g\,sek}^2}$.

Druga grupa pomiarów polega na użyciu do wyznaczenia siły ciążenia tzw. w a g i s k r ę c e ń, przyrządu, zbudowanego w 1750 r. przez Michella i zastosowanego nieco później (1785 r.) przez Coulomba do pomiarów sił elektrycznych i magnetycznych oraz przez Cavendisha (1798 r.) do wyznaczenia stałej grawitacji.

Na końcach lekkiej belki poziomej, zawieszonej w swym środku masy na sprężystej nici, umocowane są małe równe masy A, B. W pobliżu tych mas umieszczone są dwie duże

równe masy 1 i 2 w ten sposób, aby ich działania grawitacyjne miały względem osi OO' momenty jednakowe (rys. 108). Obrót belki dookoła osi OO' pod działaniem sił przyciągających powoduje skręcanie nici i powstanie sił sprężystości, przeciwdziałających obrotowi belki. Belka obróci się o taki kąt α, przy którym moment sił sprężystości będzie równy i przeciwnie skierowany



rys. 108

wany do momentu sił ciążenia. Oznaczając moment sił sprężystości w tym położeniu przez $D\alpha$, masy przyciągających się ciał przez m_c i m, długość belki, będącą przy odpowiednim umieszczeniu mas 1 i 2 ramieniem siły grawitacyjnej, przez l (linie łączące środki kul 1 i 2 z punktami materialnymi A i B, są prostopadłe do płaszczyzny rysunku), mamy

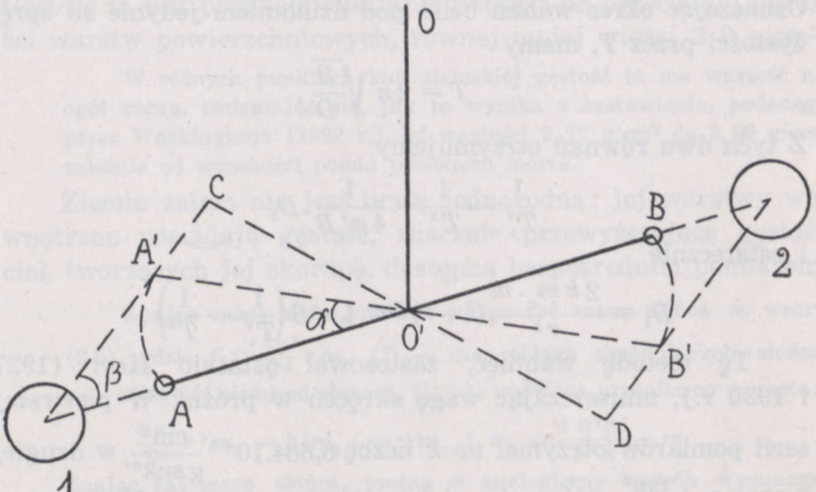
$$D\alpha = \frac{km_c \cdot m}{r^2}\, l,$$

gdzie wszystkie wielkości z wyjątkiem k mogą być wyznaczone przez bezpośredni pomiar. (Wielkość D znajdujemy, mierząc okres wahań belki, rozdz. III, ust. 5). Stąd

$$k = D\alpha \cdot \frac{r^2}{m_c \cdot m} \cdot \frac{1}{l}.$$

Metodę tę znakomicie udoskonalił Boys (1895 r.), zmniejszając rozmiary przyrządu i zawieszając belkę na cienkiej nici kwarcowej. W ten sposób została znacznie zwiększona czułość pomiaru i usunięta jedna z głównych przyczyn błędu, a mianowicie, powolne ustalanie się położenia zerowego wagi, tzn. tego położenia, jakie belka zajmuje przy nieskręconej nici, kwarc bowiem po usunięciu sił działających prawie natychmiast całkowicie się rozkręca.

Braun (1896 r.), używając przyrządu Boysa, zastąpił mierzenie odchyleń pomiarem okresu wahań belki wagi. Niech masy 1 i 2 znajdują się na przedłużeniu belki, którą odchylamy



rys. 109

o niewielki kąt α (rys. 109). Na belkę w położeniu $A'B'$ działają, oprócz momentów sił sprężystości, momenty sił grawitacyjnych. Momenty te są równe $\frac{k m_c \cdot m}{A'1^2} \cdot O'C$ i $\frac{k m_c \cdot m}{B'2^2} O'D$. Umieszczając masy 1 i 2 w jednakowych odległościach od A i B tak, aby $O'C = O'D$, oraz pomijając bardzo małą w porównaniu z początkową wartością zmianę odległości środków kul 1 i 2 od A i B, moment sił grawitacyjnych możemy wyrazić wzorem

$$M = \frac{2 k m_c \cdot m}{r^2} \cdot O'C, \quad \text{gdzie} \quad O'C = (l + r) \sin \beta \doteq (l + r) \beta .$$

Dla małych kątów α i β mamy

$$\beta = \frac{\cup AA'}{r} \quad \text{i} \quad \alpha = \frac{\cup AA'}{l}, \quad \text{skąd} \quad \beta = \frac{\alpha l}{r} \quad \text{i}$$

$$M = \frac{2 k m_c . m}{r^3}(l+r)\, l\, \alpha = D_1 \alpha .$$

Łączny moment kierujący jest zatem równy

$$D + D_1 = D + \frac{2 k m_c . m}{r^3}(l+r)\, l,$$

skąd okres wahań

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{B}{D+D_1}}.$$

Oznaczając okres wahań belki pod działaniem jedynie sił sprężystości przez T, mamy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{B}{D}}.$$

Z tych dwu równań otrzymujemy

$$\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T^2} = \frac{1}{4\pi^2 B} . D_1$$

i ostatecznie

$$D_1 = \frac{2 k m_c . m}{r^3}(l+r)\, l = 4\pi^2 B \left(\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T^2}\right).$$

Tę metodę wahnięć, zastosował ostatnio Heyl (1927 i 1930 r.), umieszczając wagę skręceń w próżni. W pierwszej serii pomiarów otrzymał na k liczbę $6{,}664 . 10^{-8} \frac{cm^3}{g\,sek^2}$, w drugiej $6{,}670 . 10^{-8} \frac{cm^3}{g\,sek^2}$. Używając ciał z różnego materiału, Heyl jeszcze raz potwierdził proporcjonalność siły grawitacyjnej do masy, wykazując, że k nie zależy od rodzaju przyciągających się ciał.

Zestawiając wyniki pomiarów Heyla z wynikami, otrzymanymi poprzednio, za najbardziej prawdopodobną wartość stałej grawitacji możemy uważać

$$6{,}66 . 10^{-8} \frac{cm^3}{g\,sek^2}.$$

Ze wzoru

$$m g = k \frac{m_z . m}{r^2},$$

gdzie m_z masa ziemi, r — odległość przyciąganego ciała od jej środka, można, znając k, wyznaczyć m_z.

Kładąc $g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}$, $R = 6,371 \,.\, 10^8$ cm (patrz. ust. 4)
i $k = 6,66 \,.\, 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{g sek}^2}$, znajdujemy, że masa ziemi

$$m_z = 5,979 \,.\, 10^{27} \text{ g.}$$

Uwzględniając istotny kształt ziemi, znajdujemy

$$m_z = 5,997 \,.\, 10^{27} \text{ g.}$$

Stąd przeciętna gęstość ziemi

$$d = \frac{m_z}{\frac{4}{3} \pi R^3} = 5,52 \text{ g/cm}^3$$

Gęstość ta jest prawie dwukrotnie większa od przeciętnej gęstości warstw powierzchniowych, równej mniej więcej 2, 9 g/cm³.

W różnych punktach kuli ziemskiej gęstość ta ma wartość na ogół różną, zmieniając się, jak to wynika z zestawienia, podanego przez Washingtona (1922 r.), od wartości 2, 77 g/cm³ do 3, 09 g/cm³ zależnie od wysokości ponad poziomem morza.

Ziemia zatem nie jest bryłą jednorodną: jej warstwy wewnętrzne posiadają gęstość, znacznie przewyższającą gęstość ciał, tworzących jej skorupę, dostępną bezpośrednim pomiarom.

Znając masę ziemi, można wyznaczyć masę słońca ze wzoru (2 b), gdzie $f' = \frac{4\pi^2}{T^2} r m_z$ (T — czas obiegu ziemi dookoła słońca, r — odległość ziemi od słońca), $C = k$; wzór ten przepiszmy w postaci

$$\frac{4\pi^2}{T^2} r^3 m_z = k(m_s + m_z) m_z \quad \text{i} \quad m_s = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 k} - m_z .$$

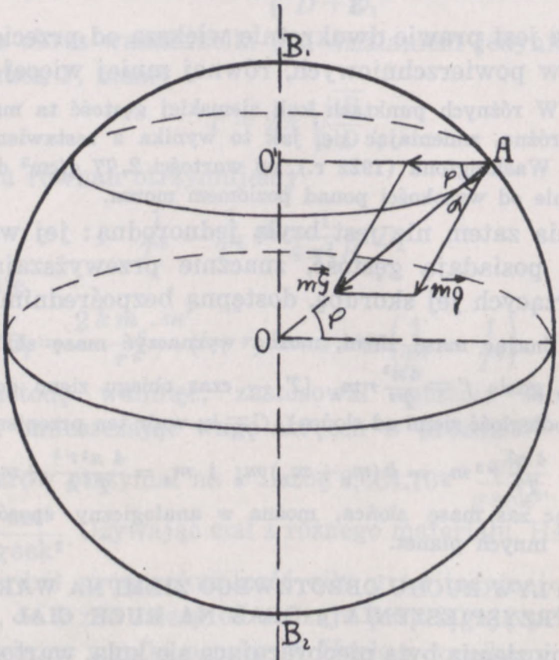
Znając zaś masę słońca, można w analogiczny sposób wyznaczyć masy innych planet.

6. WPŁYW RUCHU OBROTOWEGO ZIEMI NA WARTOŚĆ I KIERUNEK PRZYSPIESZENIA g ORAZ NA RUCH CIAŁ ZIEMSKICH

Gdyby ziemia była nieobracającą się kulą, wartość przyspieszenia g, wyznaczonego czy to z okresu wahań wahadła odwracalnego o znanej długości zredukowanej (rozdz. III, ust. 5) czy też z pomiaru przyspieszenia swobodnie spadającego ciała, miałaby we wszystkich punktach powierzchni ziemi wartość tę samą, równą wartości $\vec{G}$ natężenia pola grawitacyjnego, wytworzonego przez kulę o masie, równej masie ziemi, w punkcie odległym o R od jej środka, a więc wyrażoną wzorem $G = k \frac{m_z}{R^2}$. Wektor $\vec{g}$

byłby skierowany wzdłuż promienia kuli zlemskiej ku jej środkowi; taki kierunek miałyby wszystkie piony, wystawione w dowolnym punkcie powierzchni ziemi, w tym kierunku spadałoby pod działaniem siły ciężkości każde swobodne ciało, umieszczone w pobliżu ziemi. Ziemia jednak nie jest kulą nieruchomą, lecz obraca się dookoła osi, przechodzącej przez jej bieguny i ten jej ruch sprawia, że przyspieszenie g nie jest bynajmniej równe natężeniu $\vec{G}$ pola grawitacyjnego ziemi kulistej.

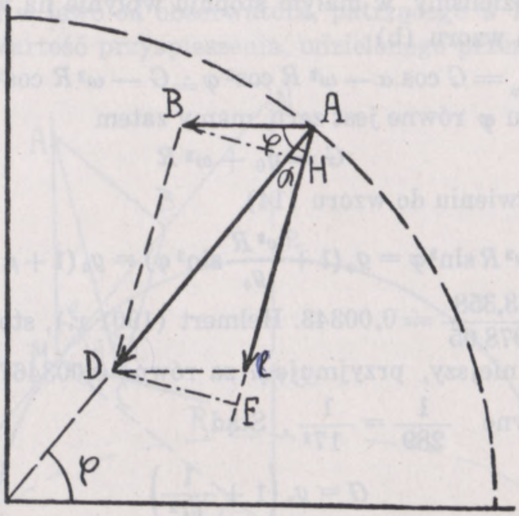
Przypuśćmy, że obserwowane przez nas ciało znajduje się w punkcie A kuli ziemskiej, położonym pod szerokością geogra-



rys. 110

ficzną φ. Ciało to, obracając się razem z ziemią względem układu, związanego z gwiazdami stałymi, opisuje w ciągu doby koło o promieniu $R \cos \varphi$ (rys. 110). Siłą dośrodkową, utrzymującą ciało w tvm ruchu obrotowym, jest składowa f_d w kierunku promienia koła AO' siły grawitacyjnej $m\vec{G}$. Składowa druga $m\vec{g}$, równa $m\vec{G} - \vec{f}_d$, jest tą wielkością, którą wyznaczamy bezpośrednio z pomiarów, mierząc np. napięcie nici, na której zawie-

szone jest ciało m, lub też ciśnienie, jakie ciało wywiera na podstawę. Składowa ta tworzy z kierunkiem promienia ziemskiego kąt α, który możemy wyznaczyć w sposób następujący (rys. 111).



rys. 111

Opuśćmy z punktów B i D prostopadłe na kierunek składowej AC. Mamy $DF = mG \sin \alpha$ i, przyjmując kąt BAH za równy φ, $BH = f_d \sin \varphi$, skąd wobec tego, że $DF = BH$

$$mG \sin \alpha = f_d \sin \varphi, \tag{a}$$

mamy również $AH = CF$, skąd $CF = f_d \cos \varphi$ i

$$mG \cos \alpha = mg_\varphi + f_d \cos \varphi. \tag{b}$$

Dzieląc równanie (a) przez (b), znajdujemy

$$tg\, \alpha = \frac{f_d \sin \varphi}{m\, g_\varphi + f_d \cos \varphi} \tag{13 a}$$

lub z uwagi, że $f_d = \frac{v^2}{r} = m\, \omega^2 R \cos \varphi$

$$tg\, \alpha = \frac{\omega^2 R \sin \varphi \cos \varphi}{g_\varphi + \omega^2 R \cos^2 \varphi} \tag{13 b}$$

Odchylenie to jest największe dla $\varphi = 45°$. Kładąc $\omega = \frac{2\pi}{86164}$ (86164 sek jest to czas trwania doby gwiazdowej, mierzony w średnich sekundach słonecznych),

$$R = 6,371.\, 10^8 \text{ cm}, \quad g_{45} = 980,6 \text{ cm/sek}^2,$$

znajdujemy, że $\cos\alpha = 0,9998$ i $\alpha = 5' 56''$. Kierunki więc pionów, wystawionych w różnych punktach kuli ziemskiej, nie przecinają się na ogół w jednym punkcie. Przyjmując $\cos\alpha = 1$, co, jak widzieliśmy, w małym stopniu wpłynie na wynik, otrzymujemy ze wzoru (b)

$$g_\varphi = G\cos\alpha - \omega^2 R\cos^2\varphi \doteq G - \omega^2 R\cos^2\varphi \tag{14}$$

Na równiku φ równe jest zeru, mamy zatem

$$G = g_0 + \omega^2 R$$

i po podstawieniu do wzoru (14)

$$g_\varphi = g_0 + \omega^2 R\sin^2\varphi = g_0\left(1 + \frac{\omega^2 R}{g_0}\sin^2\varphi\right) = g_0(1 + \mu\sin^2\varphi) \tag{14a}$$

gdzie $\mu = \dfrac{3,358}{978,05} = 0,00343$. Helmert (1901 r.), stosując rachunek dokładniejszy, przyjmuje μ za równe 0,0034677, a więc za prawie równe $\dfrac{1}{289} = \dfrac{1}{17^2}$. Stąd

$$G = g_0\left(1 + \frac{1}{17^2}\right) \tag{14b}$$

lub, pomijając drugą i wyższe potęgi ułamka $\dfrac{1}{17^2}$

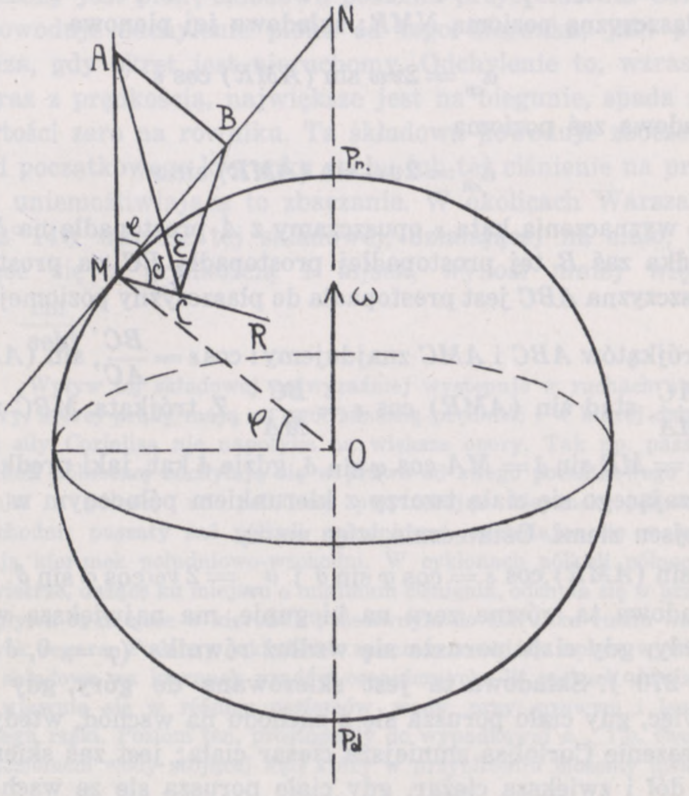
$$g_0 = G\left(1 - \frac{1}{17^2}\right). \tag{14c}$$

Gdyby więc prędkość kątowa ziemi wzrosła 17 razy, przyspieszenie g_0 na równiku równe byłoby zeru.

Do tych samych wniosków moglibyśmy dojść i na innej jeszcze drodze. Biorąc za układ odniesienia ziemię, musimy, zgodnie z wywodami ust. 21 rozdz. II, założyć, że na dane ciało oprócz siły grawitacyjnej działają jeszcze siły bezwładności, sprowadzające się w przypadku, gdy ciało nie zmienia swego położenia względem ziemi, do siły odśrodkowej. Ciężar ciała jest wypadkową siły grawitacyjnej $m\vec{G}$ i siły odśrodkowej $m\omega^2 R\cos\varphi$. Tę właśnie wypadkową otrzymujemy z pomiarów przyciągania ziemskiego, nie znamy bowiem żadnego sposobu, który by pozwolił na wyznaczenie każdej z tych składowych oddzielnie.

Gdy ciało porusza się względem ziemi z prędkością v, oprócz siły odśrodkowej występuje jeszcze siła Coriolisa (rozdz. II, ust. 21). Ponieważ ziemia obraca się z zachodu na wschód, wektor

prędkości kątowej $\vec{\omega}$ skierowany jest z południa na północ (rys. 112), wobec czego siła Coriolisa odchyla ciała, poruszające się w płaszczyźnie poziomej, na półkuli północnej w prawo, na południowej w lewo od obserwatora, patrzącego w kierunku ruchu ciała. Wartość przyspieszenia, udzielonego przez tę siłę, mo-



rys. 112

żemy wyznaczyć stosunkowo dość łatwo, posiłkując się dowodzeniem, danym przez Diesselhorsta.

Niech punkt kuli ziemskiej M, o szerokości geograficznej φ, będzie początkowym położeniem ciała, poruszającego się z prędkością v w kierunku MR wzdłuż płaszczyzny poziomej. Przeprowadźmy w punkcie M styczną do południka MN; płaszczyzna NMR jest wtedy płaszczyzną poziomą, przechodzącą przez punkt M. Kąt, jaki prędkość v tworzy z kierunkiem dodatnim

osi, równy jest kątowi *AMR*, gdzie $AM \parallel ON$. Przyspieszenie Coriolisa jest zatem równe

$$a_c = 2v\omega \sin AMR$$

Przyspieszenie to jest prostopadłe do płaszczyzny *AMR* i tworzy z pionem kąt ε, równy kątowi, jaki tworzy płaszczyzna *AMR* z płaszczyzną poziomą *NMR*; składowa jej pionowa

$$a_{cp} = 2v\omega \sin (AMR) \cos \varepsilon \qquad \text{(a)}$$

składowa zaś pozioma

$$a_{ch} = 2v\omega \sin (AMR) \sin \varepsilon \qquad \text{(b)}$$

Dla wyznaczenia kąta ε opuszczamy z *A* prostopadłą na *MN*, ze spodka zaś *B* tej prostopadłej prostopadłą *BC* na prostą *MR*. Płaszczyzna *ABC* jest prostopadła do płaszczyzny poziomej *NMR*.

Z trójkątów *ABC* i *AMC* znajdujemy: $\cos\varepsilon = \frac{BC}{AC}$, $\sin (AMR) = \frac{AC}{MA}$, stąd $\sin (AMR) \cos \varepsilon = \frac{BC}{MA}$. Z trójkąta *MBC* mamy: $BC = MB \sin\delta = MA \cos \varphi \sin \delta$, gdzie δ kąt, jaki prędkość poruszającego się ciała tworzy z kierunkiem północnym w danym miejscu ziemi. Ostatecznie więc mamy

$$\sin (AMR) \cos \varepsilon = \cos \varphi \sin \delta \text{ i } a_{cp} = 2v\omega \cos \varphi \sin \delta \qquad \text{(15 a)}$$

składowa ta, równa zeru na biegunie, ma największą wartość wtedy, gdy ciało porusza się wzdłuż równika ($\varphi = 0$, $\delta = 90°$ lub 270°). Składowa ta jest skierowana do góry, gdy $\delta > 0$, a więc, gdy ciało porusza się z zachodu na wschód, wtedy przyspieszenie Coriolisa zmniejsza ciężar ciała; jest zaś skierowana na dół i zwiększa ciężar, gdy ciało porusza się ze wschodu na zachód.

O wielkości tego działania może nam dać pojęcie przykład, podany przez Eötvösa, w którym zmieniliśmy tylko dane liczbowe. Człowiek, ważący 75 kg i idący w okolicach Warszawy ($\varphi = 52° 14'$) z zachodu na wschód z prędkością 5 km/godz, traci na ciężarze około 0,9 g; idąc w kierunku przeciwnym tyleż zyskuje, jest więc cięższy, niż poprzednio, o mniej więcej 1,8 g.

Podobnie znajdziemy, że

$$\sin \varepsilon = \frac{AB}{AC}, \text{ skąd } \sin (AMR) \sin \varepsilon = \frac{AB}{MA} \text{ lub z uwagi,}$$

że $\sin\varphi = \frac{AB}{MA}$, $\sin(AMR)\sin\varepsilon = \sin\varphi$ i

$$a_{ch} = 2v\omega\sin\varphi. \qquad (15b)$$

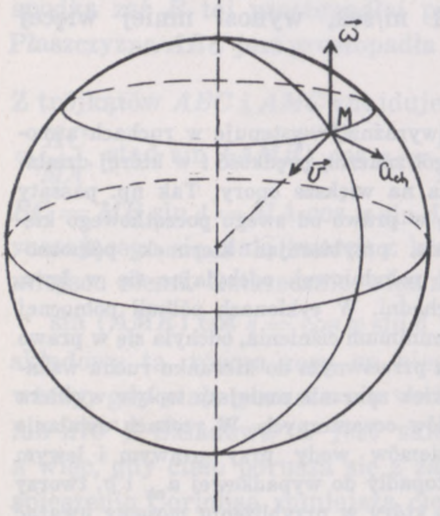
Przypuśćmy, że na poruszającym się z prędkością v okręcie umieszczony jest pion; składowa pozioma przyspieszenia Coriolisa spowoduje odchylenie pionu od tego kierunku, jaki pion wyznacza, gdy okręt jest nieruchomy. Odchylenie to, wzrastające wraz z prędkością, największe jest na biegunie, spada zaś do wartości zero na równiku. Ta składowa powoduje zboczenie ciała od początkowego kierunku ruchu lub też ciśnienie na przeszkodę, uniemożliwiającą to zbaczanie. W okolicach Warszawy ($\varphi = 52° 14'$) wartość tej składowej, działającej na ciało, poruszające się z prędkością 1 m/sek, wynosi mniej więcej $0,0116 \frac{cm}{sek^2}$.

Wpływ tej składowej najwyraźniej występuje w ruchach atmosfery, której prądy mają na ogół znaczną prędkość i w której działanie siły Coriolisa nie napotyka na większe opory. Tak np. passaty półkuli północnej odchylają się w prawo od swego początkowego kierunku z północy na południe, przybierając kierunek północno-wschodni; passaty zaś półkuli południowej, odchylając się w lewo, mają kierunek południowo-wschodni. W cyklonach półkuli północnej powietrze, dążące ku miejscu o minimum ciśnienia, odchyla się w prawo i opływa to miejsce w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Podobny jakkolwiek znacznie mniejszy wpływ wywiera ta składowa na kierunek prądów oceanicznych. W rzekach działanie to ujawnia się w różnicy poziomów wody przy prawym i lewym brzegu rzeki. Poziom ten, prostopadły do wypadkowej a_{ch} i g, tworzy z poziomem wody stojącej kąt, który w przybliżeniu możemy uważać za równy $\frac{a_{ch}}{g}$, a więc dla okolic Warszawy, w rzece, płynącej z prędkością 1 m/sek, około $\frac{0,012}{981}$; stąd przy szerokości rzeki, równej 10 m, różnica poziomów przy prawym i lewym brzegu wyniesie $\frac{12}{981}$ cm $=$ $= 0,012$ cm, a więc około 0,1 mm. Do prawego brzegu (na półkuli północnej) spychane są te strugi w rzece, które płyną z prędkością większą, przede wszystkim więc warstwy powierzchniowe, doznające znacznie mniejszego tarcia, niż warstwy głębinowe, stykające się bezpośrednio z dnem. Powstaje tedy stałe krążenie warstw powierzchniowych wody od lewego brzegu do prawego, warstw zaś dolnych w kierunku odwrotnym. Tym by się tłumaczyło według Baera, który pierw-

szy (1860 r.) postawił tę hipotezę, silniejsze podmywanie prawych brzegów rzek półkuli północnej i przesuwanie się koryt rzecznych w prawo. Nie jest to jednak ogólnym prawidłem: oprócz przyspieszenia Coriolisa działają jeszcze inne o wiele potężniejsze czynniki, wyznaczające bieg rzeki. (Przykładem rzeki, na której biegu wyraźnie się zaznacza działanie siły Coriolisa, jest, jak na to wskazali Brunhes i Calciati, Sarine, płynąca pod Fryburgiem szwajcarskim).

Pociąg, idący w szerokości Warszawy z prędkością 90 km/godz i ważący 100 ton, działałby na prawą szynę z siłą około 29000000 dyn tzn. mniej więcej 29 kgc.

Działanie siły Coriolisa ujawnia się w odchyleniu na wschód od pionu swobodnie spadających ciał. Załóżmy, że z punktu M, znajdującego się na niewielkiej stosunkowo wysokości h ponad ziemią, spada swobodnie ciało z przyspieszeniem pionowym g (rys. 113; na rysunku punkt M znajduje się na powierzchni ziemi). Na ciało to działa siła Coriolisa, udzielając mu przyspieszenia prostopadłego do płaszczyzny, przechodzącej przez oś obrotu i pion, wystawiony w punkcie M. Przyjmując kierunek prędkości v, z jaką ciało spada, za stały, co wobec niewielkiej wartości przyspieszenia Coriolisa nie pociąga za sobą ważniejszych błędów, oraz zakładając, że pion ma kierunek promienia ziemskiego, mamy



rys. 113

$$a_c = 2\,v\,\omega \cos \varphi.$$

Podstawiając $v = gt$ i $h = \frac{1}{2}\,gt^2$, otrzymujemy po wykonaniu odpowiednich rachunków, że odchylenie od pionu w kierunku wschodnim wyniesie

$$x = \frac{1}{3}\,gt^3\,\omega \cos \varphi = \frac{2}{3}\,h\sqrt{\frac{2\,h}{g}}\,.\,\omega \cos \varphi. \qquad (16)$$

Niech $c = \frac{dx}{dt}$ oznacza prędkość ruchu ciała, nabytą pod działaniem siły Coriolisa,

$$a_c = \frac{dc}{dt} = 2\,v\,\omega\cos\varphi = 2\,\omega\cos\varphi\,.\,gt \quad \text{i} \quad dc = 2\,\omega\cos\varphi\,.\,gtdt.$$

Prędkość c po upływie t sek od początku ruchu otrzymamy, sumując nieskończenie małe przyrosty, jakich prędkość doznała w ciągu tego czasu; biorąc pod uwagę, że dla $t = 0$, $c = 0$

$$c = \frac{dx}{dt} = \int_0^t 2\,\omega\cos\varphi\,.\,gtdt = \omega\cos\varphi\,.\,gt^2.$$

Odchylenie więc w ciągu każdych dt sek wzrastało o

$$dx = \omega\cos\varphi\,gt^2\,dt;$$

stąd po upływie $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ sek odchylenie, równe początkowo zeru, wyniosło

$$x = \omega\cos\varphi\,.\,g\int_0^t t^2\,dt = \frac{1}{3}\,\omega\cos\varphi\,gt^3 = \frac{2}{3}\,h\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\omega\cos\varphi.$$

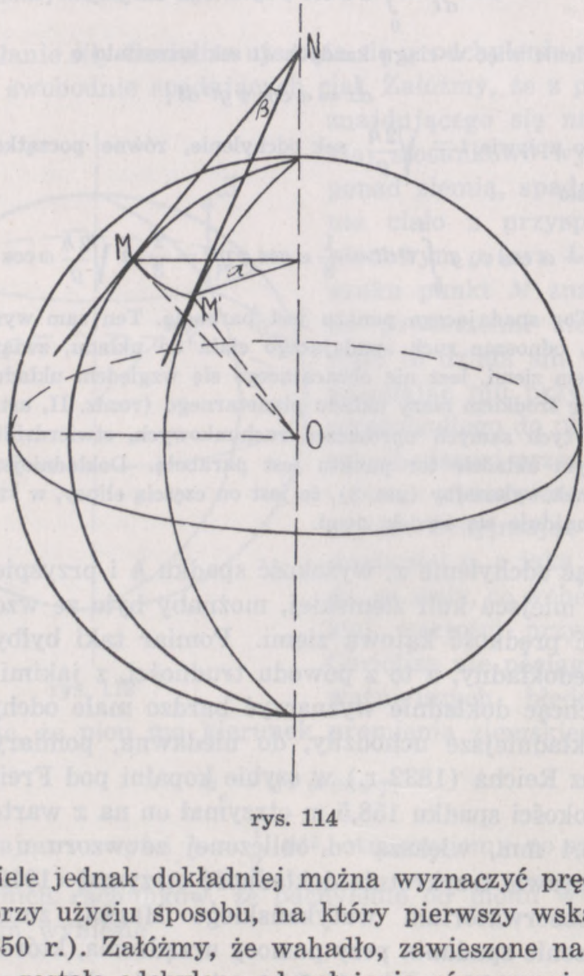
Tor spadającego punktu jest parabolą. Ten sam wynik otrzymamy, odnosząc ruch spadającego ciała do układu, związanego ze środkiem ziemi, lecz nie obracającego się względem układu, związanego ze środkiem masy układu planetarnego (rozdz. II, ust. 2). Używając tych samych uproszczeń rachunkowych, stwierdzilibyśmy, że i w tym układzie tor punktu jest parabolą. Dokładniejszy jednak rachunek wykazałby (ust. 3), że jest on częścią elipsy, w której ognisku znajduje się środek ziemi.

Znając odchylenie x, wysokość spadku h i przyspieszenie g w danym miejscu kuli ziemskiej, możnaby było ze wzoru (16) wyznaczyć prędkość kątową ziemi. Pomiar taki byłby jednak bardzo niedokładny, a to z powodu trudności, z jakimi się spotykamy, chcąc dokładnie wyznaczyć bardzo małe odchylenie x. Za najdokładniejsze uchodziły, do niedawna, pomiary, wykonane przez Reicha (1832 r.) w szybie kopalni pod Freibergiem. Przy wysokości spadku 158,5 m otrzymał on na x wartość przeciętną 28,4 mm, większą od obliczonej ze wzoru o 0,8 mm. Większą prawie trzykrotnie dokładność otrzymał (1912 r.) kierownik obserwatorium watykańskiego Hagen, zmniejszając przyspieszenie spadania przy pomocy urządzenia, które schematycznie można sobie wystawić jako połączenie ciała spadającego nicią, przerzuconą przez blok, z innym ciałem, o masie nieco

mniejszej, podnoszącym się do góry podczas spadania ciała pierwszego. Przyspieszenie spadku równe jest wtedy

$$(m_1 - m_2)\, g = (m_1 + m_2)\, a,$$

gdzie m_1 masa spadającego ciała, m_2 — przeciwciężaru. Podstawiając do wzoru (16) zamiast g wartość $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g$, otrzymujemy przy tej samej wysokości spadku większe odchylenie x.



rys. 114

O wiele jednak dokładniej można wyznaczyć prędkość kątową ω przy użyciu sposobu, na który pierwszy wskazał Foucault (1850 r.). Załóżmy, że wahadło, zawieszone na biegunie ziemskim, zostało odchylone od położenia równowagi o kąt dostatecznie mały, abyśmy mogli uważać ruch drgający za zacho-

dzący w płaszczyźnie poziomej. Kierunek płaszczyzny wahań względem układu odniesienia, związanego z gwiazdami stałymi. pozostawać będzie bez zmiany, kierunek bowiem siły ciężkości. jedynej siły, działającej na wahadło, leży w płaszczyźnie wahań. Gdyby więc ziemia była nieruchoma, wahadło, wprawione w ruch w płaszczyźnie jakiegokolwiek południka, wahałoby się stale w tej samej płaszczyźnie. W rzeczywistości jednak płaszczyzna południka obraca się z zachodu na wschód, wobec czego kąt, jaki tworzy z nią płaszczyzna wahań zmienia się z prędkością ω tak, jak gdyby wahadło z tą właśnie prędkością obracało się ze wschodu na zachód, a więc zgodnie z pozornym ruchem słońca. Jeżeli teraz umieścimy wahadło w punkcie M o szerokości geograficznej φ (rys. 114), punkt zawieszenia wahadła przejdzie w ciągu czasu Δt sek na skutek ruchu obrotowego ziemi do punktu M', jednocześnie kierunek pionu zmieni się z OM na OM', pozostając ciągle w płaszczyźnie wahań (rys. 114); płaszczyzna wahań zachowa kierunek równoległy do poprzedniego tak, że gdy poprzednio leżała w płaszczyźnie południka, obecnie utworzy z nią kąt β, równy kątowi, jaki tworzą styczne MN i $M'N$ do południka w jego początkowym i końcowym położeniu.

Przyjmijmy, że $\smile MM' = \alpha . r = \beta . MN$, gdzie $\alpha = \omega \Delta t$, r zaś promień łuku, opisanego przez punkt M. Mamy:

$$r = MN \sin \varphi,$$

stąd

$$\beta = \alpha \sin \varphi = \omega \sin \varphi . \Delta t$$

Na równiku zatem płaszczyzna wahań nie zmienia swego położenia względem południka.

7. POLE GRAWITACYJNE ZIEMI

Ze wzoru (14) i (14a) wynika, że przyspieszenie ziemskie na biegunie, równe G, jest o 3,358 cm/sek^2 większe od przyspieszenia na równiku g_0. Na wartość g_0 pomiary dają liczbę 978,046 cm/sek^2, wobec czego $g_{90} = G$ powinno być równe 981,404 cm/sek^2. Wartość ta jest, niewątpliwie, o wiele mniejsza od wartości rzeczywistej; pomiary bowiem wykazują o wiele szybsze zwiększanie się przyspieszenia ze wzrostem szerokości

geograficznej miejsca pomiaru tak, że już dla punktów położonych pod 64° 47′22″ szerokości północnej (Alaska) g na wysokości 170 m ponad poziomem morza wynosi 982,182 cm/sek^2. Niezgodność ta pochodzi przede wszystkim stąd, że w dotychczasowych rozważaniach przyjmowaliśmy ziemię za bryłę doskonale sztywną i pomijaliśmy wpływ ruchu obrotowego na jej kształt. Tymczasem wpływ ten jest znaczny; siła odśrodkowa, mając w punktach o różnej szerokości geograficznej różne wartości, nie działa jednakowo na wszystkie części powierzchni ziemi. To nierównomierne działanie, wzrastające od bieguna ku równikowi, powoduje zwiększenie się promienia ziemi na równiku i spłaszczenie jej na biegunach, nadając ziemi kształt elipsoidy obrotowej, której osią obrotu jest oś ziemska. W polu grawitacyjnym, wytworzonym przez tego rodzaju bryłę, natężenie pola $\vec{G}$ nie ma jednakowej wartości we wszystkich punktach tej powierzchni, co więcej, kierunki tego natężenia nie przecinają się w środku bryły.

W szerokości 45^0 odchylenie kierunku natężenia od kierunku promienia wynosi około 5′ 40″, odchylenie zatem g wynosi, zgodnie z danymi przytoczonymi w ust. 6, 11′ 36″.

Oznaczając przez g_0 przyspieszenie na równiku, przez g_φ — przyspieszenie ziemi w punkcie o szerokości geograficznej φ, przez μ — $\frac{\omega^2 R_r}{g_0}$, gdzie R_r promień ziemi na równiku i wreszcie przez e tzw. **s p ł a s z c z e n i e** ziemi równe $\frac{R_r - R_b}{R_r}$, gdzie R_b — promień ziemi, przechodzący przez biegun, znajdujemy rachunkiem, którego tu przytaczać nie będziemy, że wzór (14a) należy zastąpić innym, mającym po odrzuceniu iloczynu i drugich potęg wielkosci μ i e postać

$$g_\varphi = g_0 \left\{1 + \left(\frac{5}{2}\mu - e\right)\sin^2\varphi\right\}. \quad (17)$$

kładąc $\varphi = \frac{\pi}{2}$, znajdujemy dla przyspieszenia na biegunie

$$g_{90} = g_0\left(1 + \frac{5}{2}\mu - e\right),$$

skąd otrzymujemy słynny wzór, wyprowadzony w 1743 r. przez czternastoletniego Clairault'a

$$e = \frac{5}{2}\mu - \frac{g_{90} - g_0}{g_0}, \qquad (18)$$

pozwalający wyznaczyć kształt ziemi z pomiarów siły ciężkości.

Najczęściej jednak niewiadome e i R_r znajdowane są przy pomocy pomiarów geodezyjnych. Na $\mu = \frac{\omega^2 R_r}{g_0}$ możemy przyjąć podaną wyżej (ust. 6) wartość 0,0034677, na e zaś wartość $\frac{1}{299,05}$, wyznaczoną przez Bessela (1841 r.) i mało różniącą się od otrzymanej przez Helmerta (1901 r.) z pomiarów przyspieszenia g wartości $\frac{1}{298,3}$. Te wielkości oraz długość połowy mniejszej osi elipsoidy (R_b) charakteryzują **elipsoidę ziemską**, bryłę, możliwie mało różniącą się kształtem, wymiarami i objętością od istotnego kształtu, wymiarów i objętości ziemi. W istocie bowiem ziemia nie jest bryłą prawidłową; postać jej kształtowały poza siłą odśrodkową jeszcze i inne czynniki. Nie wchodząc w ich rozpatrywanie, poprzestaniemy na zaznaczeniu, że ze wzoru (17), a jeszcze lepiej z dokładniejszego wzoru Helmerta

$$g_\varphi = g_0\,(1 + 0{,}005302 \sin^2\varphi - 0{,}000007 \sin^2 2\,\varphi), \qquad (17\,\text{a})$$

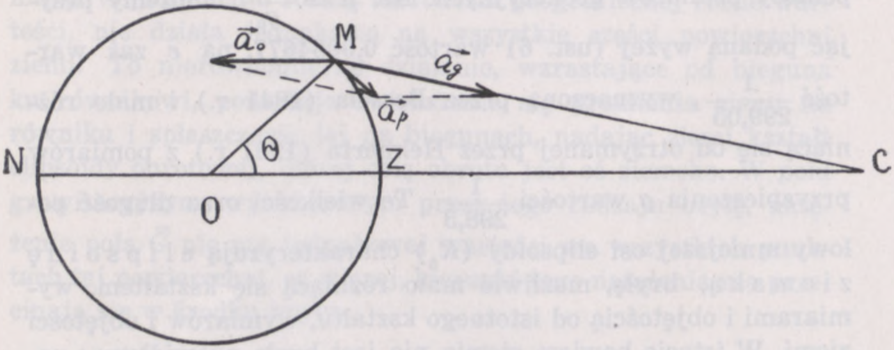
gdzie $g_0 = 978{,}046$, można z wystarczającą dokładnością obliczyć g_φ na poziomie morza.

Stwierdzone w niektórych miejscach ziemi różnice między obliczonymi ze wzoru (17 a) i otrzymanymi z bezpośrednich pomiarów wartościami g pozwalają wyznaczyć różnice, zachodzące w danym miejscu ziemi między istotnym jej kształtem, a tym, jaki jej przypisaliśmy przy wyprowadzeniu wzoru (17 a), oraz zdać sobie sprawę z rozmieszczenia mas przyciągających w jej wnętrzu. Te tzw. **anomalie** są największe w górach, gdzie, jak np. w Himalajach, dochodzą do 0,52 cm/sek^2 (w Karpatach, według Rudzkiego, wynoszą przeciętnie 0,06 cm/sek^2), najmniejsze, z wyjątkiem nielicznych stosunkowo miejsc, na oceanach.

8. WPŁYW SIŁY GRAWITACYJNEJ KSIĘŻYCA I SŁOŃCA NA WARTOŚĆ I KIERUNEK PRZYSPIESZENIA g

W ustępach poprzednich rozumowaliśmy tak, jak gdyby ziemia wraz ze znajdującymi się na niej ciałami była układem odo-

sobnionym. W rzeczywistości jednak, na równi z ziemią wszystkie ciała ziemskie podlegają grawitacyjnemu działaniu księżyca i słońca. Uważajmy przyciągające ciało niebieskie za punkt materialny, co nawet w przypadku księżyca, znajdującego się o wiele bliżej ziemi, niż słońce, nie pociągnie za sobą znaczniejszego błędu. Niech prosta CO, łącząca środek ziemi z danym



rys. 115

ciałem niebieskim, przecina kulę ziemską w punktach Z i N. Natężenie pola grawitacyjnego ciała C ma w punkcie Z wartość większą, niż w punkcie O, wobec czego punkt materialny, umieszczony w Z, porusza się względem układu, związanego sztywnie ze środkiem masy ziemi O, z przyspieszeniem, równym różnicy przyspieszeń, udzielanych przez ciało przyciągające środkowi masy i punktowi Z, a więc równemu

$$a_p = k\frac{m_c}{ZC^2} - k\frac{m_c}{OC^2}. \qquad \text{(a)}$$

Przyspieszenie to, które nazwiemy p r z y s p i e s z e n i e m p r z y p ł y w o w y m, skierowane jest ku ciału C, wzdłuż prostej OC. Przyjmijmy dla uproszczenia, że $\vec{g}$ równe jest $\vec{G}$, natężeniu pola nieruchomej ziemi kulistej. Wtedy przyspieszenie przypływowe będzie miało kierunek przeciwny do $\vec{g}$. Spadek swobodny ciał, umieszczonych w punkcie Z, zachodzić będzie z przyspieszeniem $g' = g - a_p$. W punkcie N siła przyciągająca jest mniejsza, niż w punkcie O; przyspieszenie przypływowe skiero-

wane jest na zewnątrz wzdłuż prostej OC. I w tym więc punkcie przyspieszenie swobodnego spadania jest mniejsze od g o wartość przyspieszenia przypływowego w punkcie N.

Wzór (a) możemy przepisać w postaci

$$a_p = km_c\left(\frac{1}{(r-R)^2} - \frac{1}{r^2}\right),$$

gdzie r oznacza odległość punktu O od C, R — promień ziemi, stąd

$$a_p = k\frac{m_c}{r^2}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{R}{r}\right)^2} - 1\right\} = k\frac{m_c}{r^2}\left\{\left(1-\frac{R}{r}\right)^{-2} - 1\right\}$$

odrzucając drugą i wyższe potęgi małego ułamka $\frac{R}{r}$, otrzymamy

$$a_p = k\frac{m_c}{r^2}\cdot\frac{2R}{r}.$$

Zakładając w dalszym ciągu, że $g = G = k\frac{m_z}{R^2}$, gdzie m_z — masa ziemi, otrzymamy

$$a_p = 2\frac{m_c}{m_z}\left(\frac{R}{r}\right)^3 g. \qquad \text{(b)}$$

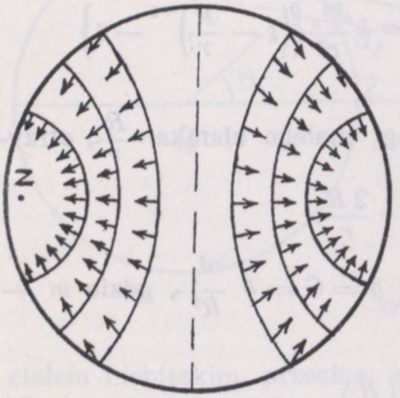
Gdy ciałem przyciągającym jest księżyc, $r = 60\,R$, $m_c = \frac{1}{81}m_z$,

$$a_p = \frac{2}{81}\left(\frac{1}{60}\right)^3 g = \frac{1}{8\,748\,000}g.$$

a_p jest zatem wielkością, której przy tej dokładności, jaką obecnie posiadają pomiary g, nie można wyznaczyć bezpośrednio w doświadczeniu. Analogiczny rachunek wykonany dla przypadku, gdy ciałem przyciągającym jest słońce o masie 333432 razy większej od masy ziemi i odległej od środka masy ziemi o mniej więcej 23400 R, wykaże, że działanie słońca jest prawie 2 razy mniejsze od działania księżyca.

W punktach Z i N przyspieszenie przypływowe ma kierunek pionowy, w punkcie M, gdzie kierunki przyspieszeń, nadawanych przez ciało przyciągające punktom M i O, nie leżą na tej samej prostej, można je rozłożyć na dwie składowe, z których

pionowa wpływa na zmianę wartości przyspieszenia swobodnego spadku ciał, pozioma zaś powoduje zmianę kierunku pionu. Ta właśnie składowa przesuwa w kierunku swego działania masy wód, pokrywających znaczną część powierzchni ziemi, przy czym ruch ten na półkuli, zwróconej do ciała przyciągającego, zachodzi ku punktowi Z (z e n i t względem ciała przyciągającego), na półkuli drugiej w kierunku punktu N (n a d i r względem ciała przyciągającego) (rys. 115). W punktach, leżących w tej samej odległości od ciała przyciągającego, co środek ziemi, a więc w punktach, dla których kąt Θ (tzw. geocentryczna odległość wierzchołkowa danego ciała niebieskiego C) jest mniej więcej równy 90°, przyspieszenie przypływowe, a więc i jego składowa pozioma są równe zeru. Największą wartość składowa pozioma posiada w punktach, dla których kąt Θ równy jest około 45°. Ruch więc wód, zachodzący pod działaniem tej składowej i stanowiący zjawisko p r z y p ł y w u i o d p ł y w u można schematycznie przedstawić tak, jak na rys. 116. I w tym przypadku działanie księżyca jest większe, niż działanie słońca; tak, że w pierwszym przybliżeniu okresowość zjawisk przypływu i odpływu jest wyznaczona przez okresowe zmiany położenia księżyca względem ziemi (albo innymi słowy, przez zmiany położenia punktów Z i N na powierzchni ziemi).



rys. 116

W rzeczywistości zjawisko to jest o wiele bardziej złożone, niż mogło by się wydawać na podstawie wyżej przytoczonych rozważań. Na ruch wód wpływa i składowa pionowa przyspieszenia przypływowego, powodując w tych miejscach, w których wartość jej jest większa, pewną nadwyżkę ciśnienia, wywołującą ruch wody do miejsc o ciśnieniu mniejszym. W zbiornikach zamkniętych, jak wielkie jeziora lub morza śródlądowe czy też łączące się z oceanami jedynie przez wąskie cieśniny, odgrywa rolę także konfiguracja wybrzeża, wobec czego różnice najwyższego i najniższego stanu wody przybierają najrozmaitsze w różnych punktach ziemi wartości. Tytułem przykładu przytoczymy, że gdy na wyspach oceanicznych różnica ta wyraża się

liczbą kilkudziesięciu centymetrów, w krętych zatokach północnej Europy może dochodzić do kilkunastu metrów.

Pierwszą teorię przypływów, opartą na grawitacji, dał Newton; ale ani on ani jego bezpośredni następcy Euler, Maclaurin i Daniel Bernoulli (1740 r.) nie uwzględnili w swych wywodach ruchu obrotowego ziemi. Lukę tę wypełniła dopiero tzw. dynamiczna teoria, opracowana przez Laplace'a (1774 r.), w następstwie wielokrotnie uzupełniana i pogłębiana.

Podobnym przypływom, jakkolwiek o znacznie mniejszym natężeniu, podlega cała skorupa ziemska, jak na to wskazują choćby pomiary, wykonane przez Heckera (1911 r.).

9. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI CIAŁ. CIĘŻAROWY UKŁAD JEDNOSTEK

Na niewielkim obszarze ziemi możemy, gdy nie chodzi o pomiary zbyt dokładne, uważać przyspieszenie ziemskie za stałe i kierunki pionowe za równoległe. Siły ciężkości, działające na poszczególne elementy ciała o niewielkich rozmiarach, będą miały, jako równoległe i proporcjonalne do mas, na które działają, wypadkową, przechodzącą przez środek masy, jak to wynika z określenia tego punktu oraz z twierdzeń rozdz. III, ust. 1. Z tego też powodu punkt ten bywa nazywany środkiem ciężkości ciała.

Ciężar oznaczonego ciała w danym miejscu ziemi jest często dogodnym wzorcem siły, którą w tym przypadku można uważać za wielkość podstawową (patrz. Wstęp, ust. 8). Jednostką masy w tym ciężarowym układzie jednostek jest masa, której jednostka ciężaru udziela przyspieszenia równego jednostce. Przyjmując za jednostkę siły ciężar 1 kg, który oznaczać będziemy przez 1 kgc, za jednostkę długości — 1 metr, za jednostkę więc przyspieszenia 1 m/sek², otrzymujemy ze wzoru, wyrażającego drugą zasadę Newtona

$$1 \text{ kgc} = 1 \text{ jedn. cięż. masy} \times 1 \text{ m/sek}^2;$$

po podstawieniu jednostek C. G. S i przyjęciu na g zaokrąglonej wartości, jaką ma w 45° szerokości geograficznej na poziomie morza ($g_{45} = 980{,}64$ cm/sek²), znajdujemy

$$1000.981 \text{ dyn} = 1 \text{ jedn. cięż. masy} \times 100 \text{ cm/sek}^2,$$

stąd $\quad 1 \text{ j. cięż. masy} = 9810 \text{ g} = 9{,}81 \text{ kg}.$

Takiej ciężarowej jednostki masy należy używać we wszystkich wzorach poprzednio wyprowadzonych, gdy dynę zastępujemy 1 kgc i centymetr — metrem.

Jednostką pracy w tym układzie jest 1 kilogramometr (1 kgm): praca, wykonana przez siłę 1 kgc przy przesuwaniu punktu przyłożenia siły w kierunku jej działania na drodze 1 m; jednostką mocy (dzielności) — 1 kilogramometr na sekundę (1 kgm/sek) lub częściej 1 koń mechaniczny $(1\,KM) = 75$ kgm/sek.

W tym nowym układzie wymiar masy jest równy

$$[m] = F\,.\,L^{-1}\,T^2$$

gdzie F jest symbolem jednostki siły.

Wymiar pracy

$$[\mathcal{T}] = F\,.\,L.$$

ROZDZIAŁ V

WŁASNOŚCI SPRĘŻYSTE CIAŁ — CIAŁA STAŁE

1. ODKSZTAŁCENIE CIAŁ. CIŚNIENIE. KLASYFIKACJA CIAŁ WEDŁUG ICH WŁASNOŚCI SPRĘŻYSTYCH

Jak o tym wspominaliśmy w ust. 1 rozdz. II, działanie sił ujawnia się nie tylko w zmianie prędkości ruchu ciała, poddanego tym siłom, lecz również i w spowodowanych przez nie o d k s z t a ł c e n i a c h. Tym terminem oznaczamy ogólnie wszelką zmianę wzajemnego położenia poszczególnych części danego ciała, a więc to zjawisko, które, zakładając, że rozpatrywane przez nas ciała są bryłami sztywnymi, pomijaliśmy dotychczas w naszych rozważaniach. Zazwyczaj zmiana prędkości ruchu i odkształcenie występują jednocześnie; niejednokrotnie jednak mamy do czynienia tylko z odkształceniami, wtedy mianowicie, gdy zarówno wypadkowa jak i suma momentów wszystkich sił, działających na ciało, są równe zeru, gdy zatem w przypadku ciała o własnościach bryły sztywnej działania sił wzajemnie by się równoważyły. Tak np. ciężar Q zawieszony na końcu pręta pionowego, którego górny koniec jest umocowany, oraz ciężar q samego pręta równoważy się oporem, jaki stawia umocowanie, tak że jedynym skutkiem działania sił jest w tym przypadku wydłużenie pręta w kierunku przyłożonych sił Q, q i równoważnego im oporu. Do wyznaczenia jednak wielkości zachodzącego wtedy odkształcenia, którego miarą w danym przypadku jest przyrost względny długości, nie wystarczy już podanie wartości działającej siły.

Wyobraźmy sobie, że pręt o przekroju S cm² składa się z wiązki n bardzo cienkich prętów o przekroju $\frac{S}{n} = \Delta S$ cm² i o długości l_0 wtedy, gdy pręt nie był jeszcze obciążony (ciężar q

pręta uważamy za bardzo mały w porównaniu z ciężarem Q). Długość pręta po obciążeniu wzrosła do l_1, tak samo wzrosła długość każdego z prętów elementarnych, jakkolwiek na każdy z nich przypadało nie obciążenie Q, lecz n razy mniejsze $\frac{Q}{n}$. Można zatem sądzić, że odkształcające działanie siły zależy od stosunku jej wartości do powierzchni, poddanej temu działaniu, wielkość bowiem $\frac{Q}{n.\Delta S}=\frac{Q}{S}$ ma tę samą wartość dla całego pręta, co i dla każdego z prętów elementarnych.

Wielkość tę nazywamy ciśnieniem, rozróżniając często dwa rodzaje ciśnienia: napięcie, gdy kierunek ciśnienia, zgodny z kierunkiem działającej na daną powierzchnię siły, tworzy kąt mniejszy od prostego z normalną do danej powierzchni, skierowaną na zewnątrz objętości, ograniczonej tą powierzchnią, i ciśnienie, w ściślejszym tego słowa znaczeniu, gdy tworzy z tą normalną kąt rozwarty. Wymiar ciśnienia p jest równy

$$[p]=\frac{[f]}{[S]}=ML^{-1}T^{-2} \tag{1}$$

Jednostką ciśnienia jest w układzie C . G . S . dyna na cm², oznaczana często nazwą bar (greck. baros — ciężar, waga), i 10^6 dyn/cm² — megabar (gr. megas — wielki). W układzie ciężarowym kilogram na cm², tzw. atmosfera techniczna — 1 at lub kilogram na mm² (kgc/mm² równy mniej więcej 10^8 dyn/cm², dokładnie $9{,}806.10^7$ dyn/cm²). Poza tym jest w użyciu tzw. atmosfera (Atm), o której będzie mowa niżej (rozdz. VI, ust. 4), równa 1013260 dyn/cm², a więc mniej więcej 1 megabarowi.

Ciało, doznające odkształceń, podlega zazwyczaj zarówno zmianie objętości, jak i kształtu. W szczególnych jednak przypadkach może zachodzić tylko jeden z tych dwu rodzajów odkształceń podstawowych.

Doświadczenie wskazuje, że zmiana objętości zachodzi jedynie wtedy, gdy na ciało działa ciśnienie, którego wartość, zależna na ogół od rodzaju ciała, musi być większa od zera, o ile zaś chodzi o zmianę kształtu, to w pewnej grupie ciał zmianę tę można spowodować działaniem ciśnienia dowolnie małego, jeżeli ciało odkształcamy dostatecznie wolno. Ciała, na-

leżące do tej grupy, nazywamy p ł y n a m i, wyodrębniając je od ciał pozostałych, które nazywać będziemy c i a ł a m i s t a ł y m i. Podział, na tej własności oparty, daleki jest od ścisłości, zakłada bowiem, że każde ciało zaliczone do jednej z tych dwu grup, stale w niej pozostaje, bez względu na warunki, w jakich się znajduje, co nie odpowiada rzeczywistemu stanowi rzeczy (ust. 6), tak, że raczej należało by mówić o stanach płynnym i stałym, w jakich może się znajdować dane ciało; nie jest również dostatecznie wyczerpujący, gdyż, jak o tym będzie mowa niżej, w płynach będziemy musieli rozróżniać c i e c z e i g a z y, pozwoli nam jednak zdać sobie sprawę z pewnych typowych zjawisk, do których z większym lub mniejszym przybliżeniem można sprowadzić obserwowane przez nas zjawiska.

2. WYDŁUŻANIE CIAŁ. SIŁY SPRĘŻYSTOŚCI. MODUŁ YOUNGA

Najprostszym przypadkiem odkształcenia ciała stałego jest wspomniane wyżej odkształcenie, zachodzące przy rozciąganiu lub zgniataniu pręta lub sztaby. Załóżmy dla uproszczenia, że badane ciało jest nie tylko j e d n o r o d n e, tzn. takie, którego wszystkie części (na jakie, używając sposobów mechanicznych, możemy je podzielić) posiadają te same własności, lecz również i i z o t r o p o w e (równokierunkowe, grec. izos — równy, tropos — sposób, kierunek), tzn. takie, którego własności są we wszystkich kierunkach, jakie w nim sobie wyobrażamy, te same. Tym warunkom — jednorodności i równokierunkowości — czynią zadość wszystkie metale, możemy więc przyjąć, że badana sztaba wycięta jest z bryły metalu.

Ściśle biorąc, metale są ciałami pozornie równokierunkowymi (p s e u d o i z o t r o p o w y m i), budowa ich bowiem jest krystaliczna; kryształy te jednak są bardzo małe, i jak tego dowodzi badanie mikroskopowe przekrojów, w dowolnie wyciętej sztabie jest ich tak wiele, ułożonych w najrozmaitszy sposób, że z pomiarów, które w pojedynczym krysztale dałyby nam różne wyniki zależnie od kierunku, w jakim dane wielkości mierzymy, w tym przypadku otrzymujemy wartości przeciętne, niezależne w granicach błędu doświadczenia od kierunku.

Wielokrotne staranne pomiary wydłużeń, jakich doznawały sztaby lub pręty metalowe, o przekroju na całej długości jednakowym, poddawane coraz to większym obciążeniom, ustaliły,

że 1. przy niewielkich obciążeniach wydłużenie względne $\lambda = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$ jest proporcjonalne do napięcia wydłużającego $\frac{Q}{S}$, wielkość zaś wydłużenia przy danym napięciu zależy od rodzaju badanego ciała; że 2. w tych granicach proporcjonalności z usunięciem obciążenia znika również i wydłużenie; pręt przybiera z powrotem tę samą długość, jaką miał przed odkształceniem; i wreszcie, że 3. poddawanie pręta ciśnieniom, zawartym w tych samych granicach, w jakich poprzednio zawarte było napięcie, powoduje skrócenie względne pręta, będące w takim samym stosunku do wielkości ciśnienia, jak poprzednio wydłużenie względne λ do wielkości napięcia.

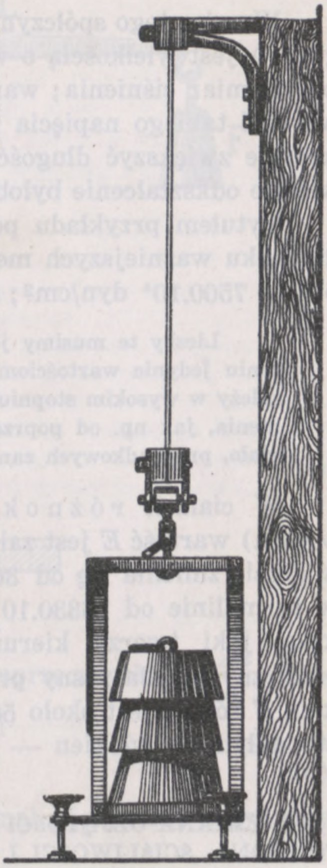
Te wyniki pomiarów możemy schematycznie wyjaśnić sobie w sposób następujący. Gdy pręt, obciążony ciężarem Q, zwiększy swą długość od l_0 do l_1, wydłużenie, jakiego doznał, odpowiada stanowi równowagi między zewnętrznymi siłami odkształcającymi, a siłami wewnętrznymi, powstającymi w ciele na skutek zmiany wzajemnego położenia jego części. Z proporcjonalności między siłami zewnętrznymi i wydłużeniem danego pręta wynika, że powstające przy takim odkształceniu siły wewnętrzne są również do wielkości odkształcenia proporcjonalne. One to sprawiają, że po usunięciu sił zewnętrznych ciało wraca do swej poprzedniej długości. Jeżeli wydłużenie pręta będzie zachodziło tak, aby w każdej chwili siły zewnętrzne były równoważone przez siły wewnętrzne (można to osiągnąć zwiększając obciążenie bardzo powoli i stopniowo), praca, wykonana przy odkształceniu przez siły zewnętrzne, jest równa pracy, wykonanej przez siły wewnętrzne przy usuwaniu odkształcenia, siły zatem wewnętrzne są siłami zachowawczymi (rozdz. II, ust. 10). Siły wewnętrzne, czyniące zadość tym warunkom, nazywamy s i ł a m i s p r ę ż y s t o ś c i, odkształcenia zaś, znikające po usunięciu działającej siły, s p r ę ż y s t y m i (patrz. ust. 6).

Niech Q oznacza siłę, działającą na odkształcane ciało, i niech Q wzrasta w sposób wyżej wskazany; związek między Q i λ wyrazi się na ogół funkcją $Q = f(\lambda)$, której odpowiada pewna linia krzywa; gdy przy zmniejszaniu Q punkty, odpowiadające tym samym wartościom Q, będą leżały na tej samej krzywej, odkształcenie będzie d o s k o n a l e s p r ę ż y s t e. W rozpatrywanym przez nas przypadku

wydłużeń niewielkich $f(\lambda)$ jest linią prostą; punkty, wyznaczające zależność odkształcenia od obciążenia, leżą zarówno przy zwiększaniu, jak i zmniejszaniu napięcia zewnętrznego na tej samej prostej.

Możemy zatem powiedzieć: przy niewielkich obciążeniach odkształcenia są sprężyste i wielkość ich, zależna od rodzaju odkształcanego ciała, jest proporcjonalna do odkształcającego ciśnienia lub napięcia, zmieniając razem z nim swój znak.

To prawo, ustalone przez Hooke'a w 1679 r. dla wszelkiego rodzaju odkształceń sprężystych, sprawdził dokładnie pierwszy Wertheim (1844 r.), używając przyrządu (rys. 117), który z pewnymi zmianami, mającymi na celu osiągnięcie większej dokładności pomiaru, był używany i przez późniejszych badaczy. Ciężary, wydłużające drut, umieszczano na szalce, zaopatrzonej w śruby. Przed rozpoczęciem pomiaru śruby te są tak wykręcone, aby szalka spoczywała na podstawie nieruchomo. Dopiero po nałożeniu ciężarów wkręca się śruby możliwie powoli; w ten sposób unika się uderzeń, które by mogły powstać przy szybkim nakładaniu ciężarów i zniekształcić wyniki pomiarów (patrz. rozdz. II, ust. 20 a).



rys. 117

Oznaczając $\frac{Q}{S}$ przez p, mamy

$$p = E\lambda \tag{2}$$

gdzie E — spółczynnik proporcjonalności, zależny jedynie od rodzaju badanego ciała i nazywany modułem Younga (łac. modulus — miara, ilość) od nazwiska fizyka Tomasza Younga, który pierwszy (1807 r.) wyznaczał tę wielkość, lub spółczynnikiem sprężystości przy wydłużaniu.

Wymiar tego spółczynnika jest, jak to wynika ze wzoru (2), gdzie λ jest wielkością o wymiarze równym jedności, taki sam, jak wymiar ciśnienia; wartość zaś jego możemy określić, jako wartość takiego napięcia zewnętrznego, które by mogło dwukrotnie zwiększyć długość danej sztaby, o ile, oczywiście, tak wielkie odkształcenie byłoby jeszcze odkształceniem sprężystym.

Tytułem przykładu podajemy tutaj wartość E w dyn/cm² dla kilku ważniejszych metali. Ołów — 1700.10^8 dyn/cm²; srebro — 7500.10^8 dyn/cm²; stal i nikiel — 22000.10^8 dyn/cm².

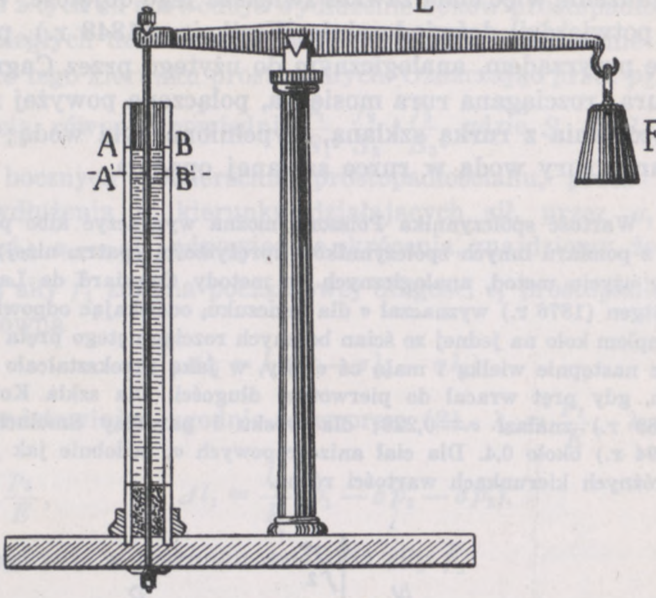
Liczby te musimy jednak uważać za odpowiadające w przybliżeniu jedynie wartościom spółczynnika E; wynik bowiem pomiarów zależy w wysokim stopniu od czynników, często trudnych do uwzględnienia, jak np. od poprzednich odkształceń, doznanych przez dane ciało, przypadkowych zanieczyszczeń itd. (patrz. ust. 6).

W ciałach r ó ż n o k i e r u n k o w y c h (a n i z o t r o p o w y c h) wartość E jest zależna od kierunku wydłużania; tak np. w gipsie zmienia się od 3000.10^8 dyn/cm² do 9000.10^8 dyn/cm², w turmalinie od 16330.10^8 do 25570.10^8 dyn/cm², zależnie od kąta, jaki tworzy kierunek wydłużania z osiami krystalograficznymi; dla sosny przy wydłużaniu równoległym do włókien E równe jest około 560.10^8 dyn/cm², przy wydłużaniu prostopadłym do włókien — około 95.10^8 dyn/cm².

3. ZMIANA OBJĘTOŚCI PRZY WYDŁUŻANIU. SPÓŁCZYNNIKI: POISSONA, ŚCIŚLIWOŚCI I SZTYWNOŚCI

Wydłużaniu w kierunku działającej siły wewnętrznej towarzyszy zmniejszanie się przekroju wydłużanego ciała. To zjawisko doświadczalnie stwierdził Çagniard de Latour (1827 r.) przy pomocy przyrządu, wyobrażonego na rys. 118. Górny koniec pionowego pręta metalowego, umocowanego w nieruchomej podstawce, był przyśrubowany do ramienia dźwigni L. Pręt umieszczony był w wąskiej rurce, wypełnionej prawie po brzegi wodą. Przy obciążaniu drugiego ramienia dźwigni L pręt się wydłużał, jednocześnie poziom wody AB w rurce opadał, jakkolwiek długość części pręta, znajdującego się w rurce, pozostawała bez zmiany.

Załóżmy, że pręt ma przekrój kwadratowy o długości boków a cm. Wydłużenie λ pręta spowoduje, jak to można wykazać do-



rys. 118

świadczalnie, skrócenie wymiarów poprzecznych $\alpha = \frac{\Delta a}{a}$, proporcjonalne do λ. Będziemy więc mieli

$$\alpha = \sigma\lambda, \qquad (2a)$$

gdzie σ jest spółczynnikiem proporcjonalności, który nazywamy spółczynnikiem Poissona.

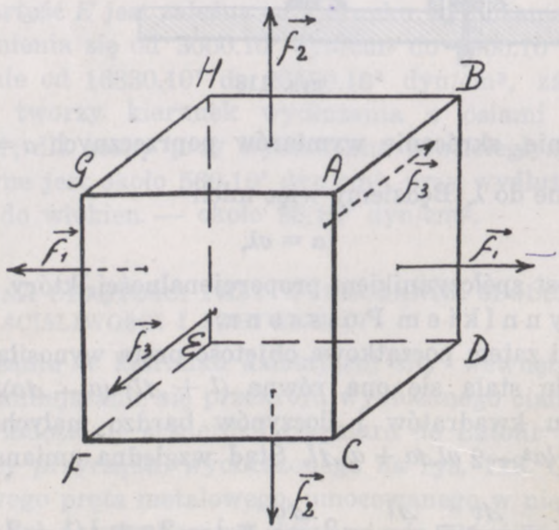
Jeżeli zatem początkowa objętość pręta wynosiła la^2, to po wydłużeniu stała się ona równa $(l + \Delta l)(a - \Delta a)^2$ albo, po odrzuceniu kwadratów i iloczynów bardzo małych wielkości $\Delta\lambda$ i Δa, $la^2 - 2\,al\Delta a + a^2\Delta l$. Stąd względna zmiana objętości

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta v}{la^2} = \frac{\Delta l}{l} - 2\frac{\Delta a}{a} = \lambda - 2\alpha = \lambda(1 - 2\sigma). \qquad (2b)$$

Poisson (1781—1840), opierając się na założeniach teoretycznych, przypuszczał, że σ ma tę samą wartość dla wszystkich ciał jednorodnych i równokierunkowych równą 0,25. Późniejsze jednak pomiary wykazały, że σ ma dla różnych ciał wartości różne, zawarte w granicach od 0,21 dla zahartowanego cynku do 0,446 dla ołowiu.

Wydłużenie więc ciała zawsze zwiększa jego objętość. Wniosek ten potwierdził doświadczalnie Wertheim (1848 r.), posługując się przyrządem, analogicznym do użytego przez Cagniard de Latoura: rozciągana rura mosiężna, połączona powyżej miejsca umocowania z rurką szklaną, wypełniona była wodą; przy rozciąganiu rury woda w rurce szklanej opadała.

Wartość spółczynnika Poissona można wyznaczyć albo pośrednio z pomiaru innych spółczynników sprężystości (patrz. niżej), albo przy użyciu metod, analogicznych do metody Cagniard de Latoura. Röntgen (1876 r.) wyznaczał σ dla kauczuku, odciskając odpowiednim stemplem koło na jednej ze ścian bocznych rozciągniętego pręta i mierząc następnie wielką i małą oś elipsy, w jaką przekształcało się to koło, gdy pręt wracał do pierwotnej długości. Dla szkła Kowalski (1889 r.) znalazł $\sigma = 0{,}226$; dla wosku i parafiny Smoluchowski (1894 r.) około 0,4. Dla ciał anizotropowych σ, podobnie jak E, ma w różnych kierunkach wartości różne.



rys. 119

Znajomość spółczynnika Poissona pozwala wyznaczyć zmianę objętości, jakiej doznaje ciało wszechstronnie i równomiernie ściskane lub rozciągane. Niech $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ będą siłami, prostopadłymi do boków równoległościanu, wyciętego z badanego ciała, i działającymi na te powierzchnie równomiernie (rys. 119).

Każda z tych sił spowoduje wydłużenie boków prostopadłościanu, równoległych do kierunku swego działania, i kurczenie się boków do tego kierunku prostopadłych. Oznaczając przez p_1, p_2, p_3 napięcia, równe odpowiednio $\frac{f_1}{S_1}, \frac{f_2}{S_2}$ i $\frac{f_3}{S_3}$, gdzie S_1, S_2, S_3 są polami bocznych powierzchni prostopadłościanu, przez $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ wydłużenia w kierunku działających sił, przez $\alpha_1 = \sigma\lambda_1$, $\alpha_2 = \sigma\lambda_2$, $\alpha_3 = \sigma\lambda_3$ odpowiednie skrócenia, znajdziemy, że w kierunku siły $\vec{f}_1$ zmiana początkowej długości l_1 prostopadłościanu jest równa

$$\Delta l_1 = l_1(\lambda_1 - \sigma\lambda_2 - \sigma\lambda_3)$$

lub, podstawiając, zgodnie ze wzorem (2), $\lambda_1 = \frac{p_1}{E}$, $\lambda_2 = \frac{p_2}{E}$, $\lambda_3 = \frac{p_3}{E}$, $\Delta l_1 = \frac{l_1}{E}(p_1 - \sigma p_2 - \sigma p_3)$.

Analogicznie w kierunku działania siły $\vec{f}_2$

$$\Delta l_2 = l_2(-\sigma\lambda_1 + \lambda_2 - \sigma\lambda_3) = \frac{l_2}{E}(-\sigma p_1 + p_2 - \sigma p_3)$$

i w kierunku siły $\vec{f}_3$

$$\Delta l_3 = l_3(-\sigma\lambda_1 - \sigma\lambda_2 + \lambda_3) = \frac{l_3}{E}(-\sigma p_1 - \sigma p_2 + p_3).$$

Na zmianę zaś objętości $\Delta v = (l_1 + \Delta l_1)\,(l_2 + \Delta l_2)\,(l_3 + \Delta l_3) - l_1 l_2 l_3$ otrzymamy, po odrzuceniu iloczynów bardzo małych wielkości Δl_1, Δl_2, Δl_3,

$$\Delta v = l_2 l_3 \Delta l_1 + l_3 l_1 \Delta l_2 + l_1 l_2 \Delta l_3$$

i na zmianę względną

$$\frac{\Delta v}{v} = \Theta = \frac{\Delta l_1}{l_1} + \frac{\Delta l_2}{l_2} + \frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{1}{E}\{(1-2\sigma)p_1 + (1-2\sigma)p_2 + (1-2\sigma)p_3\} = \frac{1-2\sigma}{E}(p_1 + p_2 + p_3). \tag{3}$$

W przypadku rozciągania równomiernego, gdy $p_1 = p_2 = p_3 = p$,

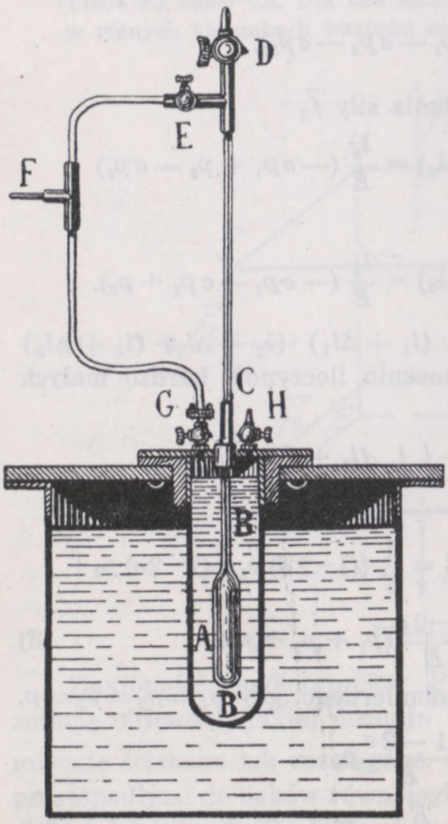
$$\Theta = 3\,\frac{1-2\sigma}{E}\,p,$$

skąd

$$p = \frac{E}{3(1-2\sigma)}\,\Theta = c\Theta, \tag{3 a}$$

gdzie $c = \frac{E}{3(1-2\sigma)}$ nosi nazwę modułu ściśliwości lub spółczynnika sprężystości objętościowej, wielkość zaś $\gamma = \frac{1}{c}$ — spółczynnika ściśliwości. Jak wynika ze wzoru (3 a), c ma wymiar ciśnienia.

Pomiar tego spółczynnika nastręcza duże trudności, a to z uwagi na zasadniczy warunek, aby ciśnienie zewnętrzne było we wszystkich punktach powierzchni badanego ciała do niej prostopadłe i miało wszędzie wartość jednakową. Można to osiągnąć jedynie wtedy, gdy umieścimy badane ciało w cieczy, w której ciśnienie, wywołane przez działanie sił zewnętrznych, czyni zadość temu warunkowi (rozdz. VI, ust. 1). W ten właśnie sposób postępował Regnault (1848 r.), któremu zawdzięczamy pierwsze pomiary spółczynnika ściśliwości ciał stałych. Przyrząd, przez niego używany, tzw. piezometr (gr. piedzein — cisnąć, gnieść) (rys. 120), składa się z zanurzonego w wodzie zbiornika BB', szczelnie wypełnionego wodą. Do tego zbiornika zanurza się badane ciało A, w środku wydrążone i wypełnione wodą, sięgającą do pewnej wysokości C w szklanej rurce włoskowatej, z jaką połączone jest ciało A. Rurka F prowadzi do zbiornika ze zgęszczonym powietrzem. Przy otwartych kranach G i E ciśnienia, wywierane na wodę w zbiorniku BB' i na wodę w badanym ciele A są jednakowe. Zmniejszenie objętości wydrążonego ciała A jest takie samo, jak ciała pełnego; to ciśnienie bowiem, jakiego doznawałyby ściany ciała A od sąsiednich przylegających warstw, jest zastąpione przez ciśnienie p, z jakim woda działa na te ściany. Gdyby woda była nieściśliwa, podniesienie się poziomu w rurce włoskowatej bezpośrednio by wyznaczyło zmianę objętości ciała A, skąd, znając objętość początkową, można wyznaczyć Θ i c. Ściśliwość jednak wody (rozdz. VI, ust. 3) zmusza do wprowadzenia



rys. 120

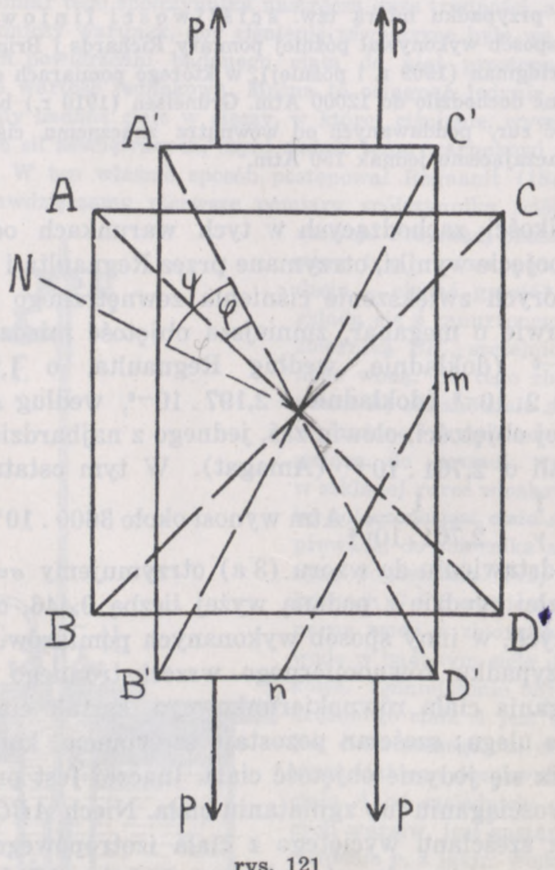
przy obliczaniu odpowiednich poprawek, które Regnault wyznaczał, zamykając kran E lub G i otwierając kran D lub H i w ten sposób poddając badane ciało różnym ciśnieniom zewnętrznym i wewnętrznym.

W analogiczny sposób wykonywał pomiary ściśliwości Amagat (1889 r.), stwierdzając na przykładzie szkła słuszność wzoru (3a). Amagat nadawał badanym ciałom kształt wydłużonych walców, o promieniu małym w stosunku do długości, tak, że zmiana objętości wywoływana była przede wszystkim przez zmianę długości ciała, będącą w tym przypadku miarą tzw. ściśliwości liniowej. W podobny sposób wykonywał później pomiary Richards i Brink (1908 r.) oraz Bridgman (1909 r. i później), w którego pomiarach ciśnienie zewnętrzne dochodziło do 12000 Atm. Grüneisen (1910 r.) badał rozszerzalność rur, poddawanych od wewnątrz znacznemu ciśnieniu, nie przekraczającemu jednak 150 Atm.

O wielkości zachodzących w tych warunkach odkształceń mogą dać pojęcie wyniki, otrzymane przez Regnaulta i Amagata, według których zwiększenie ciśnienia zewnętrznego o 1 Atm, a więc prawie o megabar, zmniejsza objętość miedzi o mniej więcej 10^{-6} (dokładnie, według Regnaulta, o $1{,}23 \, . \, 10^{-6}$), szkła zaś o $2 \, . \, 10^{-6}$ (dokładnie o $2{,}197 \, . \, 10^{-6}$, według Amagata) początkowej objętości, ołowiu zaś, jednego z najbardziej ściśliwszych metali o $2{,}761 \, . \, 10^{-6}$ (Amagat). W tym ostatnim przypadku $c = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{2{,}761 \, . \, 10^{-6}}$ Atm wynosi około $3600 \, . \, 10^{8}$ dyn/cm², skąd po podstawieniu do wzoru (3 a) otrzymujemy $\sigma = 0{,}42$, co jest w niezłej zgodzie z podaną wyżej liczbą 0,446, otrzymaną z późniejszych, w inny sposób wykonanych pomiarów.

W przypadku równomiernego wszechstronnego ściskania lub rozciągania ciała równokierunkowego kształt ciała żadnej zmianie nie ulega: sześcian pozostaje sześcianem, kula — kulą itd., zmienia się jedynie objętość ciała. Inaczej jest przy jednostronnym rozciąganiu lub zgniataniu ciała. Niech $ABCD'$ będzie przekrojem sześcianu wyciętego z ciała izotropowego, poddanego napięciu w kierunku równoległym do boku AB (rys. 121). Na skutek wydłużenia i towarzyszącego mu skurczenia poprzecznego sześcian przejdzie w prostopadłościan $A'B'C'D'$. Punkty materialne warstw równoległych do BC, które poprzednio leżały na prostej AD', prostopadłej do BC, po odkształceniu leżą na prostej $A'D'$, tworzącej kąt φ z AD' i kąt $\psi = 2\varphi$ z prostopadłą do nowej przekątnej $B'C'$. O ten kąt, nazywany ką-

t e m p r z e s u n i ę c i a, przesunęły się więc wzajemnie dane warstwy ciała; otrzymalibyśmy bowiem tę samą zmianę wzajemnego położenia punktów materialnych danych warstw, wywołaną przez zmianę kształtu, gdybyśmy przyjęli, że warstwa *BC* jest nieruchoma, wszystkie zaś inne do niej równoległe przesunęły się o kąt ψ.



rys. 121

To przesunięcie spowodowane jest tym, że składowa napięcia zewnętrznego styczna do warstw równoległych do *BC* nie jest równa zeru. Niech *m n* będzie jedną z tych warstw, składowa styczna siły, działającej na pole *nD'* i równej $p \times$ pole *nD'*, równa jest $p \times$ pole $nD' \times \sin\,(mnD')$, skąd napięcie styczne

$$p_s = p\,\frac{\text{pole}\; nD'}{\text{pole}\; nm}\,\sin(mn\,D') = p\cos\alpha\sin\alpha,$$

gdzie $\alpha = \sphericalangle\, mnD'$.

Dla małych odkształceń, z jakimi mamy tutaj do czynienia, możemy przyjąć, że $\alpha = \sphericalangle\, C'B'D'$ bardzo mało się różni od 45°, że więc $\cos\alpha\,\sin\alpha = \frac{1}{2}$, stąd

$$p_s = \frac{p}{2}.$$

Zakładając, że napięcie jest proporcjonalne do kąta przesunięcia ψ mamy

$$p_s = \frac{p}{2} = \mu\,\psi, \tag{4}$$

gdzie kąt ψ wyrażony jest w radianach, spółczynnik zaś μ, mający wymiar ciśnienia, jest **s p ó ł c z y n n i k i e m s z t y w n o ś c i**.

Opuśćmy z punktu środkowego O prostopadłą na podstawę $B'D'$. Kąt β, jaki ona utworzy z przekątną $A'D'$, równy jest $\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}$, jest on bowiem połową kąta $B'OD'$, który wynosi $\frac{\pi}{2} - \psi$. Długość tej prostopadłej wynosi $l(1+\lambda)$, połowa boku $B'D'$, który uległ skróceniu, $\frac{l}{2}(1-\sigma\lambda)$, mamy zatem

$$tg\,\beta = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) = \frac{tg\,\frac{\pi}{4} - tg\,\frac{\psi}{2}}{1 + tg\,\frac{\pi}{4}\cdot tg\,\frac{\psi}{2}} = \frac{1-\sigma\lambda}{1+\lambda}.$$

Kładąc $tg\,\frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2}$ i zachowując tylko pierwsze potęgi ψ i λ, otrzymujemy

$$\frac{1-\frac{\psi}{2}}{1+\frac{\psi}{2}} = \left(1-\frac{\psi}{2}\right)\left(1-\frac{\psi}{2}\right) = \frac{1-\sigma\lambda}{1+\lambda} = (1-\sigma\lambda)\,(1-\lambda)$$

$$1-\psi = 1-\lambda-\sigma\lambda$$

$$\psi = \lambda(1+\sigma) = \frac{p}{E}(1+\sigma).$$

Podstawiając do wzoru (4), znajdziemy

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} \tag{5}$$

Przepiszmy wzór $p = E\lambda$, wyrażający związek między napięciem zewnętrznym i wydłużeniem względnym λ, w postaci następującej

$$p = E\lambda = \frac{E\sigma}{1+\sigma}\lambda + \frac{E}{1+\sigma}\lambda,$$

skąd, uwzględniając, że zgodnie ze wzorem (2 b), $\frac{\Delta v}{v} = \Theta = \lambda(1-2\sigma)$, otrzymujemy

$$p = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\Theta + \frac{E}{1+\sigma}\lambda.$$

Możemy zatem odkształcenie, zachodzące w tym przypadku, wyobrazić sobie, jako złożone z dwu odkształceń: jednego, polegającego na zmianie objętości ciała, drugiego zaś — na jego wydłużeniu. Napięcia, powodujące każde z tych odkształceń i których suma równa jest p, będą odpowiednio równe

$$p_1 = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\Theta \quad \text{i} \quad p_2 = \frac{E}{1+\sigma}\lambda; \tag{5 a}$$

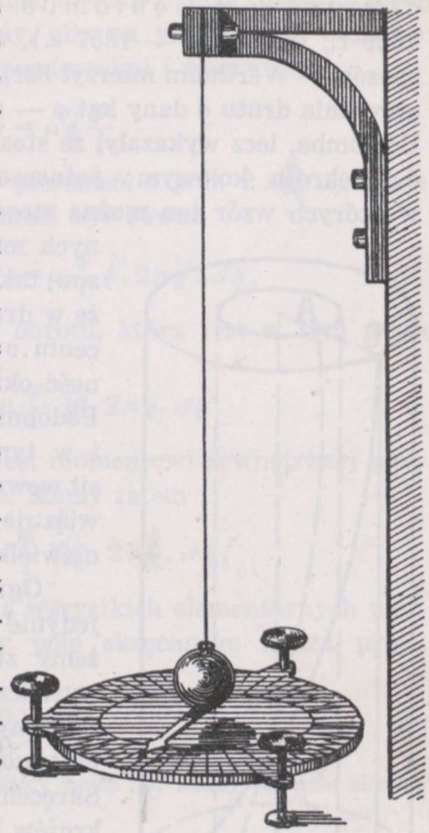
spółczynniki $\Lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$ i $N = \frac{E}{1+\sigma}$ noszą nazwy **spółczynników Lamé'go**, od nazwiska fizyka, który je wprowadził (1866 r.) do teorii sprężystości. Spółczynnik N jest, jak wynika z porównania wzorów (5) i (5 a), równy dwa razy wziętemu spółczynnikowi sztywności.

4. SKRĘCANIE

Spółczynnik sztywności możemy wyznaczyć, mierząc skręcanie, jakiemu ulega drut lub pręt, umocowany w jednym końcu, na drugim zaś poddany działaniu pary sił.

Pierwsze badania tego rodzaju odkształceń zawdzięczamy Coulombowi (1784 r.). Przyrząd, którym się Coulomb posługiwał, składał się z drutu, o przekroju kołowym, obciążonego kulą, zaopatrzoną we wskazówkę, pod którą umieszczona była pozioma tarcza o podziałce kątowej (rys. 122). Gdy drut skręcano dookoła osi pionowej o kąt φ, którego wielkość można było odczytać z położenia wskazówki, i następnie pozostawiano samemu sobie, drut rozkręcał się, wracał do stanu, w jakim był przed odkształceniem, skręcał się w stronę przeciwną o ten sam mniej

więcej kąt, na jaki był poprzednio skręcony, wracał znów do położenia równowagi itd., wykonywając w ten sposób wahania w płaszczyźnie poziomej. Wahania te zachodziły pod działaniem sił sprężystych, powstających w drucie na skutek skręcenia. Coulomb stwierdził, że okres wahań był niezależny od kąta skręcenia φ, że więc wzbudzone siły sprężystości były do tego kąta proporcjonalne (rozdz. III, ust. 5), same zaś odkształcenia, znikające po usunięciu siły odkształcającej, — odkształceniami sprężystymi. Oznaczając przez M moment zewnętrznej pary sił, którą musielibyśmy działać na skręcany koniec drutu, aby zrównoważyć sumę momentów sił sprężystości względem osi obrotu, mamy



rys. 122

$$M = D \cdot \varphi,$$

gdzie D spółczynnik proporcjonalności, zależny od długości, grubości i rodzaju drutu. Okres wahań równy jest (rozdz. III, ust. 5)

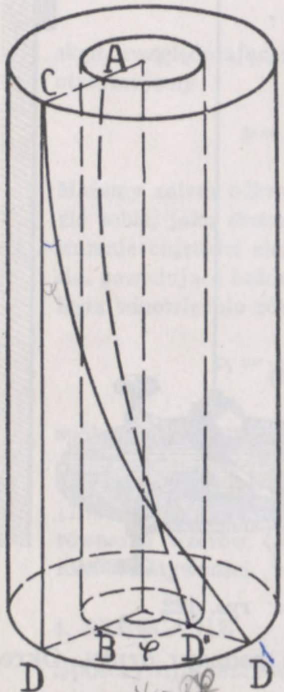
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{B}{D}}.$$

Biorąc druty rozmaitej długości i grubości i mierząc okresy ich wahań Coulomb znalazł, że

$$D = C\frac{r^4}{l}, \tag{6}$$

gdzie r jest promieniem, l — długością drutu, C wielkością, zależną jedynie od materiału drutu i nazywaną czasami spół-

czynnikiem Coulomba. Badania późniejsze (Savart — 1829 r., Wertheim — 1857 r.), wykonywane w nieco odmienny sposób — Wertheim mierzył bezpośrednio parę sił, potrzebną do skręcenia drutu o dany kąt φ — nie tylko potwierdziły wzór (6) Coulomba, lecz wykazały, że stosuje się on również i do prętów o przekroju kołowym; jednocześnie jednak ustaliły granice, w których wzór ten można stosować. Okazało się, że dla pewnych metali granice te są bardzo ciasne; tak np. Warburg (1880 r.) znalazł, że w drucie miedzianym już przy skręceniu o 7° występuje wyraźnie zależność okresu wahań od kąta skręcenia. Podobnie więc, jak i przy wydłużaniu, i w tym przypadku proporcjonalność sił wewnętrznych do odkształcenia obowiązuje na ogół tylko dla odkształceń niewielkich.



rys. 123

Ograniczając się do rozpatrywania jedynie tego rodzaju odkształceń, możemy zużytkować wzór Coulomba do wyznaczenia spółczynnika sztywności. Załóżmy, że koniec AB cylindrycznego pręta został skręcony o kąt φ (rys. 123). Skręcenie to nie zmienia kształtu przekrojów kołowych pręta, obraca jedynie każdy z nich w jego własnej płaszczyźnie o pewien kąt dookoła osi walca. Tworząca walca CD lub jakakolwiek do niej równoległa staje się linią śrubową. Wyobraźmy sobie, żeśmy podzielili pręt na walce spółśrodkowe o nieograniczenie mało różniących się promieniach i niech walec o tworzącej AB będzie jednym z tych walców. Przy skręcaniu swobodnego końca drutu o kąt φ pierścień, zawarty między podstawą tego walca i podstawą walca następnego (na rysunku jest tylko jeden walec), przesunie się względem warstwy górnej o kąt

$$\psi = \frac{BD''}{l} = \frac{r\varphi}{l}$$

gdzie ϱ — promień danego walca, $l = AB = CD$. Takie przesunięcie możliwe jest tylko wtedy, gdy na przesuwaną warstwę działa napięcie styczne do jej powierzchni i równe (4)

$$p_s = \mu\psi = \mu\varrho\frac{\varphi}{l}.$$

Siła więc, działająca na dany pierścień o polu $2\pi\varrho.\Delta\varrho$, gdzie $\Delta\varrho$ jest grubością pierścienia, musi być równa

$$\Delta f = p_s . 2\pi\varrho.\Delta\varrho = \mu\frac{\varphi}{l}\varrho.2\pi\varrho.\Delta\varrho,$$

moment zaś jej względem osi obrotu, którą jest w tym przypadku oś walca

$$\Delta M = \Delta f.\varrho = \mu\frac{\varphi}{l}.\varrho^2.2\pi\varrho.\Delta\varrho.$$

Suma tych momentów równa jest momentowi zewnętrznej pary sił, powodującej dane skręcenie. Mamy zatem

$$M = \Sigma\Delta M = \mu.\frac{\varphi}{l}\Sigma\varrho^2.2\pi\varrho.\Delta\varrho,$$

gdzie sumowanie obejmuje pola wszystkich elementarnych pierścieni, na jakie podzieliliśmy pole skręcanego końca pręta. Ostatecznie otrzymujemy

$$M = \frac{\pi}{2}\mu.\frac{r^4}{l}\varphi. \tag{7}$$

Oznaczając grubość warstwy przez $d\varrho$, mamy na pole elementarne $2\pi\varrho d\varrho$ i stąd

$$M = \mu\frac{\varphi}{l}2\pi\int_0^r \varrho^3 d\varrho = \frac{\pi}{2}.\mu.\frac{\varphi}{l}r^4, \tag{7 a}$$

gdzie granicami całkowania są $\varrho = 0$ i $\varrho = r$.

Z porównania wzoru (6) ze wzorem (7) wynika, że

$$C = \mu.\frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Spółczynnik sztywności możemy zatem wyznaczyć albo mierząc okres wahań, zachodzących pod działaniem sił sprężystych, wzbudzonych przez skręcanie pręta (sposób dynamiczny) albo, mierząc kąt φ, o jaki skręci dany pręt znany nam moment zewnętrznej pary sił (sposób statyczny).

Ze spółczynnikiem sztywności spotykamy się również i wtedy, gdy obciążamy drut, nawinięty na walec i stanowiacy sprężynę. Obcią-

żenie takiego drutu powoduje zwiększenie odstępu między poszczególnymi zwojami i skręcenie drutu. Zakładając, że zwoje są płaskie i że leżą bardzo blisko jeden drugiego, otrzymujemy na wydłużenie h niewielkie w porównaniu z długością l drutu — wzór, który podajemy bez wyprowadzenia

$$h = f \cdot \frac{2 l R^2}{\pi \mu r^4}, \tag{7 b}$$

gdzie f — siła wydłużająca sprężynę, r — promień drutu, R-r — promień walca, na który drut jest nawinięty. Stąd wynika, że chcąc, aby dana siła spowodowała możliwie wielkie wydłużenie, należy użyć drutu cienkiego i nawinąć go na walec o dużym promieniu; gdy zaś chodzi o sprężyny, stawiające znaczny opór odkształceniu, należy brać druty grube i nawijać je na walec o promieniu niewielkim.

Z metali największy spółczynnik sztywności ma stal i nikiel: około 8000.10^8 dyn/cm^2 (te dwa metale mają również zbliżone wartości modułu Younga i spółczynnika Poissona); z ciał niemetalicznych wyróżnia się kwarc ciągniony o $\mu = 3000.10^8$ dyn/cm^2, o którego zastosowaniu w wadze skręceń była mowa w rozdziale poprzednim (ust. 5).

W przypadku, gdy przekrój pręta nie jest kołowy, wzór (7) należy zastąpić innym. Stosując rozumowanie analogiczne do użytego wyżej, otrzymujemy

$$M = \frac{\mu \varphi}{l} \int \varrho^2 \, dS, \tag{7 c}$$

gdzie dS oznacza pole elementu, odległego o ϱ od osi obrotu. Podobnie jak wzór (7), i ten wzór stosuje się tylko o tyle, o ile możemy założyć, że podczas skręcania kształt przekrojów prostopadłych do osi pozostał niezmieniony. Ten warunek spełnia się na ogół jedynie przy niewielkich kątach skręceń.

Dla prętów o przekroju prostokątnym mamy w przybliżeniu

$$M = k' \frac{\mu}{l} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \varphi,$$

gdzie k' jest mniej więcej równe 0,3, a i b oznaczają grubość i szerokość pręta. Gdy a i b są małe, przy czym jednak a jest znacznie większe niż b tak, że drut ma kształt wąskiej wstążki, stosunkowo znaczne skręcenie φ może być spowodowane przez o wiele mniejszą parę sił, niż w przypadku drutu, którego przekrój o tej samej powierzchni (a więc i o tym samym ciężarze jednostki długości) byłby kwadratem. Istotnie, oznaczmy przez S powierzchnię przekroju i przypuśćmy, że w przypadku pierwszym $b = \frac{1}{10} \sqrt{S}$, $a = 10 \sqrt{S}$, w drugim zaś

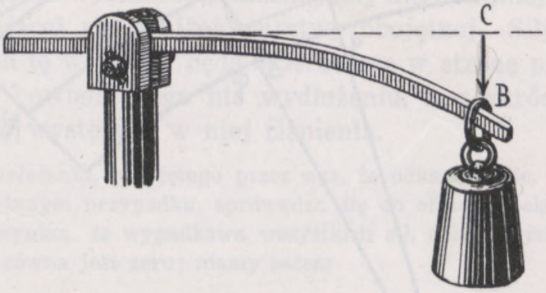
$a = b = \sqrt{S}$. Otrzymujemy wtedy dla tego samego kąta skręcenia $\varphi = 1$

$$M_1 = k' \frac{\mu}{l} \cdot \frac{100}{10001} S^2 \doteq 0{,}01 k' \frac{\mu}{l} S^2 \text{ i } M_2 = k' \frac{\mu}{l} \frac{S^2}{2} = 0{,}5 k' \frac{\mu}{l} S^2.$$

Ogólną teorię skręcania prętów o przekroju dowolnym opracował de Saint-Venant (1855 r.).

5. ZGIĘCIE

Przypuśćmy, że belkę poziomą, umocowaną w jednym końcu, której ciężaru nie uwzględniamy w rachunku, obciążamy na końcu swobodnym coraz to większymi ciężarami (rys. 124).

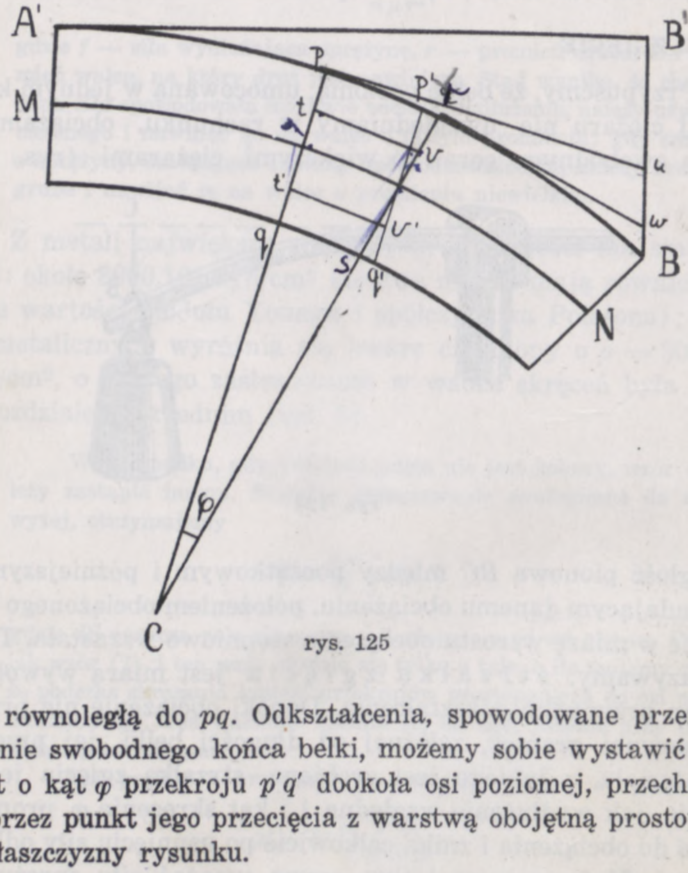


rys. 124

Odległość pionowa *BC* między początkowym i późniejszym, odpowiadającym danemu obciążeniu, położeniem obciążonego końca będzie w miarę wzrostu obciążenia stopniowo wzrastała. Ta, jak ją nazywamy, s t r z a ł k a z g i ę c i a jest miarą wywołanego w tym przypadku odkształcenia. Dopóki obciążenie nie przekroczy pewnej granicy, zależnej od długości belki, jej przekroju i materiału, z jakiego jest zrobiona, strzałka zgięcia jest podobnie, jak wydłużenie względne λ i kąt skręcenia φ, proporcjonalna do obciążenia i znika całkowicie po usunięciu siły odkształcającej. Możemy więc i tym razem uważać siły sprężystości, wywołane przez odkształcenie i równoważące siły zewnętrzne, za proporcjonalne do wielkości odkształcenia, same zaś, zachodzące w tych warunkach odkształcenia za całkowicie sprężyste.

Przy tego typu odkształceniach górna warstwa belki ulega wydłużeniu, dolna skróceniu; wewnątrz zatem belki musi znajdować się warstwa, której długość nie ulega żadnej zmianie. Niech tą w a r s t w ą o b o j ę t n ą (patrz. Wstęp, ust. 9) jest

warstwa MN (rys. 125). Rozpatrzmy dwa prostopadłe do długości belki przekroje pq i rs, odległe od miejsca zamocowania o x i $x + \Delta x$. Przed odkształceniem były one wzajemnie równoległe, po odkształceniu tworzą kąt φ. Przeprowadźmy przez punkt, w którym prosta rs przecina linię obojętną MN, prostą



rys. 125

$p'q'$, równoległą do pq. Odkształcenia, spowodowane przez obciążenie swobodnego końca belki, możemy sobie wystawić jako obrót o kąt φ przekroju $p'q'$ dookoła osi poziomej, przechodzącej przez punkt jego przecięcia z warstwą obojętną prostopadle do płaszczyzny rysunku.

To upraszczające założenie wtedy tylko, ściśle biorąc, nie pociąga za sobą znaczniejszych błędów w obliczeniu, gdy belka jest dostatecznie cienka, tzn. gdy grubość jej i szerokość są małe w porównaniu z długością.

Na skutek tego obrotu warstwa tv belki, zawarta między przekrojami pq i rs i znajdująca się w odległości y od warstwy obojętnej, uległa wydłużeniu, równemu $y\varphi$. Niech Δy będzie grubością warstwy, z — jej szerokością, mierzoną w kierunku

prostopadłym do płaszczyzny rysunku, powierzchnia zatem warstwy — $z\Delta y$. Siła, powodująca jej wydłużenie lub, co na jedno wychodzi, siły sprężystości, równoważące siłę zewnętrzną, są równe

$$E\Delta\lambda . \Delta S = E\frac{y\varphi}{\Delta x} z\Delta y,$$

gdzie Δx jest początkową długością warstwy. Stąd moment tych sił względem poziomej osi obrotu

$$\Delta M = E\frac{y^2\varphi}{\Delta x} z . \Delta y.$$

Analogiczne wyrażenie znaleźlibyśmy dla dowolnej warstwy $t'v'$, znajdującej się poniżej warstwy obojętnej. Siły jednak, działające na tę warstwę, będą skierowane w stronę przeciwną, warstwa ta bowiem ulega nie wydłużeniu, lecz skróceniu, zamiast napięć występują w niej ciśnienia.

Z założenia, przyjętego przez nas, że odkształcenie, zachodzące w rozważanym przypadku, sprowadza się do obrotu dookoła osi poziomej, wynika, że wypadkowa wszystkich sił, działających na przekrój rs, równa jest zeru; mamy zatem

$$E\frac{\varphi}{\Delta x}\Sigma yz\Delta y = 0$$

lub, używając znakowania rachunku nieskończonościowego,

$$E\frac{\varphi}{\Delta x}\int yz\,dy = 0, \text{ skąd } \int yz\,dy = 0. \tag{a}$$

Odległość pionowa środka masy przekroju rs od punktu przecięcia z warstwą obojętną, wziętego za początek układu spółrzędnych, wyraża się wzorem podanym w ust. 15, rozdz. II, który przepiszemy w postaci

$$y_0 = \int\frac{y\,dm}{m},$$

gdzie dm — masa elementu tego przekroju, równa $\varrho z dy$. Zakładając, że belka jest jednorodna, że więc masa jednostki przekroju ma wszędzie wartość stałą, znajdujemy, uwzględniając warunek (a)

$$y_0 = \frac{\varrho}{m}\int yz\,dy = 0.$$

Środek masy przekroju leży więc na warstwie obojętnej, dla której wszystkich punktów $y = 0$. Ponieważ tak jest dla każdego przekroju pionowego, możemy powiedzieć, że warstwa obojętna przechodzi przez środek masy belki.

Moment sił sprężystości, działających na wszystkie warstwy, zawarte między przekrojami pq i rs, otrzymamy, sumując

znalezione wyżej wartości momentów elementarnych. Będziemy mieli

$$M = E\frac{\varphi}{\Delta x}\Sigma y^2 z \Delta y.$$

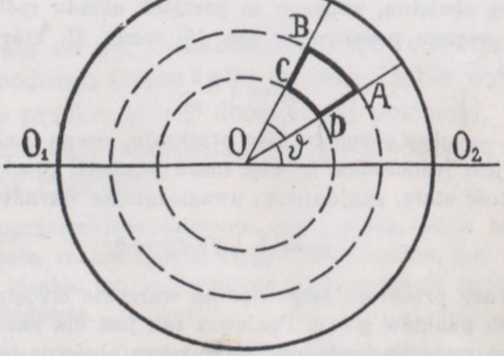
Nazwijmy $\Sigma y^2 z \Delta y$ momentem bezwładności B_p danego przekroju względem danej osi, prostopadłej do płaszczyzny rysunku, takie bowiem otrzymalibyśmy wyrażenie, obliczając tę wielkość dla nieograniczenie cienkiej płytki, mającej kształt rozpatrywanego przekroju, a której masa, przypadająca na jednostkę powierzchni, byłaby równa jedności. Możemy więc napisać

$$M = E\frac{\varphi}{\Delta x}B_p.$$

Dla belek o przekroju prostokątnym $B_p = \frac{ab^3}{12}$, gdzie bok a jest prostopadły, b — równoległy do ciężaru odkształcającego; dla belek o przekroju kołowym $\frac{\pi R^4}{4}$, gdzie R — promień belki.

Dla przekroju prostokątnego $z = a$, y zmienia swą wartość od $-\frac{b}{2}$ do $+\frac{b}{2}$ (w belce jednorodnej warstwa obojętna jest w tej samej odległości od górnej, co i od dolnej warstwy belki), mamy zatem

$$a\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 dy = \frac{ab^3}{12}.$$



rys. 126

Moment bezwładności przekroju kołowego względem osi, będącej jedną z jego średnic, możemy wyznaczyć w sposób następujący.

Opiszmy z punktu O dwa koła o promieniach ϱ i $\varrho + d\varrho$ i przeprowadźmy dwa promienie OA i OB, tworzące z osią $O_1 O_2$ kąty ϑ i $\vartheta + d\vartheta$. Pole $ABCD$, w ten sposób utworzone, równe jest $AB.AD = \varrho d\vartheta . d\varrho$, odległość zaś jego od osi $O_1 O_2$ równa jest $\varrho \sin \vartheta$ Moment bezwładności tego elementu wynosi przeto $\varrho^3 \sin^2 \vartheta d\vartheta d\varrho$, moment zaś całego koła, równy sumie momentów elementarnych

$$B_p = \int_0^R \varrho^3 \, d\varrho \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Moment sił sprężystości równoważony jest przez moment siły odkształcającej, równy $[l - (x + \Delta x)]f$ lub, po odrzuceniu bardzo małej długości Δx, $(l - x)f$, gdzie l — długość belki. Mamy zatem

$$M = E \cdot \frac{\varphi}{\Delta x} B_p = (l - x)f. \tag{b}$$

Przeprowadźmy w punktach p i r styczne do belki (rys. 125); styczne te wytną ze strzałki zgięcia $s = B'B$ odcinek $uw = \Delta s$. Ponieważ kąt, który one tworzą, równy jest kątowi φ, jaki tworzą promienie Cp i Cr, do nich prostopadłe

$$\Delta s = (l - x)\varphi, \quad \text{skąd } \varphi = \frac{\Delta s}{l - x}.$$

Po podstawieniu do wzoru (b) otrzymujemy

$$E \frac{\Delta s}{\Delta x (l - x)} B_p = (l - x) f$$

$$\Delta s = \frac{1}{E . B_p} (l - x)^2 \Delta x . f. \tag{c}$$

Całą strzałkę zgięcia otrzymamy, wykonywając analogiczne obliczenia dla wszystkich przekrojów belki i sumując otrzymane wyrażenia. Będziemy mieli

$$s = \Sigma \Delta s = \frac{1}{E . B_p} f \Sigma (l - x)^2 \Delta x = \frac{1}{3} \frac{l^3}{E . B_p} \cdot f. \tag{9}$$

Niech dx jest odległością rozpatrywanych przekrojów

$$s = \frac{1}{E . B_p} f \int_0^l (l - x)^2 dx = \frac{1}{3} \frac{l^3}{E B_p} \cdot f.$$

W przypadku zatem sztaby o przekroju kołowym

$$s = \frac{4}{3\pi R^4} \cdot \frac{l^3}{E} \cdot f \tag{9 a}$$

o przekroju zaś prostokątnym

$$s = \frac{4}{ab^3} \frac{l^3}{E} \cdot f. \qquad (9\,b)$$

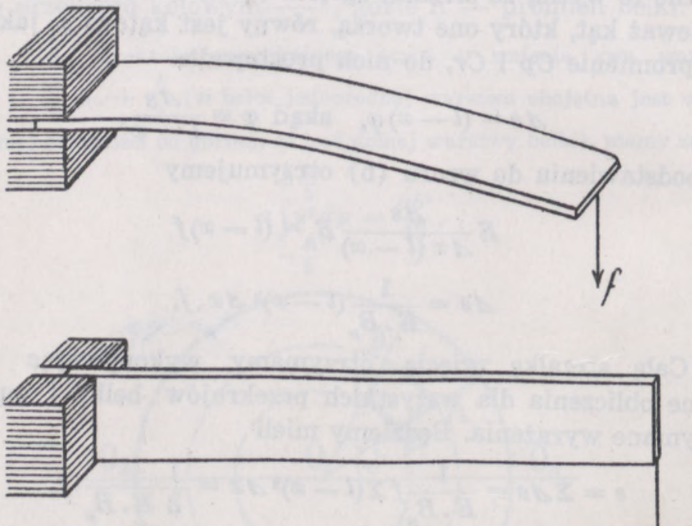
Z tego ostatniego wzoru wynika, że ta sama belka, obciążona tym samym ciężarem, będzie miała przy umocowaniu jej „na płask" znacznie większą strzałkę zgięcia, niż gdy umocowana jest „na kant".

Niech boki przekroju prostokątnego belki drewnianej o długości 1 m, obciążonej ciężarem 1 kgc, będą odpowiednio równe 1 cm i 10 cm. Gdy $a = 10$, $b = 1$ (rys. 127), otrzymamy, kładąc $E = 500.10^8$ dyn/cm² $\doteq$ 500 kgc/mm²,

$$s_1 = \frac{4}{100 \,.\, 1000} \cdot \frac{(1000)^3 \,.\, 1}{500} = 80 \text{ mm} = 8 \text{ cm}.$$

Gdy $a = 1$ cm; $b = 10$ cm

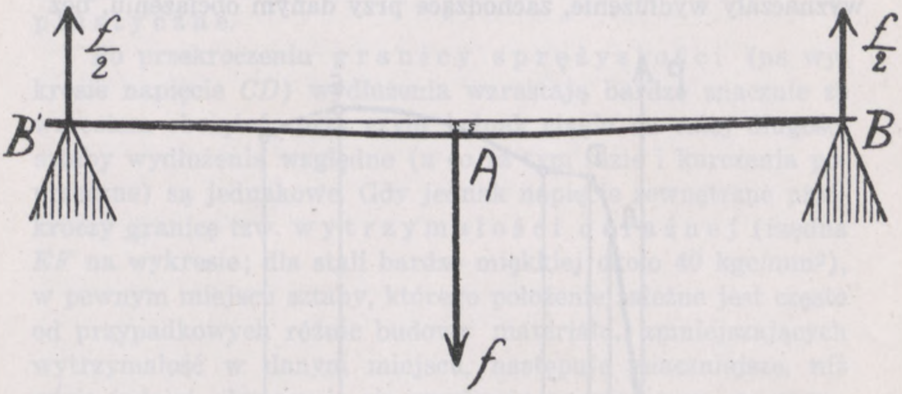
$$s_2 = \frac{4}{10 \,.\, (100)^3} \cdot \frac{(1000)^3 \,.\, 1}{500} = 0{,}8 \text{ mm} = 0{,}08 \text{ cm}.$$



rys. 127

Wzór (9) możemy bez trudu uogólnić na przypadek, gdy zginana belka, obciążona w połowie swej długości, jest podparta na obydwu końcach. Załóżmy podobnie, jak poprzednio, że belka przed odkształceniem jest pozioma i że wielkość odkształcającego ciężaru wynosi f. Wtedy na każdą z podpór działa siła $\frac{f}{2}$.

Z taką samą siłą działa każda z podpór na belkę, zjawisko zatem zachodzi w ten sposób, jak gdyby środek belki był umocowany, na każdy zaś jej koniec działała siła $\frac{f}{2}$, skierowana pionowo do



rys. 128

góry. Strzałkę zgięcia, równą różnicy wysokości środkowego i podpartych punktów sztaby, otrzymujemy ze wzoru (9), kładac w nim $\frac{f}{2}$ zamiast f i $\frac{l}{2}$ zamiast l. Otrzymamy zatem

$$s = \frac{1}{48B_p} \cdot \frac{l^3}{E} \cdot f. \tag{9 c}$$

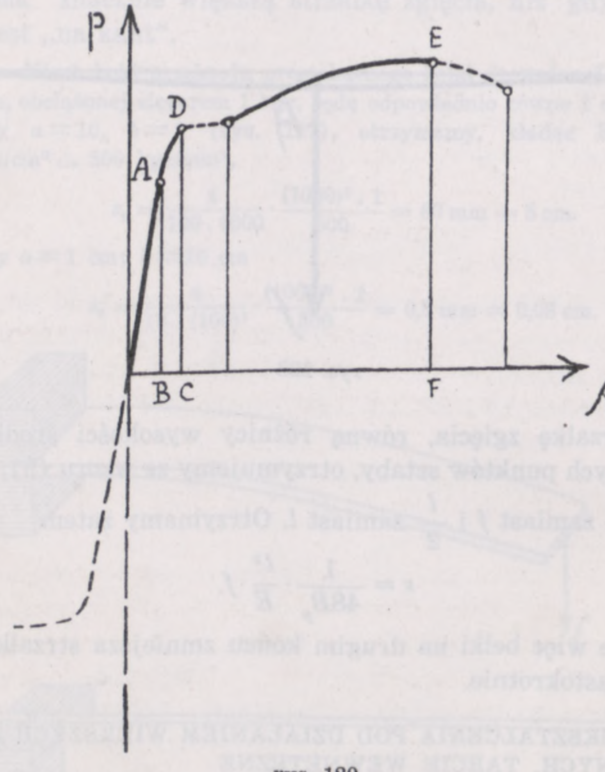
Podparcie więc belki na drugim końcu zmniejsza strzałkę zgięcia szesnastokrotnie.

6. ODKSZTAŁCENIA POD DZIAŁANIEM WIĘKSZYCH SIŁ ZEWNĘTRZNYCH. TARCIE WEWNĘTRZNE

Wyprowadzone w ustępach poprzednich stosunkowo proste związki między siłami zewnętrznymi i wywołanymi przez nie odkształceniami sprawdzają się jedynie w bardzo ciasnych granicach. Już w przypadku najprostszego odkształcenia, jakim jest wydłużanie się pręta lub sztaby, zwiększenie obciążenia powoduje zmiany długości, nie czyniące zadość równaniu (2).

Przypuśćmy, że badaną sztabą jest sztaba stalowa; wtedy zjawisko wydłużania będzie miało przebieg następujący. Przy niewielkich obciążeniach, nie przekraczających 20 kgc na mm² przekroju poprzecznego sztaby, wydłużenia, zgodnie z tym, cośmy

mówili w ust. 2, będą do obciążeń proporcjonalne. Zależność między obciążeniem i wydłużeniem wyrażać będzie na wykresie prosta OA (rys. 129), tym bardziej stroma, im większy jest moduł Younga badanego ciała. Punkty tej prostej będą jednoznacznie wyznaczały wydłużenie, zachodzące przy danym obciążeniu, bez



rys. 129

względu na to, czy zaszło ono przy zwiększaniu obciążeń od 0 do danej wartości czy też odwrotnie — przy zmniejszaniu od większego obciążenia do zera. Po przekroczeniu jednak pewnego napięcia, które nazywamy g r a n i c ą p r o p o r c j o n a l n o ś c i (na rysunku — AB), wydłużenie przestaje być proporcjonalne do siły odkształcającej; linia, wyrażająca związek między p i λ, staje się linią krzywą, mniej stromo wznoszącą się do góry, niż prosta OA: te same przyrosty obciążeń powodują większe, niż poprzednio, wydłużenia. Odkształcenia mogą mimo to (jak

np. w rozpatrywanym przez nas przypadku) pozostać sprężystymi. Dopiero przy większych obciążeniach (dla sztaby z tzw. stali bardzo miękkiej około 24 kgc/mm²) odkształcenia nie znikają całkowicie po usunięciu sił odkształcających; w sztabie nieobciążonej pozostają tzw. odkształcenia trwałe lub plastyczne.

Po przekroczeniu granicy sprężystości (na wykresie napięcie *CD*) wydłużenia wzrastają bardzo znacznie ze wzrostem obciążeń, przy czym jednak ciągle na całej długości sztaby wydłużenia względne (a co za tym idzie i kurczenia poprzeczne) są jednakowe. Gdy jednak napięcie zewnętrzne przekroczy granicę tzw. wytrzymałości doraźnej (rzędna *EF* na wykresie; dla stali bardzo miękkiej około 40 kgc/mm²), w pewnym miejscu sztaby, którego położenie zależne jest często od przypadkowych różnic budowy materiału, zmniejszających wytrzymałość w danym miejscu, następuje znaczniejsze, niż gdzie indziej, skurczenie się przekroju poprzecznego, co powoduje przy dalszym wzroście obciążenia rozerwanie sztaby w tym zwężonym miejscu (tzw. szyjce). Wydłużenie względne sztaby bezpośrednio przed rozerwaniem może być dość znaczne, np. dla stali miękkiej wynosi około 0,3; sztaba długości 1 m wydłuży się zatem o 30 cm.

Przy zgniataniu sztaby otrzymujemy na ogół wykres analogiczny; jedyną różnicę stanowią obszerniejsze zazwyczaj granice plastyczności. Plastyczność, zarówno przy rozciąganiu, jak i zgniataniu, występuje jednak nie we wszystkich ciałach stałych, a nawet nie we wszystkich metalach. Tak np. sztaba z żelaza lanego rozrywa się przy stosunkowo niewielkim wydłużeniu (mniej więcej o 0,01 początkowej długości, sztaba zatem o długości 1 m ma w chwili rozerwania długość 101 cm), przy czym rozerwania nie poprzedza powstanie szyjki. Podobnie zachowuje się stal krzemowa (0,005 *C*, 0,015 *Si*), używana na sprężyny; granica sprężystości jest dla niej prawie równa granicy wytrzymałości; wydłużenie względne przy rozerwaniu wynosi 0,02. Z tego powodu rozróżnia się często ciała stałe lepkie i ciała stałe kruche. Do pierwszej grupy należą metale takie, jak stal, miedź, nikiel, do drugiej szkło, stal krzemowa, żelazo lane, różne rodzaje skał itd. Różnica między ciałami lepkimi i kruchymi zmniejsza się na ogół ze wzrostem temperatury, plastycz-

ność bowiem wszystkich ciał jednorodnych wzrasta przy ich nagrzewaniu, zmniejsza się bowiem wtedy zarówno spółczynnik sztywności, jak i moduł Younga.

To zmniejszanie się nie jest jednak dla obydwu spółczynników jednakowe. Według Kowalskiego dla szkła, w którym zależność od temperatury jest o wiele wyraźniejsza, niż w metalach, μ zmniejsza się szybciej, niż *E*. Dla kwarcu topionego Lees, Andrews i Shave znaleźli (1924 r.), że w granicach od 0°—800° moduł Younga zachowuje wartość stałą.

Za oddzielną grupę można uważać ciała, które już w temperaturze normalnej wykazują pod działaniem niewielkich ciśnień znaczną plastyczność, jak np. glina. Ciała takie nazywamy p l a s t y c z n y m i.

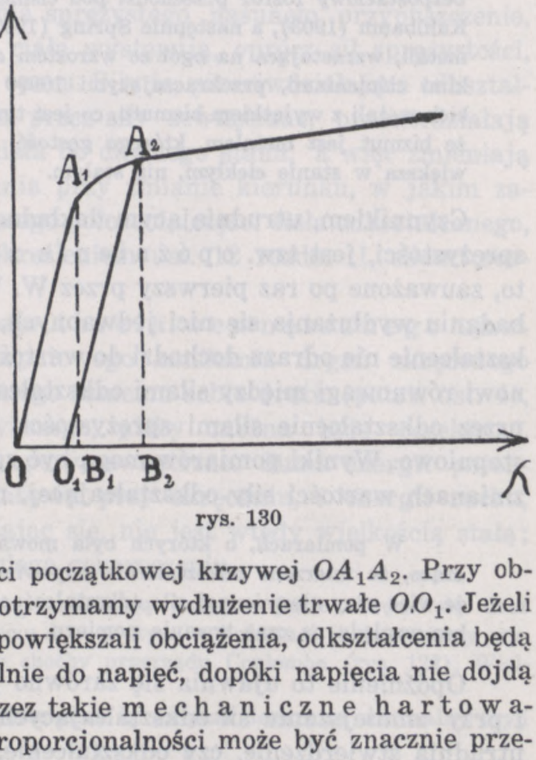
I tego podziału nie można uważać za dostatecznie ścisły. Niejedno bowiem z ciał, mających pod wielkim i krótkotrwałym ciśnieniem cechy ciała kruchego, wykazuje pod ciśnieniem mniejszym, lecz działającym przez czas dłuższy, znaczną plastyczność (np. szkło). Jedynym racjonalnym podziałem jest, jak się zdaje, podział ciał stałych na postaciowe (krystaliczne) i bezpostaciowe (amorfne); ciała, należące do drugiej grupy, ze wzrostem temperatury zmieniają stopniowo swe własności sprężyste, przechodząc w sposób ciągły w stan ciekły (por. ust. 1, rozdz. XI). Metale jedynie pozornie, jak o tym była wyżej mowa, wykazują w temperaturach normalnych cechy podobne do cech ciał bezpostaciowych. Badanie ich własności jest utrudniane przez to, że kryształy ich są bardzo małe. Dopiero ostatnio Czochralskiemu (1918 r.), Bridgmanowi (1925 r.) i innym udało się otrzymać kryształy większe, umożliwiające bezpośrednie badanie ich własności sprężystych. Na tej drodze uda się, być może, wyjaśnić związek między własnościami sprężystymi ciał i ich budową wewnętrzną (por. niżej).

Pod wielkim ciśnieniem metale mogą stać się niezwykle plastycznymi, jak tego dowodzą doświadczenia, które wykonał Tresca (1864 r.). Metal, umieszczony w naczyniu, zaopatrzonym na dnie w niewielki otwór, poddany ciśnieniu pary tysięcy atmosfer, wypływa przez otwór, zachowując się tak, jak lepka ciecz, poddana ciśnieniu niewielkiemu. Metal, w ten sposób odkształcony, posiada zgoła inne własności, niż przed odkształceniem, tak np. otrzymane tą drogą pałeczki bizmutu są tak giętkie, że można skręcać je w węzeł, nie obawiając się ich przełamania.

Spring (1878 r.) stwierdził, że wosk pod ciśnieniem 700 Atm i parafina pod ciśnieniem 2000 Atm stają się tak ciekłe, jak woda.

W ciałach kruchych i plastycznych pojęcia takie, jak granica proporcjonalności lub sprężystości, tracą prawie całkowicie swoje znaczenie. Z wyjątkiem kruchych metali i szkła inne ciała, należące do tej grupy, jak marmur, beton, albo wcale nie podlegają prawu proporcjonalności, albo co najwyżej podlegają mu w bardzo ciasnych granicach i tylko dla odkształceń jednego znaku. Ale nawet w przypadku ciał lepkich wyznaczenie ciśnień lub napięć granicznych przedstawia duże trudności, wyniki bowiem pomiarów są w bardzo znacznym stopniu zależne od odkształceń, jakim poprzednio podlegało badane ciało.

Załóżmy, że po przekroczeniu w punkcie A_1 granicy sprężystości sztaby stalowej i dojściu do punktu A_2 wykresu (rys. 130) zmniejszamy stopniowo obciążenie. Linią, odtwarzającą wtedy przebieg zjawiska, jest linia prosta O_1A_2, mniej więcej równoległa do prostoliniowej części początkowej krzywej OA_1A_2. Przy obciążeniu równym zeru otrzymamy wydłużenie trwałe OO_1. Jeżeli teraz będziemy znowu powiększali obciążenia, odkształcenia będą wzrastały proporcjonalnie do napięć, dopóki napięcia nie dojdą do wartości A_2B_2. Przez takie m e c h a n i c z n e h a r t o w a n i e metalu granica proporcjonalności może być znacznie przesunięta.



rys. 130

Ogrzewając do wysokiej temperatury i następnie powolnie ochładzając, możemy ciału przywrócić jego początkowe własności.

Temu hartowaniu towarzyszą niewątpliwie zmiany wewnętrznej budowy ciała, jak na to wskazują badania mikroskopowe przekrojów sztab hartowanych, stwierdzające wydłużenie

kryształków metali w kierunku działania siły odkształcającej, i jak to wynika z faktu, potwierdzonego ostatnio przez Williamsona (1922 r.), że wszystkie prawie własności fizyczne metali (np. przewodnictwo elektryczne) ulegają zmianie na skutek hartowania.

Na zmiany w budowie ciała pod działaniem wielkich ciśnień wskazują również doświadczenia Springa. Spring stwierdził (1878 r.), że opiłki cynkowe przekształcają się w jednorodne ciało pod ciśnieniem 5000 Atm, opiłki ołowiu pod ciśnieniem 2000 Atm. Czerwony bezpostaciowy fosfor przechodzi pod ciśnieniem w fosfor metaliczny. Kahlbaum (1903), a następnie Spring (1907 r.) stwierdzili, że gęstość metali, wzrastająca na ogół ze wzrostem ciśnienia, pod bardzo wielkimi ciśnieniami, przekraczającymi 10000 Atm, maleje dla wszystkich metali z wyjątkiem bizmutu, co jest tym bardziej zastanawiające, że bizmut jest metalem, którego gęstość, podobnie jak wody, jest większa w stanie ciekłym, niż stałym.

Czynnikiem, utrudniającym dokładne wyznaczenie granicy sprężystości, jest tzw. opóźnienie sprężyste. Zjawisko to, zauważone po raz pierwszy przez W. Webera (1835 r.) przy badaniu wydłużania się nici jedwabnych, polega na tym, że odkształcenie nie odrazu dochodzi do wartości, odpowiadającej stanowi równowagi między siłami odkształcającymi i wzbudzanymi przez odkształcenie siłami sprężystości, lecz zbliża się do niej stopniowo. Wyniki pomiarów mogą być zgoła inne przy szybkich zmianach wartości siły odkształcającej, niż przy powolnych.

W pomiarach, o których była mowa wyżej, zakładaliśmy milcząco, że mierzone odkształcenie odpowiada warunkowi równowagi, że więc przy niezmiennej sile odkształcającej zachowuje wartość stałą bez względu na czas trwania pomiaru.

Opóźnienie to ujawnia się zarówno przy zwiększaniu, jak i przy zmniejszaniu sił odkształcających i w wysokim stopniu utrudnia stwierdzenie, czy odkształcenie, wywołane przez dane ciśnienie lub napięcie, znika po usunięciu sił odkształcających, czy więc jest odkształceniem sprężystym. Czas dojścia do stanu równowagi jest na ogół zależny od czasu, w ciągu którego ciało było odkształcane. W doświadczeniach Kohlrauscha (1863 r.) drut srebrny, skręcany przez 2 min. o 180°, wykazywał, w 10 min. po usunięciu sił odkształcających, skręcenie o 27′, po 20 minutach — o 5′; gdy skręcanie trwało 10 min., kąt skręcenia

zmniejszył się po 10 sek od chwili usunięcia sił zewnętrznych do 52′, po 5 min. — do 27′ i po 80 min. — do 8′.

Wpływ czasu, w ciągu którego działają siły odkształcające, ujawnia się również i w odkształceniach ciał, które pod krótkotrwałym działaniem sił znaczniejszych zachowują się jak ciała kruche. Tak np. cienka laska laku, podparta na dwu końcach, wygina się z biegiem czasu pod działaniem własnego ciężaru, doznając odksztaceń, które na próżno usiłowalibyśmy wywołać działaniem większej siły, działającej przez czas krótki.

Zjawisko opóźnienia sprężystego nasunęło przypuszczenie, że przy odkształcaniu ciała występują, oprócz sił sprężystości, jeszcze dodatkowe siły oporu. Siły te, przeciwdziałające odkształceniom, spowodowanym przez siły zewnętrzne, przeciwdziałają również i powrotowi ciała do dawnego stanu, a więc zmieniają kierunek swego działania przy zmianie kierunku, w jakim zachodzą zmiany wzajemnego położenia części ciała odkształcanego, są zatem, zgodnie z określeniem ust. 12 rozdz. II, siłami rozpraszającymi.

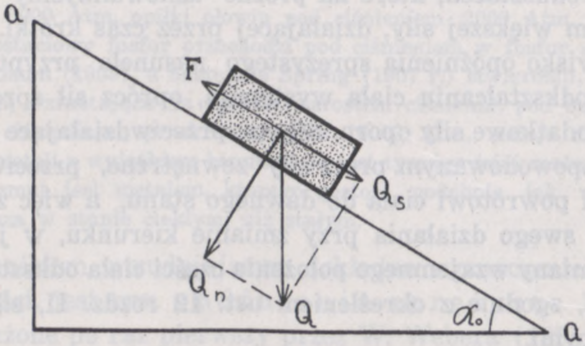
Wyraźny wpływ tego tarcia wewnętrznego ujawnia się w zjawisku stopniowego zanikania drgań skręconego i następnie pozostawionego samemu sobie drutu (patrz. ust. 4), zanikania o wiele szybszego, niżby można było oczekiwać, uwzględniając jedynie opory zewnętrzne. Suma energii potencjalnej, jakiej drut nabywa przy skręcaniu, i energii ruchu, którą posiada, rozkręcając się, nie jest wtedy wielkością stałą; energia mechaniczna ulega rozproszeniu.

Niech φ_{n-1} i φ_n oznaczają kąty, o jakie skręca się drut w (n—1)-ym wahnięciu i w n—tym wahnięciu i jakie możemy wyznaczyć przy pomocy choćby przyrządu Coulomba (rys. 122). Wielkość $\lambda = lg\,\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n}$, (gdzie znak lg oznacza logarytm naturalny czyli przy zasadzie $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = 2{,}718....$), nazywana logarytmicznym dekrementem (łac. decrementum — ubywanie), jest najczęściej używaną miarą tarcia wewnętrznego. Otrzymane bezpośrednio z pomiarów wartości λ wyrażają jednak łączne działanie wszystkich oporów rozpraszających, a więc i otaczającego powietrza i tarcia w punkcie zamocowania. Obliczyć i wyrugować wpływ tych oporów jest rzeczą niezmiernie trudną, to też pomiary sprowadzają się raczej do wyznaczenia zmian, jakim ulega λ przy zmianie wielkości odkształceń ciała.

7. TARCIE CIAŁ STAŁYCH

Podobne siły rozpraszające, przeciwstawiające się ruchowi bez względu na jego kierunek, ujawniają się również wtedy, gdy dwa różne, stykające się ze sobą ciała stałe poruszają się względem siebie.

Niech *aa* będzie równią pochyłą, której kąt α nachylenia do poziomu można dowolnie zmieniać i na której leży ciało



rys. 131

o ciężarze Q. Jak wiemy z codziennego doświadczenia, przy niewielkich wartościach α ciało nie będzie się zsuwało z równi pod działaniem swego ciężaru. Ruch rozpocznie się dopiero wtedy, gdy kąt ten osiągnie pewną wartość α_0; wtedy składowa styczna ciężaru stanie się równa $Q \sin \alpha_0$. Zjawisko zatem zachodzi tak, jak gdyby spadaniu ciała przeciwdziałała siła, skierowana przeciwnie do Q_s i posiadająca w chwili rozpoczęcia ruchu tę samą, co Q_s, wartość. Siłę tę F_0 nazwiemy siłą t a r c i a z e w n ę t r z n e g o lub prościej s i ł ą t a r c i a.

Doświadczenia, wykonane przez Coulomba (1781 r.) i następnie przez Morin'a (1833 r.) udowodniły, że siła ta jest proporcjonalna do składowej normalnej N siły poruszającej, w danym więc przypadku do Q_n. Możemy zatem napisać

$$F_0 = K_0 Q_n = K_0 N, \tag{10}$$

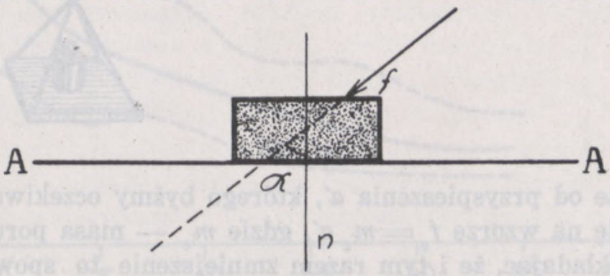
gdzie K_0 spółczynnik, zależny jedynie od rodzaju trących się powierzchni, jest s p ó ł c z y n n i k i e m t a r c i a w s p o c z y n k u lub t a r c i a s t a t y c z n e g o; wymiar jego równy jest jedności. Wielkość K_0 możemy wyrazić nieco inaczej.

W chwili rozpoczynania ruchu $F_0 = Q \sin \alpha_0$; $Q_n = Q \cos \alpha_0$, stąd

$$K_0 = \frac{F_0}{Q_n} = tg\, \alpha_0,$$

gdzie α_0 jest tzw. k ą t e m s p o c z y n k u.

Znaczenie tej wielkości wyjaśni nam następujący przykład. Przypuśćmy, że na poziomej powierzchni AA spoczywa ciało tak lekkie, iż ciężar jego możemy pominąć, i że ciało to chcemy wprawić w ruch, działając na nie dowolnie przyłożoną siłą $\vec{f}$ (rys. 132). Dopóki siła f będzie tworzyła z normalną n do powierzchni kąt $\alpha < \alpha_0$, dopóty ciało się nie poruszy, tak, że zwiększając wartość siły, możemy, co najwyżej, odkształcić ciało



rys. 132

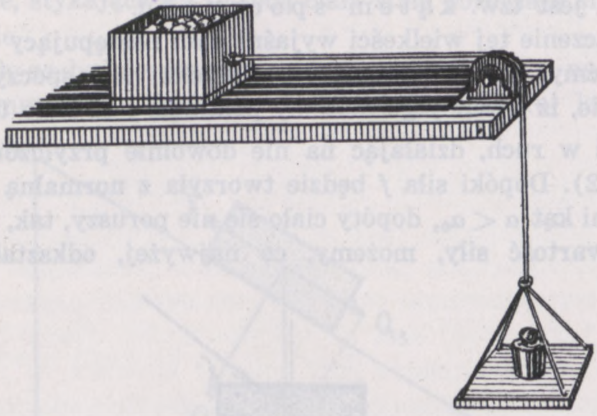
lub podstawę, na której spoczywa, składowa bowiem styczna f_s będzie stale mniejsza od siły tarcia, występującej w chwili rozpoczynania ruchu

$$F_0 = K_0 f_n = tg\, \alpha_0 . f \cos \alpha . > f \sin \alpha_0 > f \sin \alpha = f_s$$

(gdy $\alpha < \alpha_0$, $\cos \alpha > \cos \alpha_0$).

Ruch ciała, który się rozpocznie z chwilą, gdy f_s stanie się równa $K_0 f_n$, nie będzie ruchem jednostajnym, lecz ruchem, który w pewnych granicach prędkości jest jednostajnie przyspieszony. Wyznaczyć to przyspieszenie można, posługując się metodą, obmyśloną przez Coulomba. Na płytce (rys. 133) umieszczona jest skrzynka, którą możemy dowolnie obciążać, wkładając do niej ciężary. Skrzynka połączona jest przerzuconym przez blok sznurem z szalką, na którą kładziemy tyle odważników, aby ciężar ich był możliwie równy $F_0 = K_0 Q$, gdzie Q ciężar skrzynki, prostopadły do płytki. (Przypuszczamy, że spółczynnik K_0 — tarcia między skrzynką i płytką — został po-

przednio wyznaczony z pomiarów, wykonanych przy użyciu równi pochyłej). Mierząc drogę s i czas t, w ciągu którego została przebyta, obliczamy przyspieszenie a ruchu ciała. Jest ono



rys. 133

mniejsze od przyspieszenia a', którego byśmy oczekiwali, opierając się na wzorze $f_s = m_c a'$, gdzie m_c — masa poruszanych ciał. Zakładając, że i tym razem zmniejszenie to spowodowała siła tarcia, przeciwdziałająca ruchowi, obliczamy ją ze wzoru

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{f_s - F}{m_s + m_0} = \frac{f_s - F}{m_c} \qquad \text{(a)}$$

gdzie m_s — masa skrzynki, m_0 — masa szalki i odważników. Zmieniając obciążenie skrzynki (a więc i siłę tarcia F_0 w chwili rozpoczynania ruchu), można stwierdzić, że siła F jest, podobnie, jak i F_0, proporcjonalna do siły, z jaką cisną na siebie trące się powierzchnie, że zatem możemy, analogicznie do wzoru (10), napisać

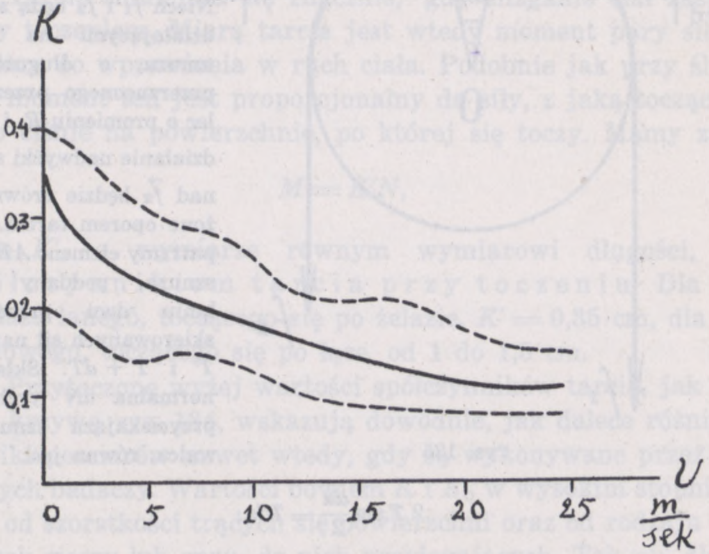
$$F = KN \qquad (11)$$

Uwzględniając, że $f_s = F_0 = K_0 N$, otrzymujemy

$$a = \frac{(K_0 - K)N}{m_c},$$

skąd wynika, że K — spółczynnik tarcia w ruchu lub tarcia kinetycznego, jest mniejszy od K_0. Wartość jego zależy nie tylko od rodzaju trących się powierzchni, lecz również i od prędkości, z jaką względem siebie się poruszają W przypadku tarcia żelaza o stal zależność K od prędkości wyra-

żają według Sommerfelda i Kleina (1903 r.), — którzy opierali się na pomiarach inżynierów, pracujących w firmie Westinghouse Compagnie, — krzywe, przedstawione na rys. 134. Krzywe kropkowane odpowiadają największym i najmniejszym warto-



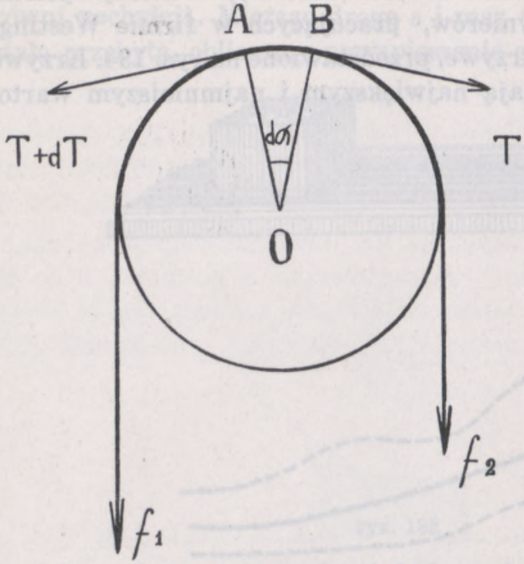
rys. 134

ściom, otrzymanym z pomiarów, krzywa ciągła — wartościom przeciętnym. Spółczynnik tarcia w spoczynku K_0 ($v = 0$) równy jest, według tych danych, 0,33; przy prędkości około 17 m/sek (61,2 km/godz.) tarcie spada do połowy: $K = 0{,}15$, przy prędkości 25 m/sek (90 km/godz.) do jednej trzeciej: $K = 0{,}11$.

Z tablicy, podanej przez Pöschla w „Lehrbuch der Physik" Müller—Pouilleta, przytaczamy parę liczb, mogących dać pewne pojęcie o wielkości sił tarcia, z jakimi częściej się spotykamy.

	K_0	K
stal o stal	0,15	0,09—0,03
metal o drzewo	0,6—0,5	0,5—0,2
drzewo o drzewo	0,65	0,4—0,2
drzewo o kamień	do 0,7	0,3
stal o lód	0,027	0,014

Obliczmy tarcie między dowolną powierzchnią cylindryczną i nawiniętym na nią sznurkiem lub rzemieniem (rys. 135). Niech $\vec{f_1}$ i $\vec{f_2}$ będą siłami, działającymi na końce sznura, o długości l_1, przerzuconego przez walec o promieniu R, i niech działanie nadwyżki siły $\vec{f_1}$ nad $\vec{f_2}$ będzie zrównoważone oporem tarcia. Rozpatrzmy element $AB = dl$ sznura, poddany działaniu dwu przeciwnie skierowanych sił napięcia T i $T + dT$. Składowa normalna dN tych sił, przyciskająca sznur do walca, równa jest



rys. 135

$$2\,T \sin\frac{d\alpha}{2} = T d\alpha; \qquad (12)$$

wypadkową składowych stycznych możemy przyjąć za równą dT.

Przesuwanie się sznura po walcu rozpocznie się dopiero wtedy, gdy

$$dT = K_0 T d\alpha$$

lub

$$\frac{dT}{T} = K_0 \,.\, d\alpha = K_0 \frac{dl}{R}$$

Całkując, otrzymamy

$$lg T = K_0 \alpha + \text{stała} = K_0 \frac{l}{R} + \text{stała}.$$

Uwzględniając, że dla $\alpha = 0$, $T = f_2$, dla $\alpha = \alpha_1$, $T = f_1$, mamy

$$lg f_1 - lg f_2 = K_0 \alpha_1 = K_0 \frac{l_1}{R}$$

i ostatecznie

$$f_1 = f_2 \,.\, e^{K_0 \alpha_1},$$

skąd siła f_2, potrzebna do zrównoważenia większej siły f_1

$$f_2 = f_1 e^{-K_0 \alpha_1}.$$

Jednokrotne więc nawinięcie ($\alpha_1 = 2\pi$) sznurka konopianego na drewnianym kołku ($K_0 = 0,5$) pozwoli siłę, działającą na jeden z jego końców, zrównoważyć siłą 23,1 razy mniejszą, dwukrotne — siłą 534 razy mniejszą.

Tarcie zmniejsza się znacznie, gdy ślizganie ciał zastępujemy toczeniem. Miarą tarcia jest wtedy moment pary sił, potrzebny do wprawienia w ruch ciała. Podobnie jak przy ślizganiu, moment ten jest proporcjonalny do siły, z jaką toczące się ciało ciśnie na powierzchnię, po której się toczy. Mamy zatem

$$M = K'N, \tag{12}$$

gdzie K', o wymiarze równym wymiarowi długości, jest s p ó ł c z y n n i k i e m t a r c i a p r z y t o c z e n i u. Dla koła z żelaza lanego, toczącego się po żelazie, $K' = 0,35$ cm, dla koła gumowego, toczącego się po łące, od 1 do 1,5 cm.

Przytoczone wyżej wartości spółczynników tarcia, jak również krzywa rys. 134, wskazują dowodnie, jak dalece różnią się wyniki pomiarów nawet wtedy, gdy są wykonywane przez tych samych badaczy. Wartości bowiem K i K_0 w wysokim stopniu zależą od szorstkości trących się powierzchni oraz od rodzaju warstewek cieczy lub gazu, do nich przylegających. Tak np. dla kół lokomotywy i dla szyn zazwyczaj używanych wartość K_0 wynosi: przy pogodzie bardzo suchej 0,2, przy silnym deszczu 0,14, podczas mgły 0,125. Na ogół warstwy cieczy, znajdujące się między trącymi się powierzchniami, zmniejszają ich tarcie. Ważną rolę odgrywają również i własności powierzchniowe ciał: Dow (1929 r.) stwierdził, że utlenienie powierzchni zwiększa tarcie. Niewątpliwie jednak znaczenie największe mają nierówności trących się powierzchni i zachodzące przy tym odkształcenia. W miarę coraz większego wygładzania ciał tarcie się zmniejsza, ale, jak to zdaje się wynikać z pomiarów Fichtera (1924 r.), tylko do pewnej granicy, powyżej której bardzo szybko wzrasta. Należy przypuszczać, że występują tu nowe siły, ujawniające się dopiero wtedy, gdy odległość między trącymi się powierzchniami spada do możliwie najniższej granicy. W dzisiejszym jednak stanie badań nic o nich powiedzieć nie możemy; o istocie bowiem tarcia ciał stałych, zjawiska tak popowszechnego i tak związanego z najzwyklejszymi naszymi

czynnościami, bez którego nie możemy sobie wyobrazić otaczającego nas świata, wiemy niewiele więcej od Coulomba. Fizyka jest więc, jak dotychczas, zmuszona do poprzestania w tej dziedzinie na gromadzeniu faktów doświadczalnych, które z biegiem czasu posłużą za podstawę do nieistniejącej jeszcze dzisiaj teorii tarcia.

ROZDZIAŁ VI

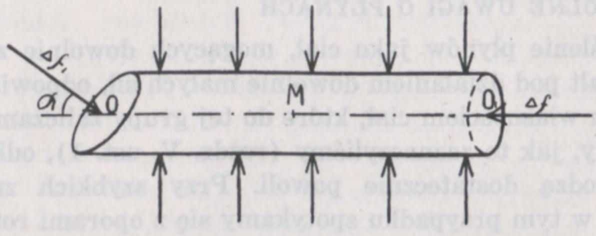
CIECZE I GAZY

1. OGÓLNE UWAGI O PŁYNACH

Określenie płynów jako ciał, mogących dowolnie zmieniać swój kształt pod działaniem dowolnie małych sił, odpowiada rzeczywistym własnościom ciał, które do tej grupy zaliczamy, tylko wtedy, gdy, jak to zaznaczyliśmy (rozdz. V, ust. 1), odkształcenia zachodzą dostatecznie powoli. Przy szybkich zmianach kształtu i w tym przypadku spotykamy się z oporami rozpraszającymi, przeciwdziałającymi zmianie wzajemnego położenia części danego ciała. Te siły tarcia wewnętrznego płynów lub ich lepkości, powodujące, podobnie jak to stwierdziliśmy w przypadku ciał stałych (rozdz. V, ust. 6), opóźnienie w dojściu do stanu równowagi, mogą zależnie od rodzaju płynu przybierać w tych samych warunkach znacznie różniące się wartości. Wystarczy porównać ciało takie, jak asfalt, na którego wypłynięcie z przewróconej beczki możemy czekać kilka dni, a nieraz kilka tygodni, z wodą, alkoholem lub rtęcią, natychmiast prawie przybierającymi kształt naczynia, do którego zostały przelane, i wreszcie z powietrzem, w którym tarcie wewnętrzne może być ujawnione dopiero przy użyciu czułej stosunkowo metody pomiarów. Mimo jednak tak olbrzymiej różnicy w oporze, stawianym zmianom kształtu, wszystkie te ciała musimy zgodnie z określeniem zaliczyć do tej samej kategorii płynów; łączy je bowiem wspólna cecha, że w stanie równowagi, jak również przy bardzo powolnych zmianach kształtu, opór ten staje się równy zeru tak, że wtedy znika różnica między płynami lepkimi, jak nazywamy płyny o dużym tarciu wewnętrznym, i płynami ruchliwymi o tarciu wewnętrznym małym. Wtedy zarówno

jedną, jak i drugą grupę płynów możemy uważać za **płyn doskonały**, o tarciu wewnętrznym równym zeru. Stąd wynika, że w stanie równowagi lub w stanie bardzo bliskim do stanu równowagi siła, działająca na dowolny element objętości płynu, jest zawsze prostopadła do powierzchni, na którą działa; istnienie bowiem składowej stycznej spowodowałoby przesunięcie się tego elementu względem innych elementów objętości płynu i tym samym zakłóciłoby równowagę.

Wyodrębnijmy koło dowolnie wybranego punktu M cylindryczny element Δv objętości płynu, o długości znacznej w porównaniu z jego przekrojem (rys. 136), i załóżmy, że na element



rys. 136

ten nie działają żadne siły zewnętrzne, proporcjonalne do masy, a więc tego rodzaju, co siły ciężkości. Z warunku równowagi wynika, że wypadkowa w kierunku osi walca musi być równa zeru. Temu warunkowi czynią zadość ciśnienia, działające na boczną ścianę walca, i w myśl założenia do niej prostopadłe, składowe ich bowiem w kierunku OO' są równe zeru. Pozostają zatem siły, działające na podstawę walca. Niech normalna do jednej z nich ΔS_1 tworzy z osią walca kąt α, druga zaś ΔS_2 niech będzie do osi prostopadła. Składowe w kierunku osi sił $\Delta f_1 = p_1 \Delta S_1$ i $\Delta f_2 = p_2 \Delta S_2$ muszą spełniać warunek

$$\Delta f_1 \cos\alpha = p_1 \Delta S_1 \cos\alpha = \Delta f_2 = p_2 \Delta S_2,$$

skąd, wobec równości $\Delta S_1 \cos\alpha = \Delta S_2$,

$$p_1 = p_2 \tag{1}$$

Równość ta obowiązuje bez względu na położenie w płynie elementu Δv, co do którego nie czyniliśmy żadnych szczególnych założeń, jak również na wartość kąta α, jaki tworzy normalna do podstawy z osią walca. W płynie zatem, nie poddanym działaniu

sił, proporcjonalnych do masy, ciśnienie ma we wszystkich punktach i we wszystkich kierunkach wartość tę samą.

Jest rzeczą oczywistą, że twierdzenie to dotyczy również ciśnienia, wywieranego przez płyn, znajdujący się w naczyniu, na te ściany naczynia, z którymi się styka, oraz równego mu ciśnienia, z jakim ściany naczynia działają na płyn. Jeżeli zatem w jakikolwiek sposób zwiększymy w jednym miejscu ciśnienie, wywierane na płyn (działając np. siłą zewnętrzną na ruchomą ścianę naczynia, stanowiącą wtedy tłok), o tę samą wartość wzrośnie zarówno ciśnienie w każdym punkcie wewnątrz płynu, jak i ciśnienie, wywierane przez płyn na ściany naczynia.

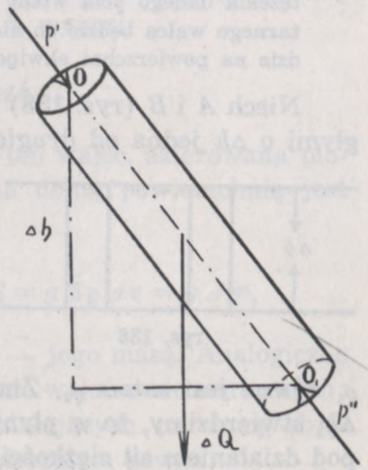
2. RÓWNOWAGA PŁYNU, PODDANEGO DZIAŁANIU SIŁY CIĘŻKOŚCI

Wnioski ustępu poprzedniego oparte były na założeniu, że płyn nie podlega działaniu siły ciężkości (ani innych sił analogicznych). W rzeczywistości jednak warunek ten nigdy nie jest spełniony. Czasami, co prawda, możemy pominąć w rozważaniach działanie ciężaru, gdy ciśnienie zewnętrzne, jakiemu płyn jest poddany, jest wielkie w porównaniu z ciśnieniem, spowodowanym przez ciężar płynu.

Taki przypadek zachodzi np. w prasie hydraulicznej, gdzie z uwagi na znaczne ciśnienie zewnętrzne i niewielką stosunkowo grubość warstwy płynu pomijamy zazwyczaj działanie siły ciężkości.

Na ogół jednak ustalone uprzednio warunki równowagi musimy uzupełnić przez uwzględnienie działania sił ciężkości.

Podobnie jak poprzednio, wyodrębnijmy z płynu cylindryczny element objętości Δv, o długości Δl (rys. 137). Oprócz sił ciśnienia na podstawy walca, na element ten działa jeszcze ciężar jego ΔQ, którego składowa w kierunku osi walca równa jest $\Delta Q \cos \alpha$. Warunek, aby element nie przesuwał się



rys. 137

w kierunku osi OO_1, wyraża się wzorem

$$p' \Delta S + \Delta Q \cos\alpha = p'' \Delta S$$

lub, po uwzględnieniu, że $\Delta Q = \varrho \,.\, g \,.\, \Delta v = \varrho \,.\, g\ \Delta l \,.\, \Delta S$, gdzie ϱ — gęstość płynu, którą w obrębie walca przyjmujemy za stałą,

$$p'' = p' + \varrho \,.\, g \,.\, \Delta l \cos\alpha.$$

Oznaczmy przez Δh pionową odległość między górną i dolną podstawą walca.

$$\Delta h = \Delta l \cos\alpha,$$

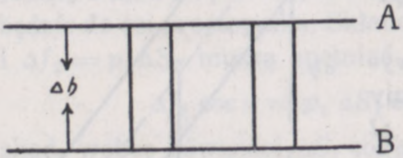
mamy zatem

$$p'' = p' + \varrho g \,\Delta h \tag{2}$$

Gdy $\Delta h = 0$, gdy więc walec elementarny jest poziomy, $p'' = p'$. Na tym samym poziomie ciśnienie w płynach, poddanych działaniu siły ciężkości, ma wartość jednakową. Powierzchnie poziome są jednak, jak wiemy, powierzchniami ekwipotencjalnymi siły ciężkości; płyn zatem poddany działaniu siły ciężkości, jest w równowadze wtedy, gdy powierzchnie, na których ciśnienie ma wartość jednakową, są powierzchniami ekwipotencjalnymi siły ciężkości.

To twierdzenie można bez trudu uogólnić na przypadek, gdy płyn znajduje się pod działaniem dowolnej siły, posiadającej podobnie, jak siła ciężkości, potencjał. Płyn będzie w równowadze tylko wtedy, gdy powierzchnie $p =$ stałej będą jednocześnie powierzchniami ekwipotencjalnymi danej siły. Składowa bowiem w kierunku osi natężenia danego pola wtedy tylko będzie równa zeru, gdy oś elementarnego walca będzie do niej prostopadła, gdy więc element leżeć będzie na powierzchni ekwipotencjalnej.

Niech A i B (rys. 138) będą powierzchniami poziomu, odległymi o Δh jedna od drugiej. Wyodrębnijmy z płynu dwa pionowe walce elementarne, zawarte między tymi powierzchniami, i oznaczmy gęstości zawartego w nich płynu przez ϱ_1 i ϱ_2. Z równania (2) otrzymujemy



rys. 138

$$p'' - p' = \varrho_1\, g\Delta h = \varrho_2\, g\Delta h,$$

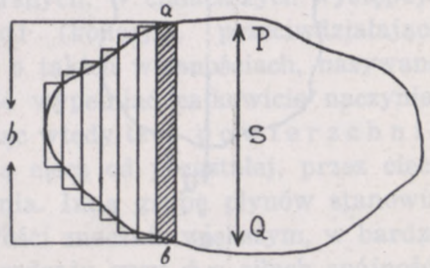
ϱ_1 równe jest zatem ϱ_2. Zmniejszając nieograniczenie odległość Δh, stwierdzimy, że w płynie, znajdującym się w równowadze pod działaniem sił ciężkości, powierzchnie równego ciśnienia są również powierzchniami tej samej gęstości.

Różnica ciśnień na powierzchniach poziomu, odległych o h jedna od drugiej, wyrazi się wzorem

$$p_2 - p_1 = g \sum_{h=0}^{h} \varrho \Delta h, \tag{3}$$

gdzie p_2 oznacza ciśnienie na poziomie niższym.

W przypadku, gdy mamy do czynienia z dwoma stykającymi się, lecz nie mieszającymi się płynami o różnych gęstościach, z ustalonych wyżej warunków równowagi wynika, że powierzchnia rozdziału tych płynów jest pozioma; przy czym równowaga jest stała, gdy płyn rzadszy znajduje się wyżej; w przeciwnym bowiem razie drobne naruszenie równowagi wywołałoby, — jak o tym łatwo można się przekonać, zakładając, że powierzchnia rozdziału tworzy z poziomem kąt $\Delta\alpha$, — ruch płynu, trwający dopóty, dopóki płyn lżejszy nie ułoży się wyżej od cięższego.



rys. 139

Wyodrębnijmy z płynu pewną skończoną jego objętość i podzielmy ją na elementarne pionowe walce (rys. 139). Różnica ciśnień na górną i dolną powierzchnię walca ab, o wysokości h, wynosi

$$\Delta p = g \sum_{h=0}^{h} \varrho . \Delta h.$$

Wypadkowa zaś sił, działających na ten walec, skierowana pionowo do góry (ciśnienie bowiem na dolną powierzchnię jest większe, niż na górną), jest równe

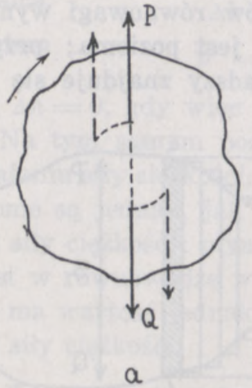
$$\Delta f = \Delta p . \Delta S = g \sum_{h=0}^{h} \varrho . \Delta h . \Delta S = g \sum_{v}^{v} \varrho \Delta v = g \Delta m,$$

gdzie ΔS jest przekrojem walca, Δm — jego masą. Analogiczne wyrażenia znajdziemy dla pozostałych walców elementarnych; wypadkowa wszystkich tych sił, działających na daną objętość v w tym samym kierunku, będzie zatem równa

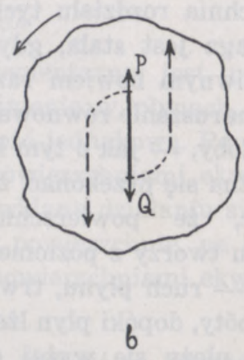
$$f = \Sigma \Delta f = g \Sigma \Delta m = mg = P.$$

To p a r c i e d o g ó r y P, zrównoważone przez ciężar płynu w danej objętości v, przyłożone jest do środka masy S tego płynu, wyodrębniona bowiem masa cieczy jest w każdym położeniu w równowadze.

Przypuśćmy teraz, że, nie zmieniając w niczym rozkładu ciśnień, zastąpiliśmy rozpatrywaną część płynu ciałem o tej samej powierzchni, co objętość v, utrzymując je jakimkolwiek



rys. 140 a



rys. 140 b

sposobem w równowadze (np. zawieszając na nici). Ciało to doznawać będzie tego samego parcia, co poprzednio objętość v płynu, wypadkowa jednak jego własnego ciężąru i parcia do góry

$$f' = Q_c - P = Q_c - Q_p, \tag{4}$$

gdzie Q_c oznacza ciężar ciała, Q_p — ciężar płynu w tej samej objętości, nie będzie tym razem na ogół równa zeru. Podobnie i punkty przyłożenia ciężaru Q_c i parcia P na ogół będą różne. Równowaga ciała zanurzonego będzie stała, gdy punkt przyłożenia parcia, tzw. ś r o d e k p a r c i a, będzie leżał na tym samym pionie, co środek masy, wyżej od niego. Wtedy przy drobnym zakłóceniu równowagi powstająca para sił (P, Q_c) będzie przywracała położenie poprzednie (rys. 140 a). Gdy punkt P leży niżej od S, równowaga, jak na to wskazuje rys. 140 b, jest niestała.

Prawo, wyrażone wzorem (4), zostało po raz pierwszy sformułowane przez Archimedesa z Syrakuz (287—212 przed nar. Chr.), stąd też często nazywane jest p r a w e m A r c h i m e d e s a.

3. PODZIAŁ PŁYNÓW NA CIECZE I GAZY. ŚCIŚLIWOŚĆ CIECZY

Obliczenie ze wzoru (3) różnicy ciśnień w płynie na dwu różnych poziomach możliwe jest tylko wtedy, gdy możemy wyznaczyć zmiany, jakich doznaje w miarę wzrostu głębokości gęstość ϱ płynu. W płynach o stałej temperaturze zmiana ϱ zależy jedynie od zmian ciśnienia. Pewne płyny mają pod tym względem własności zbliżone do własności ciał stałych; spółczynnik ściśliwości (rozdz. V, ust. 3), zależny od rodzaju danego ciała, ma dla wszystkich ciał tej grupy wartość niewielką tak, że znaczniejsze zmniejszenie ich objętości wymaga użycia stosunkowo wielkich ciśnień zewnętrznych. W ciałach tych występują również *siły spójności* (kohezji), przeciwdziałające zwiększeniu objętości. Płyny o takich własnościach, nazywane *cieczami*, mogą zatem nie wypełniać całkowicie naczynia, w którym się znajdują, tworząc wtedy tzw. *powierzchnię swobodną*, odgraniczającą ciecz od pozostałej, przez ciecz nie wypełnionej części naczynia. Inną grupę płynów stanowią *gazy*, o spółczynniku ściśliwości znacznie większym, w bardzo małym stopniu zależnym od rodzaju gazu, i o siłach spójności znikomo małych.

Z większą jeszcze może słusznością, niż przy omawianiu podziału ciał na stałe i płynne, należy stwierdzić, że ścisłego rozgraniczenia między cieczami i gazami nie ma. Jak o tym niżej będzie mowa (rozdz. XI, ust. 7), można płyn przeprowadzić ze stanu gazowego w ciekły lub odwrotnie tak, aby własności jego w dwu sąsiednich stanach różniły się nieograniczenie mało, zbliżając się nieograniczenie powoli do własności tego stanu, w jakim chcemy, aby się ostatecznie znalazł. Możemy jednak wyobrazić sobie pewne stany graniczne płynów w postaci *cieczy doskonałej*, całkowicie nieściśliwej, i *gazu doskonałego*, o siłach spójności równych zeru i spółczynniku ściśliwości, niezależnym od rodzaju gazu, i zaliczać badane płyny do cieczy lub gazów w zależności od stopnia róznicy między ich własnościami i własnościami, cechującymi te stany.

Spółczynnik ściśliwości cieczy był po raz pierwszy wyznaczony przez Cantona (1761 r.), który otrzymał dla wody o temperaturze

pokojowej wartość γ równą $0{,}000046 \frac{1}{\text{Atm}}$, mało różniącą się od wartości, jaką dziś przyjmujemy. Pierwsze dokładniejsze pomiary zawdzięczamy Oerstedowi (1822 r.), który naczynie, zawierające ciecz, poddawał z zewnątrz i od wewnątrz jednakowemu ciśnieniu, nie uwzględniając jednak wpływu, jaki na wynik pomiaru miała zmiana pojemności naczynia. Dopiero Regnault, stosując opisany wyżej piezometr (rozdz. V, ust. 3), wskazał na poprawki, wynikające ze ściśliwości ciał stałych. Niech v_1 będzie objętością naczynia, wypełnionego całkowicie badaną cieczą pod ciśnieniem p_1, h zmianą wysokości słupka cieczy w rurce włoskowatej o przekroju S, gdy ciecz i naczynie są poddane wszechstronnemu ciśnieniu p_2. Gdyby materiał naczynia był całkowicie nieściśliwy, wtedy $h \cdot S = \Delta v$ wyznaczałoby zmianę objętości cieczy; w rzeczywistości jednak pojemność naczynia również ulega zmianie tak, że Δv wyznacza jedynie pozorną zmianę objętości cieczy, równą różnicy zmian objętości cieczy i pojemności naczynia.

Ze wzoru (3) i (3 a), rozdz. V, ust. 3 znajdujemy, że zmiana objętości naczynia

$$v_1 - v_2 = \gamma_n v_1 (p_2 - p_1),$$

gdzie v_2 — objętość końcowa, γ_n — spółczynnik ściśliwości naczynia, stąd

$$v_2 = v_1 [1 - \gamma_n (p_2 - p_1)] \tag{a}$$

Analogicznie objętość cieczy pod ciśnieniem p_2 wynosi

$$v'_2 = v_1 [1 - \gamma_c (p_2 - p_1)]. \tag{b}$$

Objętość ta różni się o Δv od objętości v_2, przy czym, jak wykazują pomiary, jest zawsze od v_2 mniejsza, gdy $p_2 > p_1$, tak że

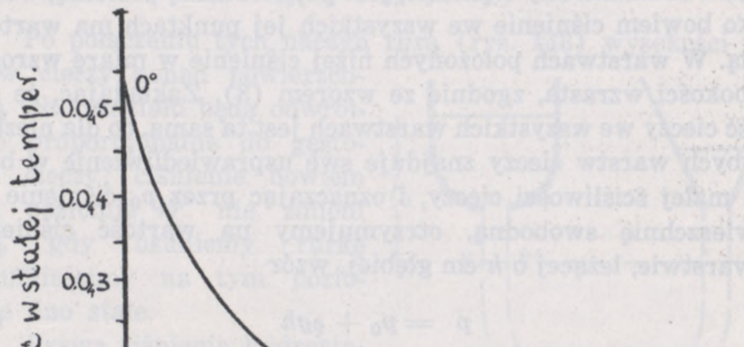
$$\Delta v = v_2 - v'_2 = v_1 (\gamma_c - \gamma_n)(p_2 - p_1), \tag{c}$$

skąd, znając Δv i γ_n, można wyznaczyć γ_c.

Amagat, o którego badaniach ściśliwości ciał mówiliśmy już wyżej (rozdz. V, ust. 3), zmienił nieco piezometr Regnaulta. Stalowy grubościenny walec wypełniony był gliceryną, w dolnej części rtęcią, która częściowo wypełniała rurkę włoskowatą, wychodzącą (inaczej, niż u Regnaulta) z dolnej części właściwego piezometru, zawierającego badaną ciecz. W boczne ściany tej rurki wlutowane były w pewnych odstępach druciki platynowe, połączone ze sobą na zewnątrz rurki (w glicerynie), spiralkami platynowymi, z których każda miała opór 2 omów. Najniższa ze spiralek była połączona z rtęcią, najwyższa zaś z drutem, wychodzącym na zewnątrz stalowego walca i połączonego z jednym biegunem baterii elektrycznej, której drugi biegun był połączony drutem z rtęcią, wypełniającą dno walca. Obwód więc elek-

tryczny był stale zamknięty; natężenie przepływającego prądu można było odczytać na włączonym w obwód galwanometrze. Gdy rtęć podnosiła się do tego miejsca rurki, gdzie był wtopiony pierwszy drucik platynowy, natężenie prądu nagle wzrastało, prąd bowiem nie płynął już przez najniższą spiralkę, lecz przez rtęć w rurce i spiralki pozostałe. Podobnie przy dojściu rtęci do drucika następnego prąd znów skokiem wzrastał. W ten sposób, znając odległości, w jakich były rozmieszczone druciki, można było ze zmian natężenia prądu wywnioskować o podnoszeniu się rtęci w rurce i wyznaczyć pozorne zmniejszenie się Δv objętości cieczy.

Analogiczne urządzenie stosował później (od 1904 r.) Richards. Piezometr do bardzo wielkich ciśnień zbudował Bridgman (1911).



rys. 141

Opierając się na wynikach pomiarów spółczynnika ściśliwości, możemy do cieczy zaliczyć takie ciała, jak woda, dla której w temperaturze 20° γ w granicach od 25 do 50 Atm ma, według Amagata, wartość $0{,}0000476 \frac{1}{\text{Atm}}$, rtęć ($\gamma = 0{,}00000392 \frac{1}{\text{Atm}}$), alko-

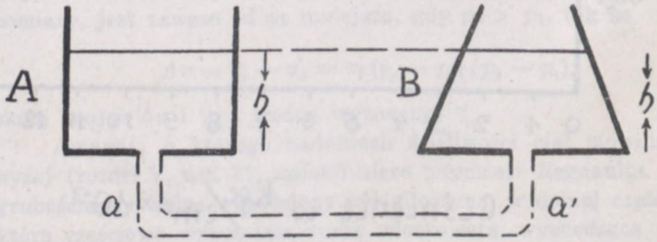
hol ($\gamma = 0{,}0001118 \frac{1}{\text{Atm}}$), eter siarczany ($\gamma = 0{,}000170 \frac{1}{\text{Atm}}$) i inne. W miarę, jak ciśnienie zewnętrzne wzrasta, γ maleje. Zależność tę dla wody o temperaturze 0° przedstawia wykres rys. 141, który podajemy za Jellinekiem. Ze wzrostem temperatury spółczynnik γ na ogół wzrasta (patrz. rozdz. VIII, ust. 3).

4. CIŚNIENIE W CIECZACH

Z twierdzeń ustępu 2 wynika, że powierzchnia swobodna cieczy w spoczynku, poddanej jednostajnemu ciśnieniu zewnętrznemu i działaniu siły ciężkości, jest powierzchnią poziomą, wtedy tylko bowiem ciśnienie we wszystkich jej punktach ma wartość stałą. W warstwach położonych niżej ciśnienie w miarę wzrostu głębokości wzrasta, zgodnie ze wzorem (3). Zakładając, że gęstość cieczy we wszystkich warstwach jest ta sama, co dla niezbyt grubych warstw cieczy znajduje swe usprawiedliwienie w bardzo małej ściśliwości cieczy, i oznaczając przez p_0 ciśnienie na powierzchnię swobodną, otrzymujemy na wartość ciśnienia w warstwie, leżącej o h cm głębiej, wzór

$$p = p_0 + \varrho g h \tag{5}$$

Niech A i B będą naczyniami dowolnego kształtu, napełnionymi tą samą jednorodną cieczą do tej samej wysokości h ponad



rys. 142

poziomym dnem (rys. 142). Ze wzoru (5) wynika, że ciśnienie na dno jest w obydwu naczyniach to samo tak, że w przypadku, gdy podstawy tych naczyń mają powierzchnie równe, parcie na dno $f = pS$ ma w obydwu naczyniach wartość tę samą, jakkolwiek ciężar cieczy w naczyniu A jest większy niż w B.

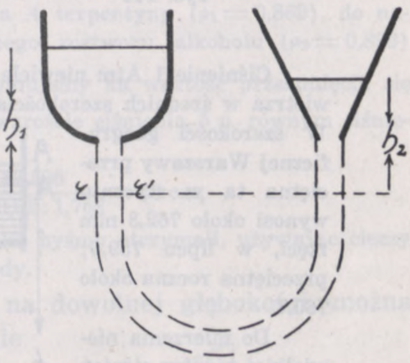
Na ten tzw. paradoks hydrostatyczny zwrócił pierwszy uwagę Pascal (1623—1662).

Jeżeli więc obydwa naczynia ustawimy tak, aby dna ich leżały na tym samym poziomie, i połączymy je rurą *aa'*, ciecz będzie w równowadze, gdy poziom powierzchni swobodnych w utworzonych w ten sposób n a c z y n i a c h p o ł ą c z o n y c h będzie jednakowy.

Gdy naczynia wypełnione są różnymi cieczami o gęstościach ϱ_1 i ϱ_2, ciśnienia na dno (przy tym samym ciśnieniu zewnętrznym p_0) będą równe przy spełnieniu warunku

$$\varrho_1 h_1 = \varrho_2 h_2. \qquad (5\,a)$$

Po połączeniu tych naczyń rurą (rys. 143) wysokości słupów cieczy ponad powierzchnią ich rozdziału będą odwrotnie proporcjonalne do gęstości cieczy; ciśnienie bowiem na poziomie *rr'* nie zmieni się, gdy usuniemy rurkę i umieścimy na tym poziomie dno stałe.

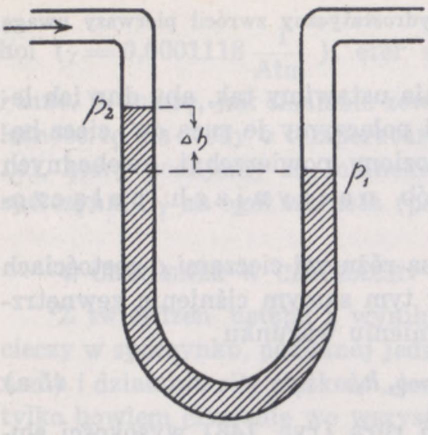


rys. 143

Prawa ciśnienia hydrostatycznego znalazły zastosowanie w tzw. m a n o m e t r a c h (gr. manos — cienki, nie gęsty). W najprostszej postaci jest to rurka w kształcie litery U (rys. 144), wypełniona zazwyczaj jednorodną cieczą. Gdy ciśnienia zewnętrzne na każdą z powierzchni swobodnych mają tę samą wartość, powierzchnie te w obydwu ramionach znajdują się na jednakowym poziomie; gdy ciśnienia te są różne, wtedy, jak to bezpośrednio wynika ze wzoru (5)

$$p_1 = p_2 + \varrho g \,.\, \Delta h \quad \text{lub} \quad p_1 - p_2 = \varrho \cdot g \cdot \Delta h. \qquad (5\,b)$$

Różnica zatem ciśnień, działających na dane powierzchnie swobodne, jest proporcjonalna do różnicy poziomów tych powierzchni. Biorąc za jednostkę ciśnienia tzw. j e d n o s t k ę m a n o m e t r y c z n ą, równą ciśnieniu, wywieranemu w oznaczonych warunkach przez oznaczonej wysokości słup wybranej

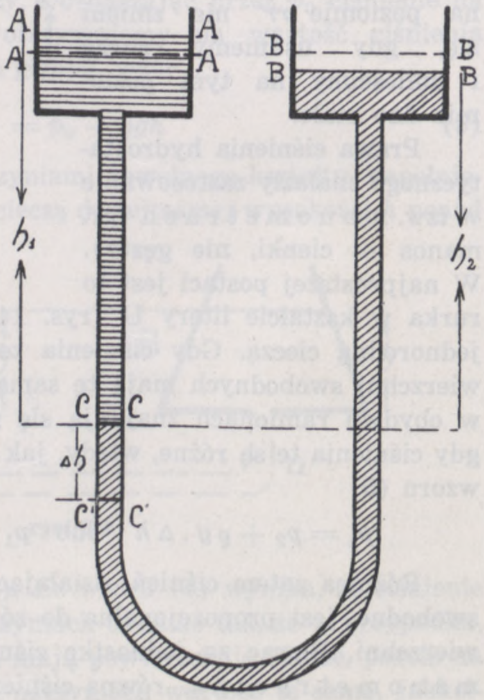


rys. 144

cieczy, z pomiaru Δh otrzymujemy od razu różnicę ciśnień. Najczęściej za jednostkę ciśnienia manometrycznego bierze się ciśnienie, jakie wywiera słup rtęci o wysokości 76 cm, umieszczony na poziomie morza, w szerokości 45° ($g = 980{,}62$ cm/sek^2) i utrzymywany w temperaturze 0° skali gazowej. Jednostka ta, nazywana a t m o s f e r ą (Atm) (patrz. rozdz. V, ust. 1), równa jest $1013{,}26 \cdot 10^3$ dym/cm^2.

Ciśnienie 1 Atm niewiele się różni od przeciętnego ciśnienia powietrza w średnich szerokościach geograficznych na poziomie morza. W szerokości geograficznej Warszawy przeciętna ta w styczniu wynosi około 762,3 mm rtęci, w lipcu 759,0; przeciętna roczna około 760,7.

Do mierzenia niewielkiej różnicy ciśnień używa się czasami manometru Kretza o dwu cieczach. Dwa szerokie naczynia o jednakowych przekrojach S połączone są rurką w kształcie litery U o przekroju s (rys. 145). Jedno z tych naczyń (np. A) napełnione jest cieczą o gęstości ρ_1, drugie — cieczą o gęstości ρ_2. Gdy ciśnienia na każdą z powierzchni swobodnych są jednakowe, wysokości słupów cieczy ponad po-



rys. 145

wierzchnią ich rozdziału cc są w stosunku odwrotnym do ich gęstości $\frac{h_1}{h_2}=\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$. Gdy ciśnienie, wywierane na A_1 wzrasta, powierzchnia rozdziału obniża się o Δh od cc do $c'c'$, jednocześnie powierzchnia swobodna AA opada o $\Delta h\,.\,\frac{s}{S}$, powierzchnia zaś BB' o tyleż się podnosi. Oznaczając przyrost ciśnienia przez Δp, otrzymujemy na ciśnienie w przekroju $c'c'$

$$p_{c'c'}=p_0+\Delta p+\left(h_1+\Delta h-\Delta h\frac{s}{S}\right)\varrho_1 g=$$

$$=p_0+\left(h_2+\Delta h+\Delta h\frac{s}{S}\right)\varrho_2 g,$$

gdzie p_0 — ciśnienie początkowe. Uwzględniając, że $h_1\rho_1=h_2\rho_2$, znajdujemy

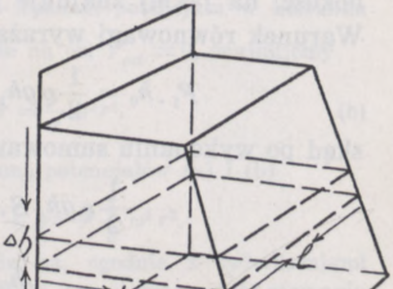
$$\Delta p=\left[(\varrho_2-\varrho_1)+\frac{s}{S}\,(\varrho_2+\varrho_1)\right]\Delta h\,.\,g.$$

Nalewając więc np. do naczynia A terpentyny ($\rho_1=0{,}869$), do naczynia B nieco cięższego wodnego roztworu alkoholu ($\rho_2=0{,}899$) i zakładając, że $\frac{s}{S}=0{,}01$, otrzymujemy na wartość przesunięcia się powierzchni rozdziału Δh przy wzroście ciśnienia Δp, równym ciśnieniu 1 mm rtęci

$$\Delta h=\frac{0{,}1\,.\,13{,}596}{0{,}03+0{,}01\,.\,1{,}768}=28\text{ cm},$$

a więc taką zmianę poziomu, jaką byśmy otrzymali, używając cieczy przeszło 20 razy lżejszej od wody.

Znając ciśnienie w cieczy na dowolnej głębokości, można obliczyć siłę, z jaką ciecz ciśnie na boczną ścianę naczynia.



rys. 146

Odkładajmy we wszystkich punktach ściany, poczynając od swobodnej powierzchni cieczy, odcinki równe ciśnieniom na danym poziomie (rys. 146). Otrzymamy bryłę, której przekroje poziome są prostokątami, gdyż ciśnienia na tym samym poziomie we wszystkich punktach ściany mają tę samą wartość, przekroje zaś pionowe — trapezami, ciśnienie bowiem wzrasta proporcjonalnie do głębokości. Wytnijmy w bryle dwiema poziomymi płaszczyznami element objętości $p\,.\,\Delta h\,.\,l$. Jest on liczbowo

równy sile elementarnej, z jaką ciecz ciśnie na element $\Delta h \,.\, l = \Delta S$ ściany. Wypadkowa tych sił równoległych jest ich sumą arytmetyczną, a więc jest liczbowo równa objętości rozważanej bryły. Siła więc F, z jaką ciecz ciśnie na boczną ścianę o powierzchni $S = h_1 l$ (h_1 jest tu wysokością cieczy w naczyniu),

$$F = p_0 h_1 l + \frac{1}{2} \varrho g h_1^2 l = p_0 S + \frac{1}{2} \varrho g h_1 \,.\, S.$$

Zazwyczaj na ścianę działa z zewnątrz to samo ciśnienie p_0, jakie działa na swobodną powierzchnię cieczy. Wypadkowa więc sił, przyłożonych do ściany,

$$F_1 = \frac{1}{2} \varrho g h_1 \,.\, S. \tag{6}$$

Gdyby ściana była ruchoma, musielibyśmy dla utrzymania jej w spoczynku działać na nią siłą równą, przeciwnie skierowaną i przyłożoną w takim punkcie ściany, aby suma momentów względem dowolnej osi sił F_1 i $-F_1$ była równa zeru (rozdz. III, ust. 1). Punkt ten, jak to wynika z warunków symetrii, leży na pionie, dzielącym powierzchnię ściany na dwie równe części. Chodzi więc tylko o wyznaczenie głębokości h_0 pod poziomem cieczy, którą znajdziemy, obliczając momenty sił względem osi poziomej, leżącej na powierzchni swobodnej. Składowe momenty elementarne równe są $p \Delta S \,.\, h = h \varrho g \,.\, \Delta S \,.\, h$, gdzie h — głębokość, na jakiej znajduje się dany element powierzchni ΔS. Warunek równowagi wyraża się wzorem

$$F_1 \,.\, h_0 = \frac{1}{2} \varrho g h_1 \,.\, S \,.\, h_0 = \varrho g \Sigma h^2 \Delta S,$$

skąd po wykonaniu sumowania

$$\frac{1}{2} \varrho g h_1 S \,.\, h_0 = \frac{1}{3} \varrho g h_1^2 \,.\, S$$

$$h_0 = \frac{2}{3} h_1.$$

Punkt przyłożenia wypadkowej F_1 leży zatem na głębokości $\frac{2}{3}\, h_1$ pod poziomem swobodnej powierzchni cieczy.

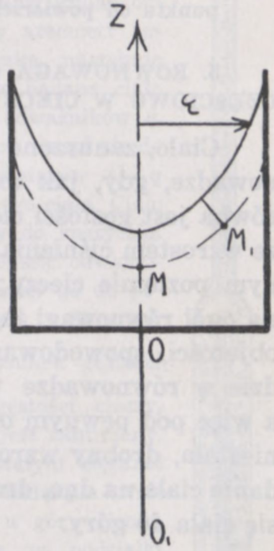
Sumę momentów elementarnych znajdujemy, całkując wyrażenie

$$\varrho g \int h^2 dS = \varrho g l \int_0^{h_1} h^2 dh = \frac{1}{3} \varrho g h_1^3 \,.\, l = \frac{1}{3} \varrho g h_1^2 \,.\, S.$$

4a. POWIERZCHNIA SWOBODNA CIECZY W NACZYNIU, OBRACAJĄCYM SIĘ RUCHEM JEDNOSTAJNYM

Przypuśćmy, że ciecz, umieszczona w naczyniu, obracającym się ruchem jednostajnym dookoła osi pionowej, przechodzącej przez jego środek, jest względem ścian tego naczynia w spoczynku. Każdy element objętości tej ściany będzie poza siłą ciężkości podlegał działaniu siły odśrodkowej (za układ odniesienia bierzemy układ związany sztywnie z naczyniem; patrz rozdz. II, ust. 20), której wartość $m \cdot \omega^2 \cdot r$ zależy jedynie od odległości od osi obrotu, a więc zgodnie z określeniem ust. 3 rozdz. IV jest funkcją punktu. Możemy zatem uważać przestrzeń, w której znajduje się ciecz, za pole dwu sił: grawitacyjnej i odśrodkowej. Przyjmując, że pionowa oś Z skierowana jest do góry (rys. 147) i oznaczając potencjał siły grawitacyjnej na dnie naczynia przez V_0, znajdziemy na wartość potencjału na wysokości z

$$V_z = V_0 + gz. \tag{a}$$



rys. 147

Potencjał siły odśrodkowej w punkcie, odległym o r od osi obrotu, znajdziemy całkując $\frac{dV_{od}}{dr} = \omega^2 r$, gdzie $\omega^2 r$ jest natężeniem pola siły odśrodkowej, $\frac{dV}{dr}$ — spadem potencjału w kierunku linii sił tego pola. Uwzględniając, że na osi $V_{od} = 0$, znajdujemy

$$V_{od} = \int_0^r r\,\omega^2 dr = \frac{1}{2}\,\omega^2 r^2. \tag{b}$$

Łączny potencjał obydwu pól jest sumą potencjałów (a) i (b)

$$V = V_z + V_{od} = V_0 + gz + \frac{1}{2}\,\omega^2 r^2.$$

Powierzchnie jednakowego ciśnienia są, zgodnie z twierdzeniami ust. 2, powierzchniami stałego potencjału, czynią więc zadość równaniu

$$gz + \frac{1}{2}\,\omega^2 r^2 = \text{stałej},$$

wyrażającemu p a r a b o l o i d ę o b r o t o w ą. Taki zatem kształt przybierze powierzchnia swobodna cieczy.

Przeprowadźmy przez punkt M na osi obrotu powierzchnię ekwipotencjalną; ciśnienie we wszystkich jej punktach jest takie samo, jak w punkcie M, gdzie równe jest ciężarowi słupa cieczy o wysokości h, równej odległości punktu M od swobodnej powierzchni cieczy.

A ponieważ w danym przypadku powierzchnie ekwipotencjalne są równoległe, w takiej samej odległości h (mierzonej prostopadle do powierzchni swobodnej) znajduje się i każdy inny punkt M_1 tej samej powierzchni. Ciśnienie zatem w danym punkcie cieczy wzrasta proporcjonalnie do mierzonej w podany wyżej sposób odległości danego punktu od powierzchni swobodnej.

5. RÓWNOWAGA CIAŁ, ZANURZONYCH CAŁKOWICIE LUB CZĘŚCIOWO W CIECZY

Ciało, zanurzone w cieczy, wtedy tylko znajduje się w równowadze, gdy, jak to wynika z rozważań ust. 3, gęstość jego równa jest gęstości cieczy. Jeżeli objętość ciała mało zmienia się ze wzrostem ciśnienia, ciało znajduje się w spoczynku na dowolnym poziomie cieczy; zmiany ciśnienia zewnętrznego nie będą na ogół równowagi tej zakłócały. W przypadku zaś, gdy zmiany objętości, spowodowane zmianą ciśnienia, są znaczne, ciało będzie w równowadze tylko na pewnym oznaczonym poziomie, a więc pod pewnym oznaczonym ciśnieniem. Równowaga będzie niestała, drobny wzrost ciśnienia zewnętrznego spowoduje spadanie ciała na dno, drobne zmniejszenie ciśnienia — podnoszenie się ciała do góry.

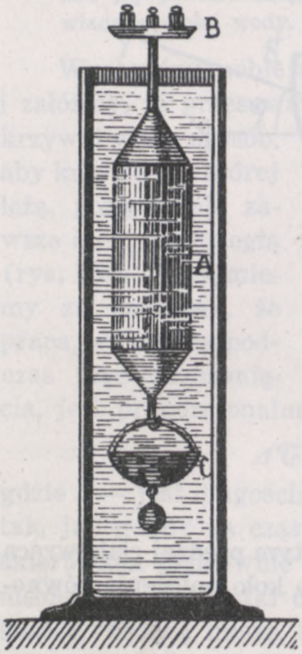
W tego rodzaju równowadze znajduje się tzw. nurek Kartezjusza. Jest to lekkie wydrążone ciało z małym otworem w dolnej części, wypełnione powietrzem (rys. 148). Ciało to zanurzone jest w wodzie, nalanej do słoja, zamkniętego szczelnie pęcherzem lub błoną gumową. Lekkie zwiększenie ciśnienia (wywołane przez naciskanie błony) powoduje zmniejszenie się objętości powietrza, wypełniającego ciało, wobec czego gęstość jego się zwiększa i ciało spada na dół; przy zmniejszeniu ciśnienia (przez zwolnienie błony od nacisku) — ciało podnosi się do góry.


rys. 148

Ciała o gęstości większej opadają na dno, ciała zaś o gęstości mniejszej wypływają na powierzchnię, zanurzając się w cieczy na tyle tylko, aby ciężar wypchniętej przez nie cieczy był równy ich własnemu ciężarowi.

Na tej zasadzie oparta jest budowa tzw. areometrów (gr. araios — lekki), służących

do mierzenia gęstości ciał stałych (tzw. areometr Nicholsona lub areometr o stałej objętości) i cieczy (areometr o stałym ciężarze). Areometr Nicholsona składa się z próżnego walca metalowego *A*, zakończonego u góry prętem, dźwigającym szalkę *B* i zaopatrzonym w znaczek (rys. 149 a), u dołu zaś dźwigającego ciężki koszyczek *C*. Obciążamy szalkę odważnikami tak, aby areometr zanurzył się do znaczka, następnie kładziemy na szalkę badane ciało i dokładamy tyle odważników *q*, aby areometr znów zanurzył się do znaczka. Różnica ciężarów *Q*—*q* jest ciężarem badanego ciała. Ciało następnie kładziemy do koszyczka *C* i obciążając areometr odważnikami *q'*, doprowadzamy go do poprzedniego położenia. Stosunek $\frac{Q-q}{q'-q}$ wyznaczy stosunek gęstości danego ciała do gęstości cieczy, w której areometr jest zanurzony.

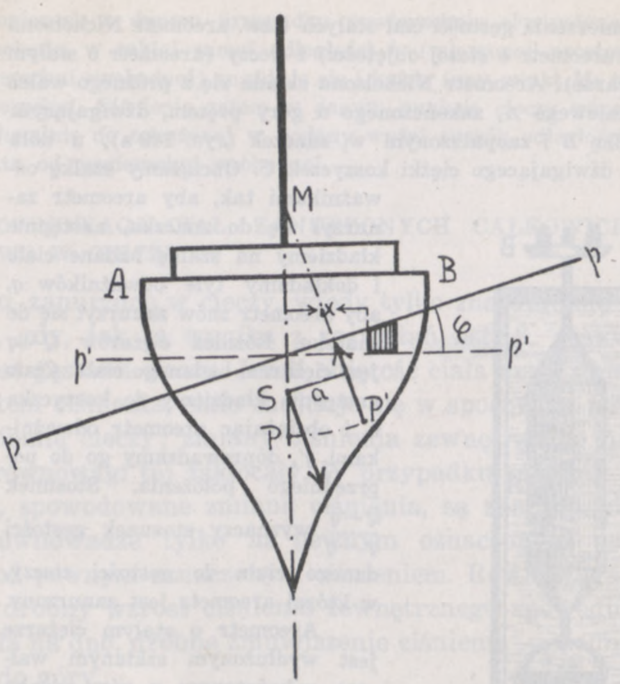


rys. 149 a

Areometr o stałym ciężarze jest wydłużonym szklanym walcem, zakończonym u góry cienką rurką, zaopatrzoną w podziałki (rys. 149 b). Walec obciążony jest rtęcią, wypełniającą dolną jego część. Im ciecz jest gęstsza, tym areometr głębiej się zanurzy.


rys. 149 b

Warunki równowagi ciał pływających różnią się nieco od poprzednio ustalonych (w ust. 3) warunków równowagi ciał zanurzonych. Niech *AB* będzie pionowym przekrojem ciała pływającego (np. statku, rys. 150), *S* — środkiem jego ciężkości, *P* — środkiem parcia. Ciało jest w równowadze, gdy obydwa te punkty leżą na tym samym pionie. Gdy ciało przechyli się o kąt φ, środek parcia zmieni na ogół swe położenie, przechodząc do *P'*. Powstanie w ten sposób para sił o momencie $Q \, . \, a$; para ta przywróci poprzednie położenie ciała, jeżeli pion, wystawiony w nowym środku parcia *P'*, przecina prostą *SP* powyżej środka ciężkości *S*. Punkt przecięcia *M* nazywany jest m e t a c e n t r u m. Oznaczając przez *h* odległość *SM*. znajdujemy $a = h \sin\varphi$ lub przy małych kątach nachylenia $h \, . \, \varphi$. Im wyżej zatem leży metacen-



rys. 150

trum, tym większy jest moment pary sił, tym prędzej ciało wraca do położenia poprzedniego i wahania jego koło położenia równowagi mają mniejszy okres.

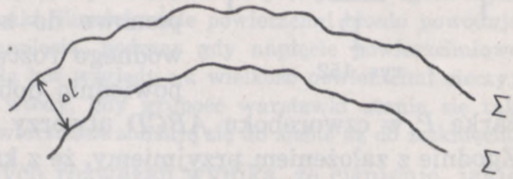
6. NAPIECIE POWIERZCHNIOWE

Siły spójności, działające między elementarnymi objętościami cieczy (ust. 3) ujawniają się jedynie na powierzchni jej zetknięcia z otaczającymi ją ciałami, tylko tam bowiem siły, jakimi na dany element cieczy działają elementy sąsiednie, nie równoważą się wzajemnie. Siły te składają się na wypadkową, powodującą ciśnienie warstwy powierzchniowej na leżące pod nią warstwy cieczy, tak, że przeniesienie elementu cieczy z wewnątrz na jej powierzchnię, — czemu, oczywiście, towarzyszy zwiększenie tej powierzchni, — wymaga pewnej pracy.

Szczególne własności warstwy powierzchniowej możemy wykazać choćby następującym prostym doświadczeniem. Zanurzmy pod powierzchnię wody areometr o stałym ciężarze (ust. 5), do którego

górnego końca przymocowany jest poziomo niewielki kawałek siatki drucianej. Pozostawiony samemu sobie areometr zacznie podnosić się do góry, lecz z chwilą, gdy siatka dojdzie do poziomu cieczy, areometr zatrzyma się, jak gdyby parcie do góry, jakiego doznaje, nie wystarczało do pokonania oporu warstwy powierzchniowej. Dopiero gdy areometr nieco wyciągniemy z wody, tak, aby siatka znalazła się ponad jej powierzchnią, podniesie się on na tę wysokość, jaka odpowiada gęstości wody.

Wyobraźmy sobie na powierzchni cieczy dowolną krzywą Σ i załóżmy, że przesuwamy cząstki cieczy, znajdujące się na tej krzywej w ten sposób, aby krzywa, na której leżą, pozostawała zawsze do Σ równoległą (rys. 151). Przyjmiemy za Gaussem, że praca, wykonana podczas tego przesunięcia, jest proporcjonalna do zwiększenia powierzchni



rys. 151

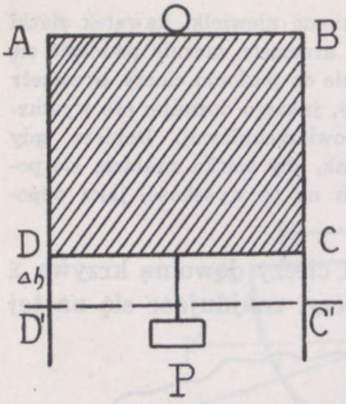
$$\Delta \mathfrak{T} = \sigma . \Delta S = \sigma . s . \Delta l,$$

gdzie s — jest długością krzywej Σ, a więc, że zjawisko zachodzi tak, jak gdyby na cząstki, leżące na krzywej Σ, działała siła, skierowana przeciwnie do kierunku ruchu i której wartość, odniesiona do jednostki długości krzywej Σ, równa jest σ. Wielkość σ, będącą miarą tej siły, nazywamy n a p i ę c i e m p o w i e r z c h n i o w y m. Wymiar σ jest równy

$$[\sigma] = \frac{[f]}{l} = MT^{-2}, \tag{7}$$

czemu w układzie C. G. S. odpowiada dyn/cm, kierunek zaś napięcia jest w każdym punkcie krzywej Σ do niej prostopadły.

Zgodnie z założeniem Gaussa wielkość ta jest miarą pracy, jaką trzeba wykonać siłami zewnętrznymi, aby powierzchnię cieczy zwiększyć o jednostkę, lub też, jaką wykonywają siły spójności przy zmniejszeniu powierzchni o jednostkę. Wprowadzenie więc tej wielkości jest równoważne założeniu, że istnieje potencjalna energia powierzchniowa cieczy, której miarą na jednostkę powierzchni jest napięcie powierzchniowe. Warstwa powierzchniowa jest w równowadze, gdy jej energia powierzchniowa posiada wartość w danych warunkach możliwie najmniejszą.



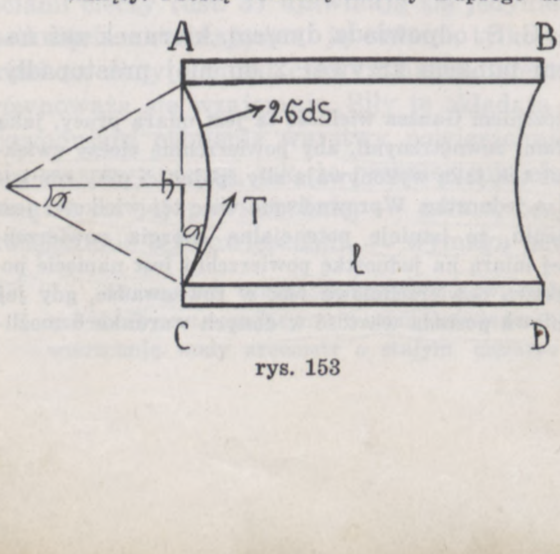
rys. 152

Wartość σ można wyznaczyć, stosując metodę, użytą po raz pierwszy przez Duprégo i van der Mensbrugghego (1866 r.), a którą podamy w postaci, jaką jej nadał Maxwell (1831—1879 r.). Weźmy ramkę drucianą *ABCD*, której jeden z boków poziomych *CD* o długości l jest ruchomy i obciążony ciężarkiem P (rys. 152). Ramkę tę zanurzamy pionowo do badanej cieczy (np. do wodnego roztworu mydła). Przy odpowiednio dobranej wartości P_0 ciężarka P w czworoboku *ABCD* utworzy się warstewka cieczy. Zgodnie z założeniem przyjmiemy, że z każdej strony warstewki na cząstki, leżące na prostej *CD*, działają siły σl, których wypadkowa $2\,\sigma l$ równoważy ciężar P_0, tak że mamy

$$P_0 = 2\sigma l, \tag{8 a}$$

skąd można obliczyć σ. Zwiększenie ciężaru P powoduje rozrywanie się warstewki, zmniejszenie — podnoszenie się boku *CD* do góry i zmniejszanie się powierzchni aż do całkowitego zniknięcia warstewki.

Wyznaczanie na tej drodze wartości σ nie daje jednak dokładnych wyników, a to z uwagi na siły tarcia, których nie możemy pominąć. Zazwyczaj też używa się pewnej odmiany metody Duprégo, polegającej na tym, że mierzy się siłę, potrzebną do oderwania poziomego pierścienia od powierzchni cieczy, z którą pierścień był zetknięty. Prostą odmianę metody Duprégo dał Terquem.



rys. 153

Czworobok *ABCD* jest utworzony przez dwie pałeczki szklane, zawieszone jedna pod drugą na cienkich niciach (rys. 153). Powstanie warstewki cieczy powoduje niewielkie podniesienie się dolnej pałeczki szklanej, przy czym nici tworzą łuki koła o promieniu r. Ciężar P pa-

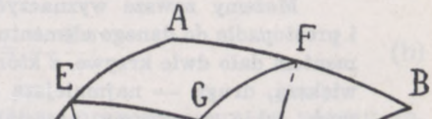
łeczki CD równoważony jest przez siły napięcia powierzchniowego $2\sigma l$ oraz przez składową pionową $T\cos\alpha$ siły napięcia nici. Siłę tę obliczamy z warunku równowagi, jaka powinna zachodzić między składową normalną do nici siły T i siłami $2\sigma ds$, działającymi w przeciwnym kierunku prostopadle do nici. Ze wzoru (12) w rozdz. V, ust. 7 znajdujemy, że $T_n = T \cdot \alpha = T\frac{s}{r}$. Mamy zatem

$$T\frac{s}{r} = 2\sigma s \quad \text{lub} \quad T = 2\sigma \cdot r.$$

Ostatecznie więc $\quad 2\sigma\,(l + r\cos\alpha) = P.$

Te własności warstewki cieczy upodobniają ją poniekąd do napiętej błonki kauczukowej. Napięcie powierzchniowe jest jednak zgoła czym innym, niż napięcie błonki. Zmniejszenie powierzchni błonki powoduje zmniejszenie się jej napięcia, podczas gdy napięcie powierzchniowe zachowuje wartość stałą bez względu na wielkość powierzchni cieczy; zmniejsza się dopiero wtedy, gdy grubość warstewki stanie się tak małą, że obydwie jej powierzchnie zbliżają się do siebie aż do zetknięcia.

Z wyżej przytoczonych rozważań wynika, że ciśnienie, jakie warstwa powierzchniowa wywiera na niżej położone warstwy cieczy, zwiększa się, gdy powierzchnia z płaskiej staje się wypukłą, zmniejsza się, gdy staje się wklęsłą. W pierwszym bowiem przypadku składowa normalna napięcia powierzchniowego skierowana jest do wewnątrz cieczy, w drugim — na zewnątrz. Niech $ABCD$ będzie elementem powierzchni cieczy (rys. 154); przeprowadźmy przez środek G elementu dwie wzajemnie prostopadłe płaszczyzny, które przetną element wzdłuż krzywych EE, o promieniu krzywizny r_1, i FF, o promieniu krzywizny r_2. Oznaczmy przez p ciśnienie, które byłoby w cieczy, gdyby powierzchnia jej była płaska, przez p' — ciśnienie przy danym kształcie powierzchni. Laplace udowodnił, że



rys. 154

$$p' - p = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{9}$$

gdzie r_1 i r_2 uważamy za dodatnie, gdy są skierowane do wewnątrz cieczy.

Poprzestając na przybliżonym udowodnieniu wzoru Laplace'a, założymy, że siły, z jakimi sąsiednie części warstwy powierzchniowej działają na boki AD i CB o długości dl_1, wytwarzają napięcie $T' = \sigma dl_1$ wzdłuż łuku koła krzywizny EE styczne do łuku. Składowa normalna T'_n wyniesie, zgodnie ze wzorem (12) w rozdz. V, ust. 7, $T' \frac{EE}{r_1} = T' \frac{dl_2}{r_1}$, gdzie dl_2 — długość $EE = AB$. Analogicznie siły, działające na boki AB i CD, wytworzą wzdłuż łuku koła FF napięcie $T'' = \sigma dl_2$, którego składowa normalna równa jest $T''_n = T'' \frac{dl_1}{r_2}$. Siła zatem, działająca normalnie do elementu powierzchni $dl_1\, dl_2$, wyrazi się wzorem

$$dF = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) dl_1\, dl_2,$$

nadwyżka zaś ciśnienia, spowodowana krzywizną powierzchni

$$p' - p = \frac{dF}{dl_1\, dl_2} = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Możemy zawsze wyznaczyć takie dwie wzajemnie prostopadłe i prostopadłe do danego elementu płaszczyzny, aby ich przecięcie z elementem dało dwie krzywe, z których jedna będzie miała możliwie największą, druga — najmniejszą krzywiznę spośród wszystkich krzywych, jakie otrzymamy, przecinając element powierzchni w różnych kierunkach prostopadłymi do niego płaszczyznami. Promienie krzywizny tych dwu krzywych nazywamy promieniami głównymi R_1 i R_2. Euler udowodnił, że

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

Wzór Laplace'a przybierze zatem postać następującą

$$p' - p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{9a}$$

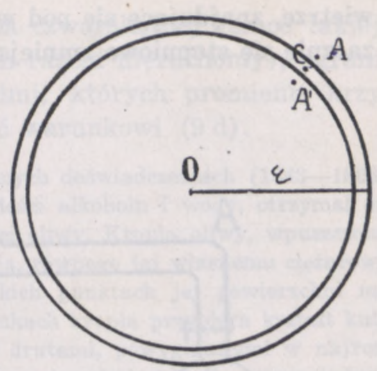
Ciecz, nie podlegająca działaniu sił zewnętrznych, proporcjonalnych do masy (ust. 1), jest w równowadze wtedy, gdy ciśnienie we wszystkich punktach jej powierzchni jest jednakowe, gdy przeto

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \text{stałej}. \tag{9b}$$

Taki przypadek zachodzi, gdy mamy do czynienia np. z bańką mydlaną, której ciężaru wobec bardzo małej grubości warstewki cieczy możemy nie brać pod uwagę. Bańka taka, puszczona swo-

bodnie, przybiera kształt kuli, wtedy bowiem powierzchnia jej posiada przy danej objętości wartość najmniejszą. Niech w punkcie A (rys. 155), leżącym na zewnątrz bańki w bezpośrednim jej sąsiedztwie, ciśnienie atmosferyczne wynosi p_0, w punkcie C, leżącym wewnątrz warstewki ciekłej p':

$$p' - p_0 = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$



rys. 155

lub, z uwagi, że dla powierzchni kulistej $r_1 = r_2 = r$, gdzie r — promień banki

$$p' - p_0 = \frac{2\sigma}{r} \qquad \text{(a)}$$

Podobnie różnica ciśnień w punktach C i A', leżącym wewnątrz bańki

$$p' - p_1 = -\frac{2\sigma}{r}, \qquad \text{(b)}$$

gdyż promień wewnętrzny r, który przyjmujemy za równy zewnętrznemu, jest skierowany na zewnątrz cieczy, ma przeto. zgodnie z umową, znak ujemny.

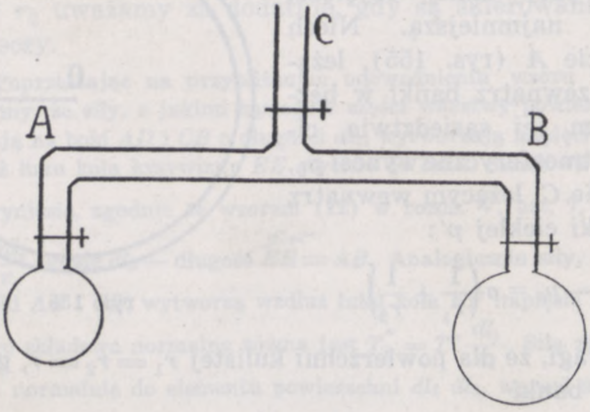
Ostatecznie więc, odejmując (b) od (a)

$$p_1 - p_0 = \frac{4\sigma}{r}. \qquad \text{(9 c)}$$

Tę nadwyżkę ciśnienia powietrza, zamkniętego w bańce mydlanej, nad ciśnieniem zewnętrznym można wykazać przy pomocy czułego manometru.

Zwiększanie się tej nadwyżki w miarę wzrostu krzywizny powierzchni cieczy (r — malejące) wykaże następujące doświadczenie. Rozgałęzioną na końcu rurkę CAB (rys. 156) zanurzmy do roztworu wodnego mydła i wydmuchajmy dwie bańki o niejednakowym promieniu. Po zamknięciu kranu C stwierdzimy, że bańka o promieniu mniejszym, z której po-

wietrze, znajdujące się pod większym ciśnieniem, uchodzi do B, zacznie się stopniowo zmniejszać, aby wkrótce zniknąć zupełnie.



rys. 156

Wzór (9 c) wyprowadziliśmy, zakładając, że ciśnienie, jakie by działało w cieczy o płaskiej powierzchni, jest równe ciśnieniu atmosferycznemu w punkcie A. Takie założenie jest jednak w sprzeczności z tym, cośmy mówili na początku tego ustępu o siłach spójności, których wypadkowa, skierowana do wewnątrz cieczy, normalnie do jej powierzchni, również i przy płaskiej powierzchni nie jest równa zeru. Nazwijmy za Laplace'm wywierane przez te siły ciśnienie — c i ś n i e n i e m s p ó j n o ś c i Π. Ciśnienie w punkcie C będzie tedy równe

$$P = \Pi + p_0 + \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{c}$$

gdzie wielkość $\sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = p_w$ często nazywają c i ś n i e n i e m w ł o s k o w a t y m.

Dla punktu A' będziemy mieli:

$$P_1 = \Pi + p_1 = P + \frac{2\sigma}{r} = \Pi + p_0 + \frac{2\sigma}{r} + \frac{2\sigma}{r},$$

stąd
$$p_1 - p_0 = \frac{4\sigma}{r}.$$

W przypadku, gdy warstewka nie jest ograniczona powierzchnią zamkniętą, $p_1 = p_0$ i warunek równowagi wyraża się wzorem

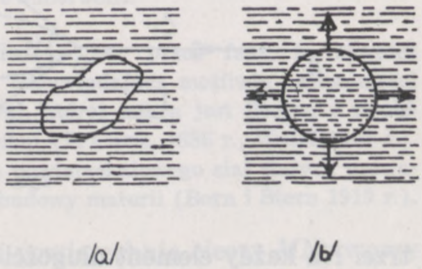
$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 0. \tag{9 d}$$

Tak np. warstewka, utworzona na czworokątnej ramce takiej, jak na rys. 152 (bok *CD* jest tym razem nieruchomy), ograniczona jest powierzchniami płaskimi, których promienie krzywizny $r_1 = r_2 = \infty$ czynią zadość warunkowi (9 d).

Wzór (9 b) sprawdził w licznych doświadczeniach (1843—1863) Plateau. Mieszając odpowiednie ilości alkoholu i wody, otrzymał on roztwór o gęstości, równej gęstości oliwy. Kropla oliwy, wpuszczona do takiego roztworu, doznaje parcia, równego jej własnemu ciężarowi, wobec czego ciśnienie we wszystkich punktach jej powierzchni ma wartość jednakową. W tych warunkach kropla przybiera kształt kuli. Wprowadzając ją w zetknięciu z drutami, powyginanymi w najrozmaitszy sposób, można odkształcić powierzchnię kropli, zawsze jednak kształt jej czynić będzie zadość warunkowi (9 b).

7. ZALEŻNOŚĆ NAPIĘCIA POWIERZCHNIOWEGO OD RODZAJU STYKAJĄCYCH SIĘ ŚRODOWISK. ZJAWISKA WŁOSKOWATOŚCI

W rozpatrywanych przez nas wyżej przypadkach zakładaliśmy milcząco, że powierzchnia badanej cieczy styka się z powietrzem, a raczej z mieszaniną powietrza i pary danego ciała. Zazwyczaj w tych właśnie warunkach mierzoną wartość napięcia powierzchniowego przyjmujemy za wielkość charakterystyczną dla danej cieczy. Że wielkość ta, istotnie, ma dla różnych cieczy różną wartość, może nas przekonać następujące doświadczenie. Na powierzchnię wody rzućmy niewielką pętlę, zrobioną z cienkiej nici.



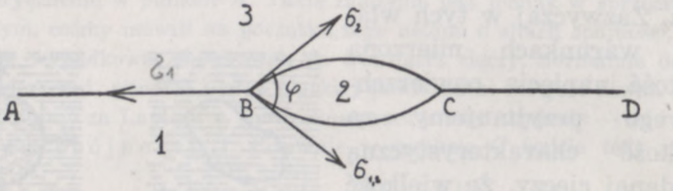
rys. 157

Pętli tej na ogół możemy nadać kształt dowolny (rys. 157 a), na każdy bowiem element długości jej obwodu działać będą z wewnątrz i z zewnątrz siły napięcia równe i przeciwnie skierowane. Gdy jednak wpuścimy ostrożnie do jej środka kroplę eteru siarczanego, pętla przybierze kształt koła; napięcie powierzchniowe czystej wody, większe od napięcia powierzchniowego eteru, rozciągać będzie pętlę równomiernie we wszystkie strony dopóty, dopóki napięcie nici nie zrównoważy tej nadwyżki.

Podobnie w przytoczonym wyżej (ust. 6) doświadczeniu z areometrem wpuszczenie kilku kropel eteru siarczanego na powierzchnię wody, ponad zanurzonym areometrem, zmniejszy opór, stawiany przez napięcie powierzchniowe i pozwoli areometrowi wznieść się ponad powierzchnię cieczy.

W tym prostym przypadku, gdy obwód nici rozdziela powierzchnię cieczy na dwa niestykające się ze sobą obszary, możemy przyjąć, że wypadkowa napięć wynosi $\sigma_1 - \sigma_2$, gdzie σ_1 oznacza napięcie powierzchniowe wody na powierzchni, stykającej się z powietrzem, σ_2 — analogiczne napięcie powierzchniowe eteru. Jeżeli jednak ciecze stykają się ze sobą bezpośrednio, zjawisko staje się bardziej złożone, na powierzchniach bowiem zetknięcia cieczy napięcie powierzchniowe nie jest bynajmniej równe różnicy napięć, które ciecze posiadają w zetknięciu z powietrzem.

Niech *BC* będzie kroplą cieczy 2 (rys. 158), opuszczoną na powierzchnię *AD* cieczy 1; środowiskiem 3 niech będzie powie-



rys. 158

trze. Na każdy element długości obwodu kropli *BC* działają siły napięć powierzchniowych σ_1, σ_2 i $\sigma_{1,2}$. Równowaga kropli wymaga, aby trzy te siły wzajemnie się równoważyły lub, innymi słowy, aby każda z nich była równa wypadkowej dwu innych. Musi być zatem

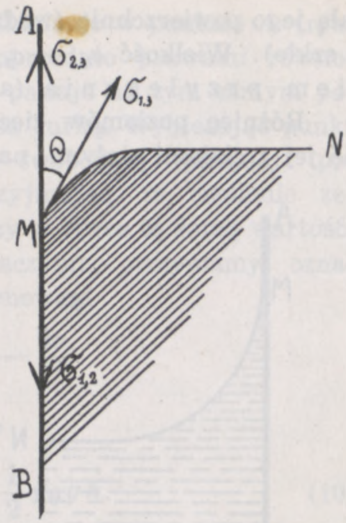
$$\sigma_1 < \sigma_2 + \sigma_{1,2}$$

lub w przypadku, gdy kąt φ jest bardzo mały,

$$\sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_{1,2}.$$

Gdy σ_1 jest większa od $\sigma_2 + \sigma_{1,2}$, kropla rozpływa się po powierzchni cieczy, (oliwa na wodzie, woda na czystej rtęci).

Zmianą napięcia powierzchniowego przy zmianie środowiska, z którym dana powierzchnia graniczy, można również wyjaśnić zjawiska, zachodzące przy zetknięciu się cieczy z ciałem stałym. Niech *AB* (rys. 159) będzie powierzchnią ciała stałego, *MN* — przekrojem powierzchni cieczy. Na każdy element długości krzywej, wzdłuż której powierzchnia *MN* styka się z ciałem stałym, działają prostopadle do tego elementu siły napięcia powierzchniowego $\sigma_{1,3}$, równego napięciu, które poprzednio oznaczaliśmy przez σ_1, oraz napięcie $\sigma_{1,2}$ cieczy na powierzchni zetknięcia z ciałem stałym. Z a k ł a d a m y, że prócz tych dwu napięć działa jeszcze trzecie $\sigma_{2,3}$ na powierzchni zetknięcia się ciała stałego z powietrzem.



rys. 159

To założenie usprawiedliwione jest przez fakt, że również i kryształy przybierają postać, odpowiadającą możliwie najmniejszej wartości energii powierzchniowej, której miarą jest iloczyn z napięcia powierzchniowego i powierzchni (P. Curie, 1885 r., Wulff 1901 r.). Do wniosku o istnieniu napięcia powierzchniowego ciał stałych prowadzą również współczesne teorie budowy materii (Born i Stern 1919 r.).

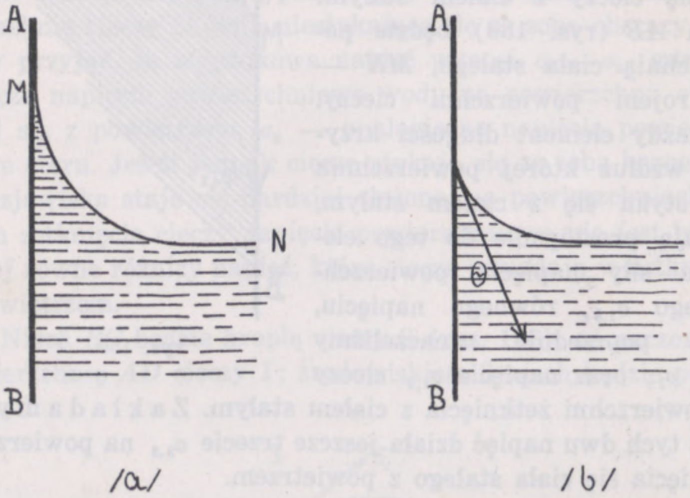
Oznaczmy przez Θ kąt, jaki powierzchnia cieczy *MN* tworzy z powierzchnią ciała stałego; jest to tzw. k ą t z e t k n i ę c i a. Warunek równowagi wyraża się wzorem

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{2,3} + \sigma_{1,3} \cos\Theta \quad \text{i} \quad \cos\Theta = \frac{\sigma_{1,2} - \sigma_{2,3}}{\sigma_{1,3}}.$$

Gdy $\sigma_{2,3} < \sigma_{1,2}$, cos Θ jest większy od zera, kąt zetknięcia jest kątem ostrym (rtęć — szkło). Gdy $\sigma_{2,3} > \sigma_{1,2}$, $\cos\Theta < 0$, kąt zetknięcia jest kątem rozwartym (woda, niezupełnie czysta powierzchnia szkła), ciecz z w i l ż a ciało stałe (rys. 160 b); gdy $\sigma_{1,2} - \sigma_{2,3} > \sigma_{1,3}$, kąta zetknięcia nie ma; ciecz c a ł k o w i c i e z w i l ż a ciało stałe (rys. 160 a), pokrywając cienką warstewką

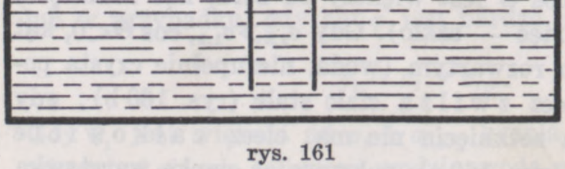
całą jego powierzchnię (woda i czysta powierzchnia szkła, nafta i szkło). Wielkość $\sigma_{1,2} - \sigma_{2,3}$ często nazywana jest **n a p i e c i e m p r z y l e g a n i a** (adhezji).

Różnicę poziomów cieczy, spowodowaną przez zetknięcie się jej z ciałami stałymi, najlepiej można zaobserwować, zanu-



rys. 160

rzając pionowo do szerokiego naczynia z cieczą rurkę cylindryczną, o małym promieniu wewnętrznym r (**r u r k a w ł o s k o w a t a**). Gdy ciecz całkowicie lub częściowo zwilża rurkę, swobodna jej powierzchnia leży ponad poziomem cieczy w pozostałej części naczynia. Używając rurek bardzo wąskich i cieczy całkowicie zwilżających, możemy przyjąć, że utworzony w rurce wklęsłej menisk (łac. menis — mały księżyc) ma kształt półkuli o promie-



rys. 161

niu r, równym promieniowi rurki. Ciśnienie w punkcie A (rys. 161) jest, zgodnie z ustalonymi poprzednio prawami równowagi cieczy, równe ciśnieniu, jakie panuje na tym samym poziomie w cieczy, znajdującej się poza rurką. Wybierając punkt A tak, aby leżał on na poziomie swobodnej (płaskiej) powierzchni cieczy w naczyniu, i przyjmując, że ciśnienie zewnętrzne ma nad powierzchnią cieczy w rurce tę samą wartość, co i nad powierzchnią cieczy w naczyniu, otrzymamy, oznaczając $\sigma_{1,3}$ przez σ, na warunek równowagi

$$p_0 = p_0 + \varrho gh - \frac{2\sigma}{r}$$

lub

$$\varrho gh = \frac{2\sigma}{r},$$

skąd

$$h = \frac{2\sigma}{\varrho g r} \quad \text{i} \quad \sigma = \frac{1}{2} r \varrho g h. \tag{10}$$

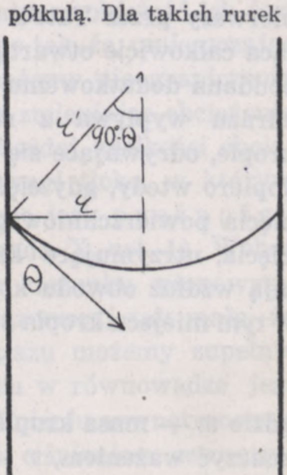
Wielkość $\frac{2\sigma}{\varrho g} = a^2$ jest często nazywana **s t a ł ą w ł o s k o w a t o ś c i.**

Biorąc za h odległość najniżej leżącego punktu meniska B, pomijamy ciężar cieczy, zawartej między meniskiem i rurką. Ciężar ten, równy $\frac{1}{3} \pi r^3 \rho g$, możemy w przypadku rurek bardzo wąskich uważać za mały w porównaniu z ciężarem słupa cieczy $\pi r^2 . h . \rho g$. W rurkach szerszych ciężar ten jednak należy uwzględniać, jak również należy uwzględnić, że menisk nie jest wtedy półkulą. Dla takich rurek Poisson wyprowadził (1831 r.) wzór następujący

$$\sigma = \frac{g \varrho r}{2}\left(h + \frac{r}{3} - 0{,}1288 \frac{r^2}{h}\right). \tag{10a}$$

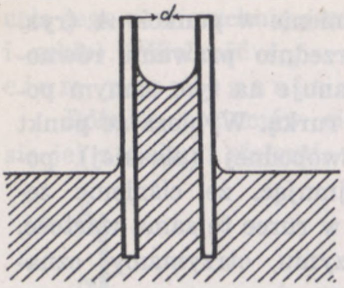
Gdy ciecz niecałkowicie zwilża rurkę (rys. 162), promień krzywizny meniska $r' = \frac{r}{\cos \Theta}$. Zamiast wzoru (10) mamy zatem

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{g \varrho h r}{\cos \Theta}. \tag{10b}$$



rys. 162

Ciecz niezwilżająca opada w rurce włoskowatej poniżej poziomu cieczy w naczyniu. Różnica poziomów h i w tym



rys. 163

jednak przypadku wyraża się wzorem (10 b), jak to można bez trudu sprawdzić, posiłkując się analogicznym rozumowaniem.

W podobny sposób możemy wyjaśnić zjawisko podnoszenia się (lub opadania) poziomu cieczy między dwiema bardzo bliskimi równoległymi płytkami (rys. 163). Przecinając powierzchnię cieczy między płytkami dwiema prostopadłymi płaszczyznami, z których jedna jest prostopadła, druga zaś równoległa do płytek znajdziemy na wartość promieni krzywizny we wzorze (9) w przypadku cieczy całkowicie zwilżającej: $r_1 = \frac{d}{2}$, gdzie d — odległość między płytkami, $r_2 = \infty$, skąd

$$\varrho g h = \frac{2\sigma}{d} \quad \text{i} \quad \sigma = \frac{1}{2} \varrho g d h. \qquad (10c)$$

Wzór (10) daje możność wyznaczenia w łatwy stosunkowo sposób napięcia powierzchniowego, jest też najczęściej używaną metodą pomiaru tej wielkości, szczególniej, gdy chodzi o ciecze, całkowicie zwilżające dane ciało stałe. Z innych metod wymienimy jeszcze metodę, użytą po raz pierwszy przez Tate'a (1864 r.). Ciecz, wypełniająca całkowicie otwartą na dole rurkę włoskowatą, poddana dodatkowemu niewielkiemu ciśnieniu, nie odrazu wypływa z rurki, lecz tworzy wiszące krople, odrywające się od rurki i spadające na dół dopiero wtedy, gdy ciężar ich zrównoważy siły napięcia powierzchniowego. Tate założył, że siły napięcia, utrzymujące krople w równowadze, działają wzdłuż obwodu koła, wzdłuż którego zwężona w tym miejscu kropla styka się z rurką. W chwili zatem spadania



rys. 164

$$mg = 2\pi r \cdot \sigma, \qquad (11)$$

gdzie m — masa kropli, którą po oderwaniu się jej możemy wyznaczyć ważeniem, r — w przypadku rurki o takim kształcie, jak na rys. 164, promień jej dolnego otworu.

W rzeczywistości założenie, że cała wisząca kropla odrywa się i spada, nie jest dostatecznie uzasadnione. Lohnstein (1906 r.) udowodnił jednak, że przy odpowiednio dobranym do rodzaju cieczy promieniu rurki włoskowatej założenie to nie prowadzi do znaczniejszych błędów, szczególniej, gdy idzie o pomiary względne.

Przytoczymy tytułem przykładu dane, otrzymane przez Duclaux (1872 r.). Z kroplomierza o pojemności 5 cm^3 wypływa 100 kropel wody, 145 kropel 10% alkoholu i 259 — 100% alkoholu.

Quincke (1868 r.) posługiwał się metodą Tate'a dla wyznaczenia napięcia powierzchniowego metali. Dolny koniec pionowego pręta metalowego, o średnicy, nie przekraczającej 3 mm, był ogrzewany wąskim płomieniem, dopóki nie oderwała się od niego kropla. Podstawiając wartość jej masy do wzoru (11), można wyznaczyć σ.

Dane otrzymane przy użyciu różnych metod, nie są na ogół zgodne, różniąc się nieraz, jak np. gdy idzie o wodę, o 9%. Wartości σ, które tu podajemy dla paru ważniejszych cieczy, należy przeto uważać za wartości przeciętne. Dla wody σ około 73 dyn/cm, dla rtęci około 470 dyn/cm, dla alkoholu około 22 dyn/cm, dla eteru około 19 dyn/cm. Ze wzrostem temperatury σ maleje.

8. ŚCIŚLIWOŚĆ GAZÓW

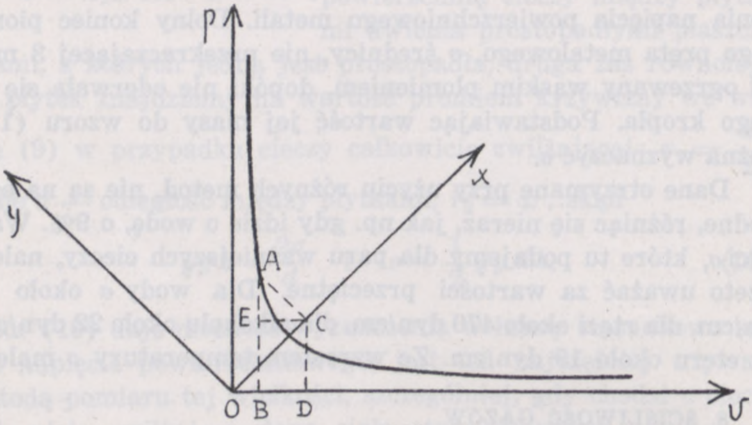
W przeciwstawieniu do cieczy ciała gazowe nie posiadają powierzchni swobodnej. W stałej temperaturze objętość ich jest zależna całkowicie od ciśnienia zewnętrznego tak, że, umieszczając gaz w naczyniu, zaopatrzonym w tłok, możemy nieograniczenie prawie zmieniać objętość gazu odpowiednio zmieniając obciążenie tłoka. Jeżeli tłok porusza się bez tarcia, każdej wielkości obciążenia odpowiada pewne położenie równowagi tłoka, w którym ciśnienie, jakie tłok wywiera na gaz, równe jest p r ę ż n o ś c i, jaką gaz przeciwdziała opadaniu tłoka (rozdz. X, ust. 1). Wobec małej gęstości gazu wzrost prężności w kierunku pionowym, spowodowany przez siłę ciężkości, jest zazwyczaj tak mały, że w przypadku niezbyt grubych warstw gazu możemy zupełnie go pominąć i uważać, że prężność gazu w równowadze jest w całej jego masie jednakowa i równa ciśnieniu zewnętrznemu.

Zależność pomiędzy prężnością (lub ciśnieniem zewnętrznym) i objętością danej masy gazu, znajdującego się stale w tej

samej temperaturze, ustalili niezależnie, jak się zdaje, jeden od drugiego, Boyle (1662 r.) i Mariotte (1679 r.), stwierdzając, że w stałej temperaturze iloczyn prężności danej masy gazu przez jej objętość jest wielkością stałą. Oznaczając przez p prężność gazu, przez v — jego objętość, prawo Boyle'a-Mariotte'a możemy wyrazić wzorem

$$pv = \text{stałej} \tag{12}$$

Odkładajmy na osi rzędnych ciśnienia, wywierane przez tłok w różnych jego położeniach równowagi (lub równe tym ci-



rys. 165

śnieniom prężności gazu), na osi odciętych — odpowiednie objętości. Krzywa (rys. 165), wyrażająca zależność między p i v w stałej temperaturze, tzw. izoterma gazu (gr. izos — równy, thermos — ciepły), przy wzrastających wartościach p i v nieograniczenie zbliża się do odpowiednich osi, lecz przecina je dopiero w nieskończoności, wartości bowiem $v = 0$ odpowiada według równania (12) $p = \infty$, wartości zaś $p = 0$, $v = \infty$.

Krzywa ta jest hiperbolą równoboczną, osi zaś p i v jej asymptotami. Obróćmy osi spółrzędnych dookoła osi, prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez początek układu, o kąt 45°; związek między spółrzędnymi p i v punktu A i nowymi jego współrzędnymi x i y wyraża się, jak wiadomo, wzorem

$$p = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}; \quad v = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}, \text{ skąd}$$

$$pv = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = \text{stałej} = C.$$

Oznaczając $\sqrt{2C}$ przez a, otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Z prawa Boyle'a-Mariotte'a wynika, że gdy ciśnienie zewnętrzne zwiększy się o Δp, objętość $v - \Delta v$ gazu, jaką gaz zajmie pod tym nowym ciśnieniem, czyni zadość równaniu

$$(p + \Delta p)\,(v - \Delta v) = pv,$$

skąd, po odrzuceniu iloczynu $\Delta p \,.\, \Delta v$, jako wielkości bardzo małej w porównaniu z innymi, otrzymamy

$$v \Delta p - p \Delta v = 0$$

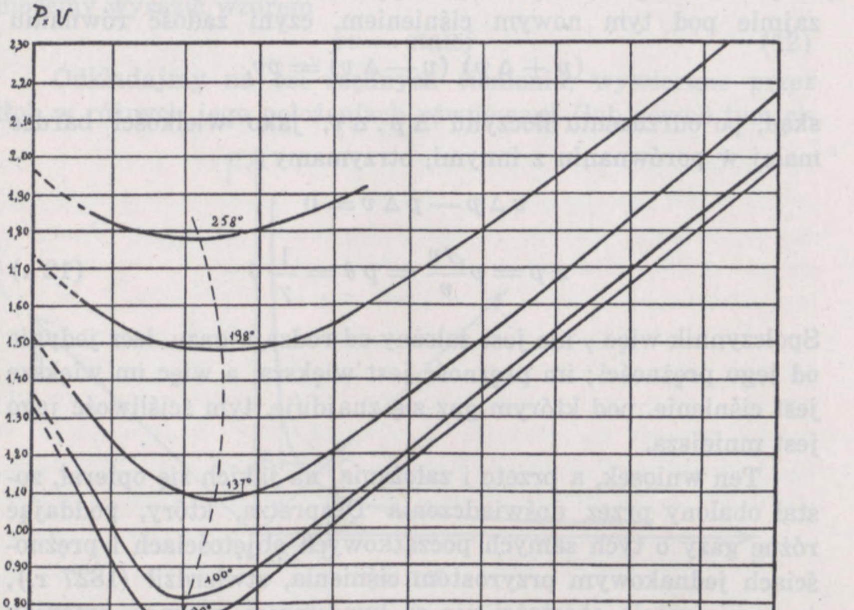
$$\Delta p = p \frac{\Delta v}{v} = p\,\theta = \frac{1}{\gamma}\,\theta \qquad (12\,a)$$

Spółczynnik więc γ nie jest zależny od rodzaju gazu, lecz jedynie od jego prężności; im prężność jest większa, a więc im większe jest ciśnienie, pod którym gaz się znajduje, tym ściśliwość jego jest mniejsza.

Ten wniosek, a przeto i założenia, na jakich się opierał, został obalony przez doświadczenia Despretza, który, poddając różne gazy o tych samych początkowych objętościach i prężnościach jednakowym przyrostom ciśnienia, stwierdził (1827 r.), że zmniejszenia objętości nie są bynajmniej równe: amoniak i siarkowodór zmniejszały swą objętość bardziej, niż wodór i powietrze. Wyniki doświadczeń Despretza zostały następnie potwierdzone przez Regnaulta (1847 r.). Okazało się, że dla tego samego gazu iloczyn pv w miarę wzrostu ciśnienia zewnętrznego nie zachowuje wartości stałej, i że zmiany tej wartości są dla różnych gazów na ogół różne. Tak np. dla zmniejszenia objętości do $\frac{1}{8}$ wartości początkowej należało ciśnienie zwiększyć nie 8 razy, jakby to wynikało z prawa Boyle'a-Mariotte'a, lecz w przypadku, gdy badany gaz był powietrzem, 7,9456, gdy był azotem — 7,9641, dwutlenkiem węgla — 7,5193, wodorem — 8,0339.

Na podstawie tych badań, jak i późniejszych, wykonanych przez Natterera (1854 r.), Cailleteta (1870 r.), a zwłaszcza Amagata (od 1878 r.), którzy poddawali gaz bardzo wielkim ci-

śnieniom, można z całą pewnością twierdzić, że prawo Boyle'a-Mariotte'a nie wyraża istotnych własności gazów. Odkładając na osi odciętych ciśnienia, na osi rzędnych iloczyny *pv*, odpowiadające tym ciśnieniom, nie otrzymamy linii prostej, równoległej do osi *p*, jakby to było w przypadku stałości iloczynu *pv*, lecz



rys. 166 (według Amagata dla CO_2)

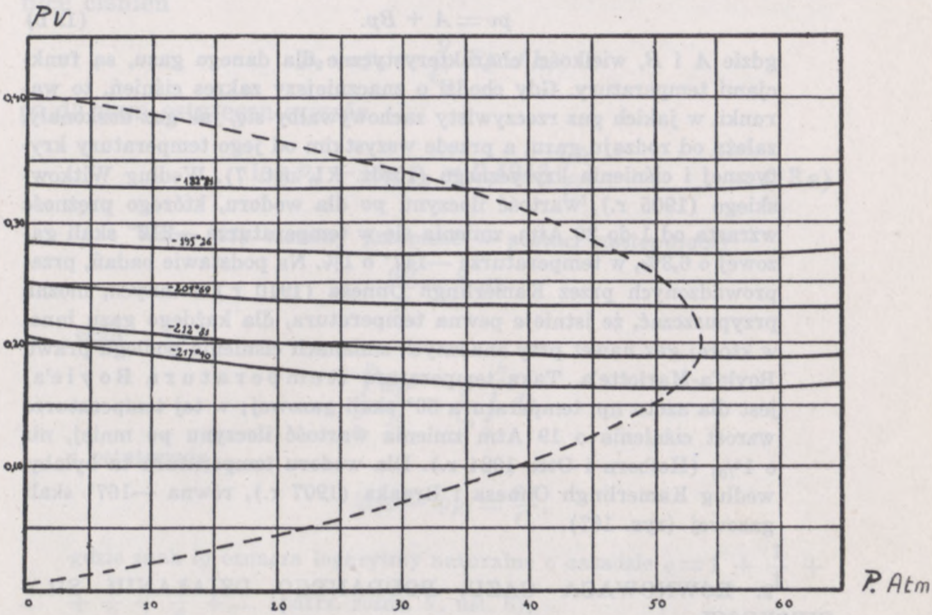
linię krzywą (rys. 166), której przebieg wskazuje, że *pv* początkowo ze wzrostem ciśnienia maleje, przechodzi przez minimum i następnie nieograniczenie wzrasta. Ciśnienie p_m, pod którym *pv* ma wartość najmniejszą, jest w tej samej temperaturze dla różnych gazów różne, dla tego zaś samego gazu zmienia się w zależności od temperatury.

Tak np. dla powietrza p_m, według Witkowskiego (1891 r.) posiada wartości następujące

$t =$	16°	0°	−35°	−78,5°	−103,5°	−130°
$p_m =$	79 Atm	95 Atm	115 Atm	123 Atm	106 Atm	66 Atm

Dla niektórych gazów, np. dla wodoru w temperaturach pokojowych, iloczyn *pv* nie posiada wcale minimum, tak że krzywa *pv* wodoru

leży stale powyżej prostej, wyrażającej prawo Boyle'a-Mariotte'a. Dopiero w temperaturach niższych krzywa ta, jak to pierwszy wykazał Wróblewski, ma i dla wodoru ten sam kształt, co i dla innych gazów (rys. 167). Wyznaczając iloczyny tej samej masy gazu w różnych temperaturach i łącząc punkty, odpowiadające na każdej izotermie najmniejszej wartości *pv*, otrzymamy tzw. k r z y w ą B o y l e'a



rys. 167 (według Kamerlingh Onnesa i Braaka dla wodoru)

(rys. 166 i 167), kształtem zbliżoną do paraboli. W punktach tych, nazywanych p u n k t a m i B o y l e'a, styczna do krzywej jest równoległa do osi *p*, $\frac{d(pv)}{dp}$ jest więc równa zeru. W pobliżu tego punktu iloczyn *pv* przy niewielkich zmianach ciśnienia zachowuje zatem wartość stałą, różną jednak od wartości, jaką ma pod ciśnieniem mało różniącym się od zera.

Jeżeli jednak badany gaz znajduje się w wysokiej temperaturze i pod niewielkim ciśnieniem, możemy zawsze bez dostrzegalnego błędu założyć, że podlega on prawu Boyle'a-Mariotte'a. Gaz rzeczywisty zbliża się w tych warunkach do gazu doskonałego, będącego, jak o tym była już wyżej mowa (ust. 3), dla gazów pojęciem analogicznym do tego, jakim jest bryła sztywna dla ciał stałych i ciecz doskonała dla ciał ciekłych.

Wartość zatem iloczynu pv dla gazu doskonałego w danej temperaturze będzie równa wartości tegoż iloczynu dla gazu rzeczywistego pod bardzo małym ciśnieniem. Wartość tę możemy wyznaczyć, przyjmując, że dla niewielkich ciśnień od 0 do 2 Atm (Berthelot 1903 r.) krzywa ta dla wszystkich gazów mało różni się, jak to widać na wykresie, od prostej, tak, że

$$pv = A + Bp. \tag{12 b}$$

gdzie A i B, wielkości charakterystyczne dla danego gazu, są funkcjami temperatury. Gdy chodzi o znaczniejszy zakres ciśnień, to warunki, w jakich gaz rzeczywisty zachowywałby się, jak gaz doskonały, zależą od rodzaju gazu, a przede wszystkim od jego temperatury krytycznej i ciśnienia krytycznego (rozdz. XI, ust. 7). Według Witkowskiego (1905 r.), wartość iloczynu pv dla wodoru, którego prężność wzrasta od 1 do 20 Atm, zmienia się w temperaturze —212° skali gazowej o 6,3%, w temperaturze —147° o 1%. Na podstawie badań, przeprowadzonych przez Kamerlingh Onnesa (1910 r.) i innych, można przypuszczać, że istnieje pewna temperatura, dla każdego gazu inna, w której gaz nawet przy znacznych zmianach ciśnienia podlega prawu Boyle'a-Mariotte'a. Taką temperaturą (t e m p e r a t u r ą B o y l e'a) jest dla azotu np. temperatura 50° skali gazowej; w tej temperaturze wzrost ciśnienia o 19 Atm zmienia wartość iloczynu pv mniej, niż o 1‰ (Holborn i Otto 1924 r.). Dla wodoru temperatura ta byłaby, według Kamerlingh Onnesa i Braaka (1907 r.), równa —167° skali gazowej (rys. 167).

9. RÓWNOWAGA GAZU, PODDANEGO DZIAŁANIU SIŁY CIĘŻKOŚCI

Gdy mamy do czynienia z wielkimi masami gazu, tworzącymi grubą warstwę, musimy uwzględnić również i działanie siły ciężkości. Warunki równowagi takiej masy wyznacza wzór (3) ust. 2

$$p_2 - p_1 = g \Sigma \varrho \Delta h,$$

gdzie p_1 i p_2 prężności gazu w dwu punktach, których odległość pionowa równa jest h, ϱ — gęstość gazu. Jest rzeczą oczywistą, że wobec wielkiej ściśliwości gazów nie możemy nawet w przybliżeniu zakładać, że gęstość gazu jest na wszystkich poziomach jednakowa. Przypuśćmy, że badany gaz o stałej temperaturze jest gazem doskonałym. Ze wzoru Boyle'a-Mariotte'a wynika bezpośrednio, że gęstość takiego gazu jest wprost proporcjonalna do jego prężności $\varrho = \frac{p}{C_1}$, gdzie $C_1 = \frac{C}{m}$, m — masa gazu. Róż-

nica więc ciśnień na dwu bardzo bliskich siebie poziomach, odległych o Δh, wyniesie

$$\Delta p = \frac{gp}{C_1} \Delta h, \tag{13}$$

stąd różnicę $p_2 - p_1$ otrzymujemy, sumując te elementarne różnice ciśnień

$$p_2 - p_1 = \frac{g}{C_1} \Sigma p \Delta h,$$

co da nam ostatecznie wzór

$$\log p_2 - \log p_1 = 0{,}4343 \frac{gh}{C_1}. \tag{13a}$$

Wzór (13) możemy przepisać w postaci następującej

$$\frac{dp}{p} = \frac{g}{C_1} dh$$

skąd

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \frac{g}{C_1} \int_0^h dh$$

i ostatecznie

$$lgp_2 - lgp_1 = \frac{gh}{C_1},$$

gdzie znak lg oznacza logarytmy naturalne o zasadzie $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots$ (patrz. rozdz. V, ust. 6),

$$p_2 = p_1 e^{\frac{gh}{C_1}},$$

biorąc logarytmy o zasadzie 10, otrzymujemy wzór (13 a)

$$\log p_2 - \log p_1 = \frac{gh}{C_1} \log e = 0{,}4343 \frac{gh}{C_1}.$$

Wartość stałej C_1 zależy od rodzaju i od temperatury gazu. Znając ją, moglibyśmy z różnicy ciśnień, panujących na dwu różnych poziomach warstwy gazowej o stałej temperaturze, wyznaczyć grubość tej warstwy, z wartości zatem ciśnienia, wywieranego przez powietrze atmosferyczne na poziomie morza, obliczyć, po wprowadzeniu poprawki na zmianę g ze wzrostem wysokości, wysokość otaczającej ziemię warstwy powietrza (p_1 byłoby wtedy równe zeru). Rachunek taki dałby jednak całkowicie fałszywe wyniki: ani bowiem temperatura atmosfery ziemskiej, ani jej skład chemiczny nie są bynajmniej we wszystkich war-

stwach atmosfery jednakowe. Zazwyczaj przeto wzór (13 a) znajduje swe zastosowanie tylko przy obliczaniu różnicy ciśnień w punktach, których odległość pionowa jest dostatecznie mała, abyśmy mogli przyjąć, że temperatura poszczególnych warstw powietrza między dwoma danymi poziomami nie odbiega znacznie od pewnej wartości przeciętnej.

Uwzględniając zależność C_1 od temperatury, otrzymamy po podstawieniu odpowiednich liczb tzw. wzór barometryczny

$$h = 18400\ (1 + 0{,}00366\ t\ )\ (\log B - \log b) \tag{13b}$$

gdzie t_p jest temperaturą przeciętną warstwy w stopniach skali gazowej, B — ciśnienie w niżej położonym punkcie. B i b mogą być mierzone w jednostkach dowolnych, byle jednakowych. W wielu przypadkach wystarcza wzór uproszczony

$$h = 16010\ (1 + 0{,}004\,t_p)\ \frac{B - b}{B + b}. \tag{13c}$$

B a r o m e t r y c z n y m s t o p n i e m w y s o k o ś c i nazywamy wysokość, na jaką należało by się podnieść, aby ciśnienie zmniejszyło się o 1 mm rtęci. Podstawiając do wzoru (13 c) $B - b = 1$ mm i kładąc $B + b = 2B$, oraz $B = 760$ mm rt. otrzymujemy w temperaturze $t = 0°$ na h wartość około 10,6 m.

Za granicę atmosfery ziemskiej moglibyśmy uważać odległość, w której siła odśrodkowa równoważy siłę ciężkości; gaz, znajdujący się poniżej tej granicy, uczestniczyłby w ruchu obrotowym ziemi. W tej odległości jednak (42000 km w płaszczyźnie równika) rozrzedzenie gazu jest tak wielkie, że stwierdzenie jego obecności byłoby, jak się zdaje, rzeczą niemożliwą. Należy raczej przyjąć, że żadna wyraźna granica atmosfery nie istnieje i że łączy się ona stopniowo z niezwykle rozrzedzonymi gazami, wypełniającymi przestrzeń międzyplanetarną. Te jej warstwy, w których zachodzą zjawiska (np. zorza północna), które możemy jeszcze obserwować, leżą prawdopodobnie nie wyżej ponad 600 km.

Zakładając, że gęstość atmosfery jest stała i równa w temperaturze 0° — 0,001293 g/cm³, możemy ze wzoru (5) ust. 4, kładąc $p_h = 760$ mm. rtęci i $p_0 = 0$ i przyjmując, że g ma wartość stałą, obliczyć wysokość tzw. j e d n o r o d n e j a t m o s f e r y, którаby wywierała takie samo ciśnienie, jak rzeczywista; wysokość ta wynosi mniej więcej 8000 m; stąd wynika, że masa atmosfery ziemskiej równa jest w przybliżeniu $5{,}2 \cdot 10^{21}$ g , a więc jest mniejsza od jednej milionowej masy ziemi.

ROZDZIAŁ VII

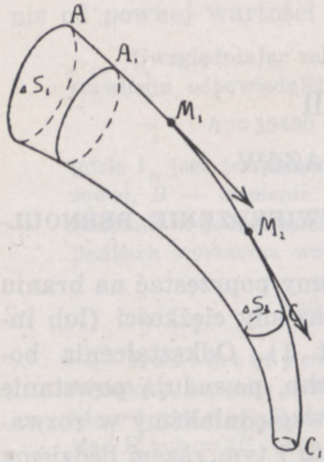
RUCH CIECZY I GAZÓW

1. RUCH CIECZY DOSKONAŁEJ. TWIERDZENIE BERNOULLI'EGO.

Rozpatrując ruch płynów nie możemy poprzestać na braniu pod uwagę jedynie różnic ciśnienia oraz siły ciężkości (lub innych sił analogicznych, rozdz. VI, ust. 1). Odkształcenia bowiem, jakich doznaje płyn podczas ruchu, powodują powstanie sił tarcia wewnętrznego, których nie uwzględnialiśmy w rozważaniach rozdziału poprzedniego. Mimo to i tym razem będziemy początkowo zakładali, że płyny, z którymi mamy do czynienia, są całkowicie pozbawione lepkości, i dopiero następnie do wzorów, otrzymanych dla tych, niewątpliwie w znacznym stopniu fikcyjnych przypadków, wprowadzimy odpowiednie poprawki, jakich będą wymagały rzeczywiste własności płynów. Co więcej, założymy, że płyn badany jest również nieściśliwy, że więc jest tym ciałem, które poprzednio nazwaliśmy cieczą doskonałą. Ostatnie założenie znajduje swoje usprawiedliwienie w fakcie, że zmiany gęstości, jakich podczas ruchu doznaje płyn, nawet, gdy jest ciałem gazowym, są w wielu przypadkach tak małe, że możemy je w pierwszym przybliżeniu całkowicie pominąć.

Przypuśćmy, że prędkość, z jaką cząstka poruszającej się cieczy przechodzi przez dany punkt przestrzeni, zależna jest jedynie od położenia tego punktu, tak, że każdą cząstka, przechodząca przez ten punkt, posiada w tym punkcie prędkość tę samą. Niech krzywa M_1 M_2 M_n (rys. 168) będzie torem dowolnej cząstki M; cząstki cieczy, leżące w pewnej chwili na torze tej cząstki, będą poruszały się stale po tym samym torze, co M, w każdym bowiem punkcie tej krzywej będą miały tę samą pręd-

kość, jaką w tym punkcie posiadała cząstka M. Tego rodzaju ruch cieczy nazywamy *trwałym* (*statecznym*), tor zaś cząstki — *linią prądu*. Weźmy w przestrzeni, wypełnionej przez ciecz, bardzo mały element powierzchni ΔS i przeprowadźmy przez wszystkie punkty jego obwodu linie prądu; otrzymamy wtedy pewną powierzchnię, odgraniczającą od reszty cieczy tzw. *strugę prądu*, wewnątrz której ciecz płynąć będzie tak, jak przez rurkę o ścianach, nieprzenikliwych dla cieczy. Przez każdy przekrój strugi przepływa zatem w ciągu tego samego czasu ta sama masa cieczy. Gdyby bowiem było inaczej, gdyby np. masa cieczy, wpływająca do elementu strugi AC (rys. 168) przez przekrój ΔS_1 prostopadły do osi strugi i równa $\varrho_1 v_1 \Delta S_1 . \Delta t$, gdzie v_1 — prędkość cieczy w tym przekroju, nie była równa masie, wypływającej przez przekrój ΔS_2 i równej $\varrho_2 v_2 \, \Delta S_2 . \Delta t$, masa w elemencie strugi AC z biegiem czasu nieograniczenie by wzrastała lub malała i ruch cieczy nie mógłby być trwały. Musimy zatem mieć



rys. 168

$$\varrho_1 v_1 \Delta S_1 = \varrho_2 v_2 . \Delta S_2. \quad (1)$$

Z tego warunku *ciągłości* wynika, że wewnątrz cieczy, znajdującej się w ruchu trwałym, struga nie może się ani kończyć ani zaczynać; musi się ona rozciągać aż do granic przestrzeni, zajmowanej przez daną ciecz albo tworzyć powierzchnię zamkniętą. W przypadku, przez nas rozpatrywanym, cieczy nieściśliwej, $\varrho_1 = \varrho_2$ i warunek (1) sprowadza się do warunku

$$v_1 \Delta S_1 = v_2 \Delta S_2 = \text{stałej}, \quad (1\,a)$$

objętość cieczy, przepływającej w ciągu jednostki czasu przez dowolny przekrój strugi, prostopadły do jej osi, jest wielkością stałą. Prędkość więc przepływu jest odwrotnie proporcjonalna do przekroju; gdy struga się zwęża, prędkość przepływu wzrasta. Podzielmy całą masę cieczy na strugi, oznaczając położenie każdej z nich przez osiową linię prądu; ze zgęszczenia lub rozrze-

dzenia linij prądu w danym miejscu przestrzeni będziemy mogli sądzić o wzroście lub zmniejszeniu się prędkości ruchu cieczy.

Przypuśćmy, że w rozpatrywanych przez nas przekrojach strugi prędkości v_1 i v_2 nie są równe, tak, że ciecz, wychodząca z elementu AC (rys. 168) posiadać będzie energię ruchu różną od tej, jaką miała, wchodząc do tego elementu. Jeżeli w ciągu Δt sek wpłynęła masa $\Delta m = \varrho v_1 \Delta S_1 \Delta t$ o prędkości v_1 i wypłynęła taka sama masa z prędkością v_2, zmiana energii ruchu, jakiej doznał słup cieczy, zawarty początkowo między przekrojami A i C, równa jest $\frac{1}{2} \Delta m\, (v_2^2 - v_1^2)$. Zmiana ta została dokonana kosztem pracy, wykonanej przez siły zewnętrzne względem elementu strugi, zawartego między tymi przekrojami. Oznaczmy przez p_1 i p_2 ciśnienie w przekrojach A i C. Z sił $p_1 \Delta S_1$ i $p_2 \Delta S_2$, prostopadłych do tych przekrojów, pierwsza działa w kierunku ruchu, druga — w kierunku przeciwnym. Wobec tego praca wypadkowa tych dwu sił wynosi

$$p_1 \Delta S_1 \,.\, v_1 \,.\, \Delta t - p_2 \Delta S_2 \,.\, v_2 \,.\, \Delta t = (p_1 - p_2) \frac{\Delta m}{\varrho}. \qquad \text{(a)}$$

Do tego dochodzi praca siły ciężkości. Niech h_1 i h_2 będą wysokościami przekrojów A i C ponad pewnym wspólnym, dowolnie zresztą wybranym poziomem. Różnica energii potencjalnej masy, wpływającej do danego elementu strugi, i wypływającej z niego, równa pracy sił ciężkości, wykonanej podczas przesunięcia się słupa cieczy od AC do A_1C_1, wynosi $\Delta m \,.\, g\, (h_1 - h_2)$ (b) energia bowiem potencjalna słupa, zawartego między A_1 i C zmianie żadnej nie uległa. Jeżeli poza tymi siłami żadne inne siły na ciecz nie działają, suma prac (a) i (b) równa jest zmianie energii ruchu, gdyż w cieczy, pozbawionej lepkości, opory rozpraszające są równe zeru. Mamy zatem dla danej strugi

$$(p_1 - p_2) \frac{\Delta m}{\varrho} + \Delta m \,.\, g\, (h_1 - h_2) = \frac{1}{2} \Delta m\, (v_2^2 - v_1^2),$$

lub, skracając przez Δm, dzieląc przez g i porządkując wyrazy

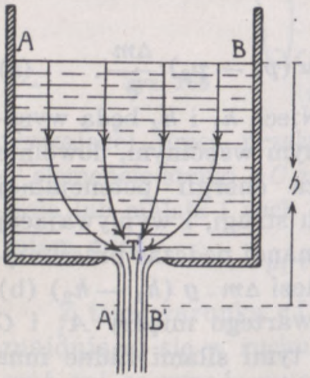
$$\frac{p_1}{\varrho g} + h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\varrho g} + h_2 + \frac{v_2^2}{2g} = \text{stałej}. \qquad (2)$$

To równanie wyraża **twierdzenie Bernoulli'ego.**

Od nazwiska matematyka Daniela Bernoulli'ego, który je udowodnił w 1738 r.

$p + h\varrho g + \varrho\frac{v^2}{2}$ = const

Wielkość $\frac{p_1}{\varrho g}$ oznacza wysokość słupa cieczy, który by wywierał ciśnienie p_1, możemy więc ją nazwać wysokością ciśnienia; wielkość $\frac{v^2}{2g}$ oznacza wysokość, z jakiej ciało musiało by spadać, aby nabyć pod działaniem siły ciężkości prędkość v, będziemy ją nazywali wysokością prędkości, wreszcie h jest wysokością ponad poziomem. Możemy więc twierdzenie Bernoulli'ego wyrazić w sposób następujący: w każdej strudze prądu cieczy doskonałej, znajdującej się w ruchu trwałym, suma wysokości ciśnienia, wysokości ponad poziomem oraz wysokości prędkości jest wielkością stałą. Wartość tej stałej jest na ogół dla każdej strugi inna, jeżeli jednak w pewnym wspólnym dla nich przekroju stała ta ma dla wszystkich strug wartość tę samą, wtedy, zgodnie ze wzorem (2), wartość tę zachowa i w każdym innym przekroju i wzór Bernoulli'ego stosować się będzie do całej masy cieczy w przekroju prostopadłym do strug prądu.



rys. 169

Taki przypadek zachodzi, między innymi, wtedy, gdy pod działaniem sił ciężkości ciecz wypływa przez otwór, znajdujący się na dnie lub z boku naczynia (rys. 169). Strugi wypływającej cieczy mają swój początek na powierzchni AB, której wzniesienie pionowe $(h_1 - h_2)$ ponad otworem wypływowym, a raczej ponad miejscem, gdzie przekrój strugi już się nie zwęża (p. niżej), oznaczymy przez h. Stosując równanie Bernoulli'ego do przekrojów AB i $A'B'$ i uwzględniając, że ciśnienia zewnętrzne w obydwu przekrojach są jednakowe i równe ciśnieniu otaczającego powietrza p_0, znajdujemy

$$h + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}. \tag{c}$$

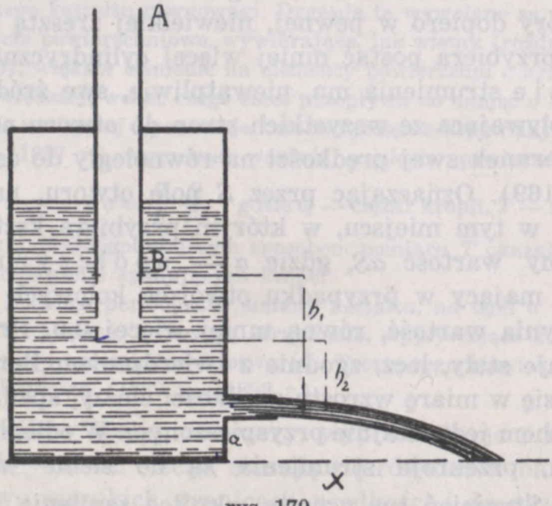
Gdy przekrój AB jest o wiele większy od przekroju $A'B'$, prędkość opadania swobodnej powierzchni jest bardzo mała w porównaniu z prędkością wypływu v_2; pomijając zatem w rachunku wielkość v_1^2 (przy stosunku przekrojów AB i $A'B'$

równym 10, v_1^2 jest 100 razy mniejsza od v_2^2), otrzymujemy ze wzoru (c)

$$v^2 = 2gh \quad \text{lub} \quad v = \sqrt{2gh}. \tag{3}$$

Ciecz więc wypływa z taką prędkością, jaką by posiadała, spadając z poziomu cieczy swobodnej. Ten wniosek z twierdzenia Bernoulli'ego często nazywany jest twierdzeniem Torricelli'ego (1644 r.).

Słuszność tego twierdzenia można sprawdzić przy pomocy tzw. butelki Mariotte'a. Jest to szczelnie zamknięte naczynie, przez którego przykrywę przechodzi otwarta z obydwu stron rurka *AB* (rys. 170). Naczynie to do pewnej wysokości wypełnione jest cieczą. Gdy ciecz wypływa, powietrze w naczyniu się rozrzedza i w pewnej chwili ciśnienie cieczy i znajdującego się nad nią powietrza staje się na poziomie dolnego otworu rurki *AB* równe ciśnieniu powietrza zewnętrznego, które wchodzi do rurki i wypełnia ją całkowicie. W miarę



rys. 170

dalszego wypływu cieczy powietrze z rurki przechodzi do naczynia, tak, że ciśnienie na poziomie *B* stale pozostaje równe ciśnieniu atmosferycznemu. We wzorze zatem (3) odległość pionowa h poziomu, na którym panuje ciśnienie atmosferyczne p_0, od otworu jest ciągle jednakowa.

Ciecz, wypływająca przez boczny otwór, porusza się w kierunku poziomym z prędkością jednostajną (o ile pominiemy opór powietrza), równą tej, jaką posiada w chwili przechodzenia przez otwór. W ciągu zatem t sek droga x przebyta w kierunku poziomym, wyniesie

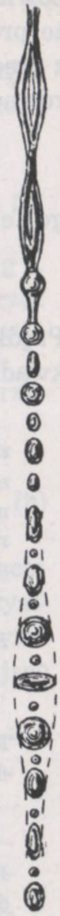
$x = vt = \sqrt{2gh} \cdot t$. Jednocześnie pod działaniem siły ciężkości cząstki cieczy poruszają się pionowo na dół ruchem jednostajnie przyspieszonym, przechodząc w ciągu czasu t sek. drogę $y = \frac{1}{2} gt^2$. Rugując z tych równań t, otrzymujemy na tor cząstki cieczy równanie paraboli $y = \frac{1}{4h} x^2$. Niech a będzie odległością otworu od poziomej powierzchni, na którą spada strumień wypływającej cieczy. Zasięg (donioosłość rzutu) strumienia jest równy $x = \sqrt{4ha} = 2\sqrt{ha}$. Jeżeli nie zmieniając odległości a, będziemy umieszczali koniec rurki B na różnych wysokościach h ponad otworem, otrzymamy zasięgi, będące do siebie w stosunku mniej więcej takim, jak pierwiastki kwadratowe z wysokości.

Strugi wypływające nie wypełniają całego przekroju otworu. W przypadku najprostszym — otworu kołowego w poziomym dnie naczynia — stwierdzić można gwałtowne zwężanie się strumienia, który dopiero w pewnej, niewielkiej zresztą od otworu odległości przybiera postać mniej więcej cylindryczną. To tzw. dławienie strumienia ma, niewątpliwie, swe źródło w tym, że ciecz, spływająca ze wszystkich stron do otworu nie od razu zmienia kierunek swej prędkości na równoległy do osi strumienia (rys. 169). Oznaczając przez S pole otworu, na przekrój strumienia w tym miejscu, w którym przybiera kształt walca, otrzymujemy wartość αS, gdzie α — spółczynnik dławienia, mający w przypadku otworów kołowych i cienkich ścian naczynia wartość, równą mniej więcej 0,6. Przekrój ten nie pozostaje stały, lecz, zgodnie z twierdzeniem Bernoulli'ego, zmniejsza się w miarę wzrostu prędkości cieczy, spadającej, jak wiemy, ruchem jednostajnie przyspieszonym. W odległości h_1 i h_2 od otworu, przekroje strumienia są do siebie w stosunku $\sqrt{h_2} : \sqrt{h_1}$. Strumień ten zresztą wkrótce zamienia się w ciąg oddzielnych kropli, który, jak to wykazał Magnus (1862 r.), tylko dzięki znacznej prędkości ruchu kropel sprawia na nas wrażenie strugi ciągłej. Jest rzeczą oczywistą, że wtedy zasadniczy warunek ciągłości spełniony nie jest i że do takiego strumienia nie można stosować twierdzenia Bernoulli'ego. Gdy ciecz wypływa przez rurę, dławienie staje się mniejsze, a nawet przy odpowiednio dobranej rurze może być zupełnie usunięte.

W cieczach niedoskonałych spółczynnik dławienia jest właściwie iloczynem dwu spółczynników: α, uwarunkowanego przez nierównoległość wypływających strug, i φ, uwarunkowanego przez tarcie wewnętrzne i zewnętrzne o ściany naczynia. Dla większych otworów wypływowych φ jest bliskie 1.

W wypływającym strumieniu Savart zauważył periodyczne zmiany kształtu, zachodzące w pewnej odległości od otworu. Kształt strumienia, wychodzącego z otworu kołowego, przedstawia schematycznie rys. 171, który podajemy tu za Magnusem. Poniżej węzłów i strzałek, jak Savart nazwał zwężenia i rozszerzenia strumienia, zachodzi rozpad strumienia na krople, których, jak o tym wyżej była mowa, na ogół rozróżnić nie możemy. Magnus obserwował je, patrząc na strumień przez wąską szczelinę, wyciętą w kierunku promienia w szybko obracającej się tarczy. Kropla, widziana przez bardzo krótki czas, wydawała się nieruchomą. Krople te zmieniają periodycznie swój kształt, drgając koło kulistego kształtu równowagi. Drgania te wywołane są przez napięcia powierzchniowe, wywierające, jak wiemy (rozdz. VI, ust. 6), większe ciśnienie na elementy powierzchni o krzywiźnie większej, wobec czego ciecz przepływa do miejsc o krzywiźnie mniejszej i powoduje tam zwiększenie krzywizny. Lenard (1887 r.) wyznaczał wartość napięcia powierzchniowego ze wzoru $\sigma = \frac{3}{8} \frac{Q}{T^2}$, gdzie Q — ciężar kropli, T — okres drgania. Najdogodniejszym sposobem pomiaru T okazało się fotografowanie spadających kropel.

Podobne periodyczne zmiany kształtu, na ogół o wiele bardziej złożone, wykazują strumienie, wypływające z eliptycznych i prostokątnych otworów. Teorię tego zjawiska dał lord Rayleigh (1879 r. i 1892 r.).



rys. 171

Mówiliśmy wyżej, że wzory, wyprowadzone z założenia nieściśliwości cieczy, stosują się również w bardzo stosunkowo szerokich granicach prędkości i do gazów. W tym jednak przypadku wzór (2) możemy uprościć, pomijając różnicę poziomów rozpatrywanych przekrojów; zmiany bowiem ciśnienia, wywołane przez niejednakowe wzniesienia ponad poziomem, są wobec małej gęstości gazów zazwyczaj nieznaczne, chyba że masy gazu rozciągają się, jak się to zdarza np. w zagadnieniach meteorologicznych, na bardzo znaczną wysokość, wtedy jednak założenie niezmiennej gęstości gazu nie sprawdza się nawet w przybliżeniu. Przypuśćmy, że gaz wypływa do otaczającego

powietrza z naczynia, w którym panuje ciśnienie p_1. Przyjmując, że prędkość ruchu gazu w naczyniu jest mała w porównaniu z prędkością wypływu i że ciśnienie w wypływającym strumieniu równe jest ciśnieniu zewnętrznemu, otrzymujemy, kładąc $h_1 = h_2$

$$\frac{p_1}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho} + \frac{v^2}{2},$$

gdzie v prędkość wypływu. Stąd

$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\varrho}}. \tag{4}$$

Prędkość wypływu jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego gęstości.

Obliczmy, z jaką największą prędkością może wypływać gaz, aby zmiany jego gęstości nie przekraczały 1%. Zakładając, co na pewno nie odpowiada rzeczywistości, że temperatura gazu podczas wypływu nie ulega zmianie i posiłkując się wobec tego prawem Boyle'a - Mariotte'a, znajdujemy ze wzoru

$$p = \frac{C}{v} = \frac{C}{m}\varrho = C_1\varrho,$$

że różnice ciśnienia, odpowiadające danej zmianie gęstości, są równe

$$\Delta p = C_1 \Delta\varrho, \quad \text{skąd} \quad \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta\varrho}{\varrho}.$$

Kładąc $\Delta\varrho = 0{,}01\,\varrho$ i $p = p_0 = 1$ Atm $= 1013{,}3 . 10^3$ dyn/cm², mamy dla powietrza w temperaturze 0°, o gęstości 0,001293 g/cm³

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\varrho}} = \sqrt{\frac{2 . 0{,}01 . 1013{,}3 . 10^3}{0{,}001293 . 1{,}01}} \doteq 4000 \text{ cm/sek} = 40 \text{ m/sek}.$$

Dopiero przy takiej różnicy ciśnień i takiej prędkości gęstość uchodzącego powietrza zmniejszyłaby się do wartości 0,001293 g/cm³. Gdybyśmy uwzględnili zachodzącą przy wypływie zmianę temperatury, otrzymalibyśmy jeszcze większą wartość prędkości granicznej i koniecznej do jej wytworzenia różnicy ciśnień.

Wzoru (4) użył Bunsen (1857 r.) do wyznaczania gęstości względnej gazów, mierząc czasy wypływu tych samych objętości różnych gazów, znajdujących się pod tym samym ciśnieniem początkowym. Ze wzoru (4) wynika

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}.$$

Ta metoda pomiaru, łatwa w użyciu, nie może jednak służyć do pomiarów precyzyjnych.

2. RUCH CIECZY W RURACH POZIOMYCH O DOWOLNYM PRZEKROJU

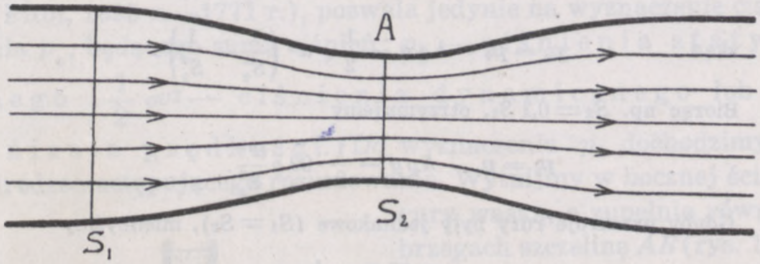
Zastosujmy wzór Bernoulli'ego do dwu przekrojów strumienia, płynącego przez poziomą rurę. Przyjmując $h_1 = h_2$, otrzymamy, mnożąc obiedwie części równania przez ϱg

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2. \qquad \text{(a)}$$

Niech w oznacza tzw. w y d a t e k p r z e w o d u r u r o w e g o, to znaczy objętość cieczy, przepływającej w ciągu 1 sek przez dowolny przekrój rury; prędkości v_1 i v_2 będą odpowiednio równe $\frac{w}{S_1}$ i $\frac{w}{S_2}$, gdzie S_1 i S_2 oznaczają pola przekrojów. Wzór (a) przybierze postać

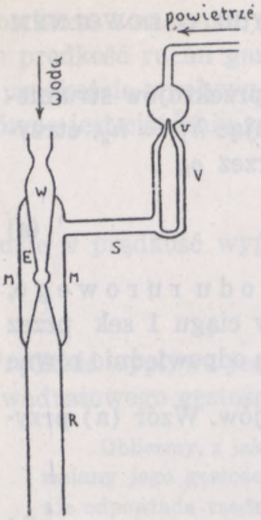
$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho\frac{w^2}{S_1^2} = p_2 + \frac{1}{2}\varrho\frac{w^2}{S_2^2}. \qquad \text{(b)}$$

Gdy $S_1 = S_2$, $p_1 = p_2$. W cieczy doskonałej, przepływającej przez rurę poziomą o przekroju stałym, ciśnienie ma we wszystkich punktach, leżących na tym samym poziomie, tę samą wartość. Jeżeli jednak S_2 jest mniejsze od S_1 (rys. 172), w miejscu



rys. 172

zwężenia następuje zagęszczenie linij prądu, prędkość v_2 jest większa od v_1 i p_2 mniejsze od p_1. W przypadku zatem, gdy ciśnienie p_1 równe jest ciśnieniu atmosferycznemu, p_2 jest od tego ciśnienia mniejsze. Gdybyśmy zatem wycięli w rurze około punktu A otwór, ciecz nie wypływałaby na zewnątrz, lecz przeciwnie wsysałaby powietrze otaczające. Tym zjawiskiem, nazywanym często z j a w i s k i e m V e n t u r i'e g o, tłumaczy się działanie p o m p w o d n y c h, służących do rozrzedzania gazów.



rys. 173

Pompa wodna najczęściej ma kształt taki, jak na rys. 173. Woda ze zbiornika wpływa do rury pionowej W, silnie zwężonej przy E, a następnie znów się rozszerzającej w cylindryczną rurę R. W najwęższym miejscu E znajduje się niewielkie zgrubienie i w nim otwór. Ta część osłonięta jest szczelnym płaszczem MM, połączonym z rurką S, prowadzącą do naczynia, zawierającego gaz. Często w rurce tej umieszczony jest wentyl V, przerywający połączenie z naczyniem, gdy ciśnienie w E z jakichkolwiek powodów stanie się większe od ciśnienia gazu. Niech S_1 będzie przekrojem rury R, S_2 — przekrojem w miejscu zwężenia, h_1 i h_2 odległością pionową od tego samego poziomu dolnego otworu rury i przekroju przy E. Stosując wzór Bernoulli'ego, będziemy mieli

$$p_1 + h_1 \varrho g + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = p_2 + h_2 \varrho g + \frac{1}{2} \varrho v_2^2$$

lub, z uwagi, że $p_1 = p_0$ — ciśnieniu atmosferycznemu, $v_1 = \frac{w}{S_1}$ i $v_2 = \frac{w}{S_2}$, oraz $h_2 - h_1 = h$,

$$p_0 = p_2 + h \varrho g + \frac{1}{2} \varrho w^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right),$$

skąd
$$p_2 = p_0 - h \varrho g - \frac{1}{2} \varrho w^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right).$$

Biorąc np. $S_2 = 0{,}1\, S_1$, otrzymujemy

$$p_2 = p_0 - h \varrho g - \frac{1}{2} \cdot 99\, \varrho \frac{w^2}{S_1^2}.$$

Gdyby przekroje rury były jednakowe ($S_1 = S_2$), mielibyśmy

$$p_2 = p_0 - h \varrho g,$$

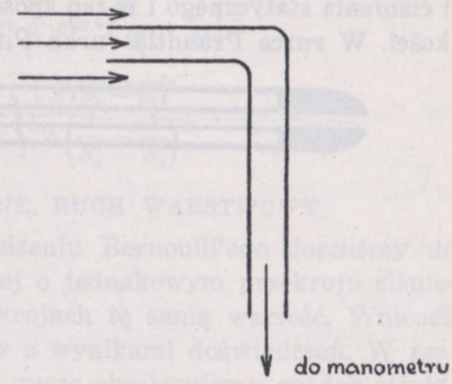
a więc na tej samej wysokości ponad otworem wypływowym ciśnienie byłoby większe, niż wtedy, gdy rura jest zwężona.

Nazwijmy wielkość $p_c = p_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \varrho v_2^2$, stałą we wszystkich punktach rury poziomej, bez względu na zmianę jej przekroju, c i ś n i e n i e m c a ł k o w i t y m cieczy; ciśnienie to możemy wyznaczyć w następujący sposób. Umieśćmy w badanym strumieniu rurkę, zgiętą pod kątem prostym

i połączoną z manometrem (rys. 174). Prędkość strugi wpadającej przez otwór rurki staje się w rurce równa zeru, wobec czego ciśnienie, jakie ciecz wywiera, równe jest ciśnieniu całkowitemu, które w ten sposób możemy zmierzyć przy pomocy manometru. Wprowadzając do wzoru Bernoulli'ego ciśnienie całkowite, otrzymujemy wzór ten w postaci

$$p_c + \varrho g h = \text{stałej}, \quad (5)$$

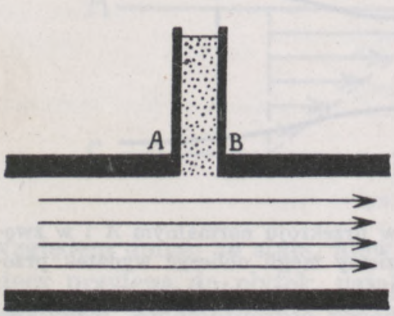
a więc w przypadku przez nas rozważanym, gdy zakładamy, że wartość stałej jest dla wszystkich strug jednakowa, wzór analogiczny do wzoru na ciśnienie cieczy w spoczynku.



rys. 174

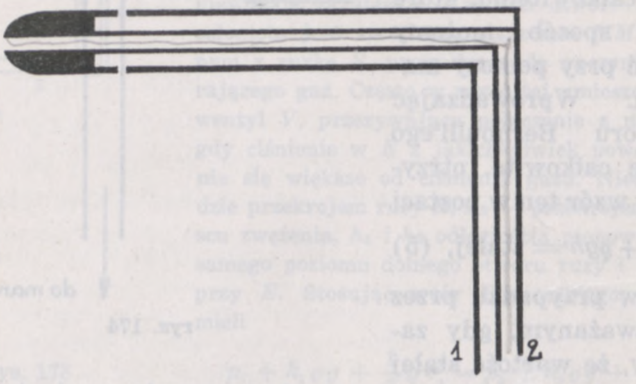
h jest tu liczone od stałego dolnego poziomu, nie tak, jak w rozdziale VI, gdzie h było liczone od pewnego poziomu górnego.

Pomiar tego rodzaju rurką, nazywaną rurką Pitota (Pitot, 1695 r.—1771 r.), pozwala jedynie na wyznaczenie ciśnienia p_c, będącego sumą ciśnień: p_1 — ciśnienia statycznego i $\frac{1}{2}\varrho v^2$ — ciśnienia dynamicznego lub ciśnienia prędkości. Do wyznaczenia p_1 dochodzimy na drodze następującego rozumowania. Wytnijmy w bocznej ścianie rury wąską, o zupełnie równych brzegach szczelinę AB (rys. 175), prostopadle do osi rury. Ciecz, wypełniająca tę szczelinę i nie uczestnicząca w ruchu cieczy, znajduje się pod tym samym ciśnieniem p_1, co ciecz przepływająca przez rurę. Jeżeli więc umieścimy w szczelinie otwartą rurkę, ciecz podniesie się w niej na wysokość równą wysokości



rys. 175

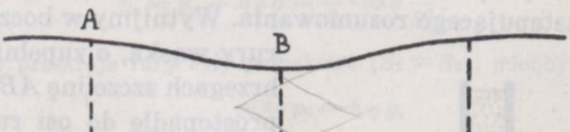
ciśnienia p_1. Na tym oparta jest budowa rurki Prandtla (rys. 176), pozwalającej zmierzyć różnicę ciśnienia całkowitego i ciśnienia statycznego i w ten sposób wyznaczyć ciśnienie prędkości. W rurce Prandtla rurka Pitota otoczona jest płaszczem



rys. 176

o kilku bocznych otworach, odgrywających rolę szczelin, o których była mowa wyżej. Łącząc rurkę Pitota z jednym ramieniem manometru, płaszcz zewnętrzny z drugim, z różnicy poziomów cieczy manometrycznej odczytujemy różnicę $p_c - p_1$, skąd, znając ϱ, możemy wyznaczyć prędkość cieczy.

Gdy do przewodu rurowego włączymy tzw. wodomiar Venturi'ego, stanowiący jakby podwójny stożek ucięty (rys. 177),



rys. 177

i zmierzymy ciśnienie statyczne w przekroju normalnym A i w zwężonym B, z różnicy ciśnień będziemy mogli obliczyć wydatek przewodu. Istotnie, ze wzoru Bernoulli'ego mamy, kładąc $h_1 = h_2$,

$$p_1 + \frac{\varrho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\varrho v_2^2}{2},$$

co z uwagi, że $v_1 = \frac{w}{S_1}$ i $v_2 = \frac{w}{S_2}$, możemy przepisać w postaci

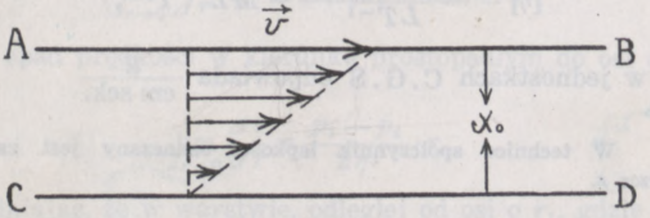
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \varrho w^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right),$$

skąd
$$w = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)}}.$$

3. TARCIE WEWNĘTRZNE. RUCH WARSTWOWY

Opierając się na twierdzeniu Bernoulli'ego doszliśmy do wniosku, że w rurze poziomej o jednakowym przekroju ciśnienie ma we wszystkich przekrojach tę samą wartość. Wniosek ten jest całkowicie sprzeczny z wynikami doświadczeń. W rzeczywistości bowiem w takiej rurze obserwujemy spadek ciśnienia w kierunku ruchu cieczy, — co wskazuje, że utrzymanie cieczy w ruchu jednostajnym wymaga istnienia różnicy ciśnień w dwu przekrojach, ograniczających wyodrębnioną przez nas masę cieczy. Sprzeczność ta wynika z pominięcia w naszych dotychczasowych rozważaniach tarcia wewnętrznego, powodującego powstawanie między dwiema sąsiednimi warstwami, poruszającymi się z niejednakową prędkością, sił stycznych do powierzchni tych warstw i skierowanych odwrotnie do ich prędkości względnej. Siły te przyspieszają ruch warstwy wolniejszej i opóźniają ruch warstwy szybszej.

Przypuśćmy, że ciecz zawarta jest między dwiema płytkami, z których górna porusza się (we własnej płaszczyźnie)



rys. 178

względem dolnej ze stałą, niewielką zresztą, prędkością v. Gdy ciecz przylega do płytek, ustala się wkrótce w cieczy rozkład prędkości, schematycznie przedstawiony na rys. 178: warstwa górna, przylegająca do płytki AB, porusza się z tą samą,

co płytka, prędkością v, warstwy niższe posiadają prędkości, zmniejszające się stopniowo i dochodzące do wartości zero w warstwie, przylegającej do dolnej nieruchomej płytki CD tak, że prędkość w warstwie odległej o x od CD możemy uważać za równą $v_x = v \cdot \frac{x}{x_0}$. W tym prostym przypadku prędkość względna dwu jakichkolwiek warstw, znajdujących się w tej samej względnej odległości jest, oczywiście, ta sama i na jednostkę odległości wynosi $\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{v}{x_0}$. Załóżmy, że siły styczne są do tego spadu prędkości proporcjonalne tak, że na jednostkę powierzchni danej warstwy działa napięcie styczne

$$p_s = \eta \frac{v}{x_0} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta x} \tag{6}$$

i przyjmijmy, że związek ten zachodzi również w przypadku, gdy spad prędkości nie jest stały, tak, że wzór (6) może mieć postać ogólniejszą

$$p_s = \eta \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}. \tag{6a}$$

Wielkość η, charakterystyczną dla danego płynu, nazywamy **spółczynnikiem tarcia wewnętrznego** lub **lepkości**. Wymiar jej wynosi

$$[\eta] = \frac{ML^{-1}T^{-2}.L}{LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1},$$

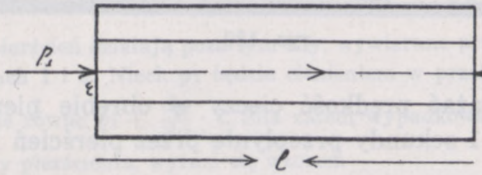
czemu w jednostkach C.G.S odpowiada $\frac{\text{g}}{\text{cm sek.}}$

W technice spółczynnik lepkości oznaczany jest zazwyczaj przez μ.

Słuszność naszego założenia możemy sprawdzić doświadczalnie, stosując wzór (6 a) do wyznaczenia ilości cieczy, przepływającej w ciągu danego czasu przez rurę ruchem tzw. warstwowym (laminarnym, łac. lamina — płytka, warstwa), w którym warstwy cieczy ślizgają się wzajemnie jedna po drugiej. Gdy ciecz badana przylega do ścian rury, gdy więc war-

stwa granicząca ze ścianą znajduje się w spoczynku, siły styczne do poruszających się warstw nie zależą zupełnie od spółczynnika tarcia zewnętrznego między cieczą a materiałem rurki, ślizganie bowiem zachodzi jedynie między warstwami cieczy.

Taki ruch istotnie powstaje w pewnych oznaczonych warunkach, o których będzie mowa w ust. 4, przy przepływie cieczy przez prostą rurę o przekroju kołowym. Wyodrębnijmy z masy cieczy walec (rys. 179), którego oś byłaby osią rury,



rys. 179

i oznaczmy promień jego przez r, długość zaś, równą długości rury, przez l. Przypuśćmy, że ciśnienia, działające na podstawy tego walca, są odpowiednio równe p_1 i p_2, tak, że wypadkowa sił, działających na walec w kierunku jego ruchu, wynosi $(p_1 - p_2)\,\pi r^2$. Gdy ciecz porusza się ruchem jednostajnym, wypadkowa ta jest zrównoważona przez siły lepkości, działające na powierzchnię walca w kierunku przeciwnym. Mamy zatem

$$\eta \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} \cdot 2\pi r \,.\, l = (p_1 - p_2)\,\pi r^2,$$

stąd na spad prędkości w kierunku prostopadłym do osi otrzymujemy

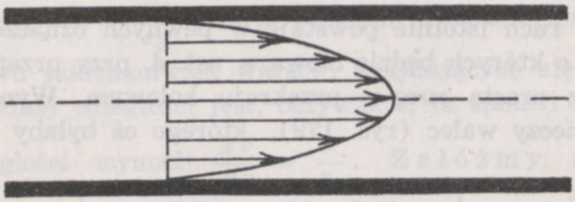
$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} \cdot r.$$

Uwzględniając, że w warstwie, odległej od osi o r_1, gdzie r_1 — promień rury, i przylegającej do ściany, $v = 0$, znajdujemy po wykonaniu odpowiednich rachunków dla prędkości w warstwie odległej o r od osi

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(r_1^2 - r^2). \tag{7}$$

Rozkład zatem prędkości w rurze wyobrazi nam parabola (rys. 180).

Podzielmy przekrój rury, prostopadły do osi, kołami współśrodkowymi na pierścienie o dostatecznie małej grubości, aby-



rys. 180

śmy mogli uważać prędkość cieczy w obrębie pierścienia za stałą. W ciągu 1 sekundy przepłynie przez pierścień ilość cieczy

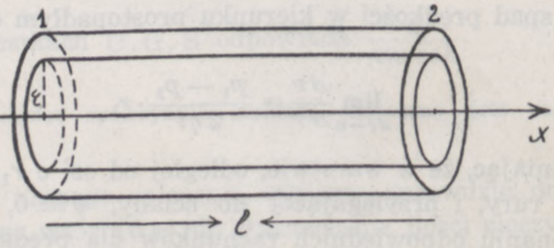
$$\Delta Q = \varrho v \,.\, 2\pi r \,.\, \Delta r = \varrho \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(r_1^2 - r^2)\,.\,2\pi r\,.\,\Delta r.$$

Sumując otrzymane w ten sposób wyrażenia, otrzymamy na ilość cieczy, przepływającej przez rurę w jednostce czasu

$$Q = \pi \frac{p_1 - p_2}{8l} \cdot \frac{\varrho}{\eta} \cdot r_1^4 \qquad (8)$$

lub, oznaczając $\frac{\eta}{\varrho}$ przez ν, gdzie ν — jest k i n e m a t y c z n y m w s p ó ł c z y n n i k i e m l e p k o ś c i

$$Q = \pi \frac{p_1 - p_2}{8l\nu} \cdot r_1^4.$$



rys. 181

Weźmy za oś x, o kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu cieczy, oś rury i opiszmy koło niej dwa walce spółosiowe o promieniach r i $r + dr$ i długości l (rys. 181). Na ciecz zawartą w warstwie

pierścienia walcowatego o grubości dr, warstwa, przylegająca od wewnątrz, działa siłą przyspieszającą, równą

$$f_1 = 2\pi r l \eta \cdot \frac{dv}{dr}.$$

Przylegająca warstwa zewnętrzna działać będzie siłą opóźniającą, równą

$$f_2 = f_1 + \frac{df_1}{dr} dr.$$

Wypadkowa tych sił wyniesie zatem

$$f = f_1 - f_2 = -\frac{df_1}{dr} dr = -2\pi l \eta \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr}\right) dr.$$

Na pierścień działają poza tym siły, wywierane przez ciśnienia w przekrojach 1 i 2. Niech p_1 będzie ciśnieniem w przekroju 1, ciśnienie p_2 będzie równe $p_1 + \frac{dp}{dx} \cdot l$. Siła zatem wypadkowa, działająca na podstawy pierścienia, wyrazi się wzorem

$$f' = (p_1 - p_2)\, 2\pi r dr = -2\pi r l \frac{dp}{dx} dr$$

Siły f i f' działające wzdłuż tej samej prostej, muszą się w przypadku ruchu jednostajnego równoważyć. Mamy zatem

$$-2\pi r l \frac{dp}{dx} dr = -2\pi l \eta \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr}\right) dr$$

lub

$$-\frac{dp}{dx} = -\frac{\eta}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr}\right). \tag{a}$$

Prawa strona równania od x nie zależy, wobec czego i lewa musi być od x niezależna. A więc $-\frac{dp}{dx} = C$ jest wielkością stałą. Stąd znajdujemy $p = -Cx + D$. Umówmy się liczyć odległości od początku rury i niech p_1 będzie ciśnieniem, odpowiadającym odległości $x = 0$; p_2 — odległości $x = l$. A zatem $D = p_1$, $C = \frac{p_1 - p_2}{l}$ i ciśnienie w odległości x od początku rury

$$p_x = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot x. \tag{b}$$

Podstawiając do wzoru (a) C zamiast $-\frac{dp}{dx}$, otrzymujemy

$$-\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr}\right) = C$$

lub

$$\eta \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr}\right) + Cr = 0.$$

Całkując, znajdujemy

$$\eta r \frac{dv}{dr} + \frac{1}{2} Cr^2 = B$$

lub

$$\eta \frac{dv}{dr} + \frac{1}{2} Cr = \frac{B}{r}.$$

Całkując jeszcze raz

$$\eta v + \frac{1}{4} Cr^2 = Blgr + K,$$

skąd

$$v = -\frac{1}{4\eta} Cr^2 + B'lgr + K'.$$

Stała całkowania B' musi być równa zeru, inaczej na osi rury ($r = 0$) prędkość byłaby równa nieskończoności; poza tym wiemy, że przy ścianach rury ($r = r_1$) w warstwie przylegającej $v = 0$, K' zatem jest

$$\frac{1}{4\eta} Cr_1^2.$$

Mamy więc ostatecznie

$$v = \frac{1}{4\eta} \frac{p_1 - p_2}{l} (r_1^2 - r^2); \tag{7a}$$

na masę zaś przepływającej cieczy

$$Q = \int_0^{r_1} 2\pi r dr \, . \, v \, . \, \varrho = \frac{1}{8} \frac{\varrho}{\eta} \pi \frac{p_1 - p_2}{l} r_1^4 = \frac{1}{8} \pi \frac{p_1 - p_2}{l \nu} r_1^4 . \tag{8a}$$

Taką samą zależność masy przepływającej cieczy od promienia i długości rury oraz od różnicy ciśnień otrzymali Hagen (1839 r.) i zwłaszcza Poiseuille (1841 r.) w licznych i starannie wykonanych doświadczeniach.

O stopniu zgodności obliczonych ze wzoru (8 a) i wyznaczonych na drodze doświadczalnej wartości Q świadczą dane, otrzymane przez Poiseuille'a, a które przytaczamy tu za Wüllnerem.

Poiseuille mierzył zależność czasu, w ciągu którego wypływała pewna objętość cieczy, od różnicy ciśnień

$p_1 - p_2$ w mm sł. wody	średnica rurki 0,135 mm czas wypływu w sek zmierzony	 obliczony
1984	5664	5664
10501	1069	1070
20561	546	546
30845	365	364
41381	273	271

różnica ciśnień ($p_1 - p_2$) stała, równa ciśnieniu sł. wody 1472,15 mm, zmieniana długość rurki, w mm	średnica rurki 0,252 mm czas wypływu w sek zmierzony	 obliczony
108,24	633	633
84,52	492	492
54,00	314	314

Możemy zatem nie tylko wzór (8), nazywany zazwyczaj wzorem Poiseuille'a, lecz również i podstawowe założenie, dotyczące tarcia wewnętrznego i wyrażone wzorem (6 a), uważać za potwierdzone doświadczalnie i wyznaczać spółczynnik η lub ν, mierząc nadwyżkę ciśnienia $p_1 - p_2$, długość rurki, jej promień oraz masę (lub objętość) wypływającej w ciągu danego czasu cieczy. Jest to też najczęściej używana metoda pomiaru lepkości, którą, zgodnie z tym, cośmy mówili w ust. 1, można stosować do wszystkich płynów, a więc i do gazów. Dla cieczy η ma wartość na ogół o wiele większą, niż dla gazów. Tak np. dla oleju maszynowego $\eta = 1{,}54$ g/cmsek, dla oliwy $\eta = 0{,}99$ g/cmsek, dla rtęci $\eta = 0{,}0159$ g/cmsek, dla wody $\eta = 0{,}0100$ g/cmsek, podczas gdy w tej samej temperaturze 20° dla powietrza $\eta = 0{,}000188$ g/cmsek, dla helu $\eta = 0{,}0001891$ g/cmsek, dla wodoru $\eta = 0{,}000097$ g/cmsek. W miarę wzrostu temperatury wartość η dla cieczy zmniejsza się dość szybko: dla gliceryny np. η w temperaturze 2,8° równa jest 42 g/cmsek, w temperaturze 20,9° — tylko 7,8 g/cmsek, dla wody w temperaturze 0° — 0,0178 g/cmsek, w temperaturze 90° — zaledwie 0,0032 g/cmsek. Ze wzrostem ciśnienia η dla wszystkich prawie cieczy nieco wzrasta (na ogół o drobny ułamek procentu przy wzroście ciśnienia o 1 Atm); wyjątek w pewnych temperaturach stanowi, jak się zdaje, woda. W gazach η wraz z temperaturą wzrasta, wzrost zaś ciśnienia, aż do bardzo wielkich wartości, nie powoduje żadnych zmian lepkości.

Zależność η gazów od temperatury wyraża dość dobrze empiryczny wzór Sutherlanda (1893 r.)

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{T}{273}} \cdot \frac{1 + \frac{C}{273}}{1 + \frac{C}{T}}, \qquad (8\,b)$$

gdzie T — temperatura w skali bezwzględnej, C — wielkość stała, zależna od rodzaju gazu.

Przy wyprowadzeniu wzoru (8 a) zakładaliśmy, że warstwa cieczy, znajdująca się w zetknięciu ze ścianą rury, jest całkowicie nieruchoma, innymi słowy, że spółczynnik tarcia zewnętrznego jest nieskończenie wielki. Moglibyśmy w wynikach doświadczeń nad przepływem cieczy w rurkach włoskowatych widzieć potwierdzenie również i tego założenia, tak też to jest ogólnie przyjęte w rozważaniach

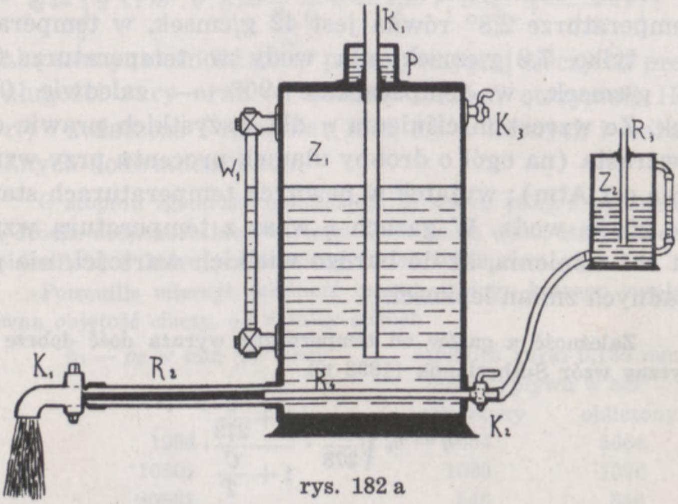
hydrodynamicznych. W pewnej jednak sprzeczności z takim założeniem znajdują się wyniki pomiarów Helmholtza i Piotrowskiego (1860 r.), którzy, obserwując zanikanie wahań kuli, wypełnionej badaną cieczą i zawieszonej na pionowym, skręcanym o pewien kąt drucie, znaleźli, że spółczynnik tarcia zewnętrznego jest jedynie 5 razy większy od η.

Pewną odmianę metod, używanych do wyznaczania η gazów, dał Piwnikiewicz (1913 r.).

Teorię ruchu cieczy, uwzględniającą tarcie wewnętrzne, zapoczątkował Navier (1826 r.), opierając się na założeniu, wyrażonym wzorem (6 a) i postawionym już przez Newtona.

4. RUCH BURZLIWY. ZASADA PODOBIEŃSTWA MECHANICZNEGO

Wzór Poiseuille'a przestaje jednak wyrażać wyniki pomiarów, gdy prędkość przepływu wzrośnie do pewnej wartości krytycznej, zależnej od średnicy rurki i rodzaju przepływającej cieczy. Może nas o tym przekonać następujące proste doświadczenie. Ze zbiornika Z_1, będącego butelką Mariotte'a, ciecz badana wy-



rys. 182 a

pływa przez rurę R_2, na której końcu umieszczony jest kran k_1. służący do regulowania wypływu cieczy. Do rury R_2 wsunięta jest na niewielką głębokość cieńsza rurka R_4, prowadząca do drugiej, mniejszej, butelki Mariotte'a Z_2, napełnionej cieczą zabarwioną. Gdy prędkość wypływu jest niewielka, ciecz zabarwiona, wypływająca z rurki R_4, tworzy w cieczy, płynącej rurą R_2, prostą barwną strugę, wyraźnie odcinającą się od bez-

barwnej cieczy i nie mieszającą się z nią (rys. 182 a). W miarę wzrastania prędkości struga barwna zaczyna się rozszerzać, traci stopniowo swój kształt prostoliniowy i wreszcie miesza się z otaczającą cieczą, tworząc nieregularne, bezładne wiry (rys. 182 b). Ruch cieczy przestaje być ruchem warstwowym i staje się ruchem burzliwym (turbulentnym). Wtedy, jak tego dowiodły głównie pomiary Sorkau'a (1911 r. i nast.), zależność ilości wypływającej cieczy od różnicy ciśnień nie wyraża się już wzorem Poiseuille'a. Można z wystarczającym przybliżeniem przyjąć, że Q jest w tym przypadku proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego z różnicy ciśnień.



rys. 182 b

Przy prędkościach niewiele przewyższających prędkość krytyczną, Q jest, jak się zdaje, proporcjonalne do $(p_1 - p_2)^{0,66}$.

Dla wyznaczenia prędkości krytycznej, przy której ruch warstwowy przechodzi w burzliwy, posłużymy się rozumowaniem, użytym przy badaniu tego zjawiska i zjawisk pokrewnych przez Reynoldsa, któremu zawdzięczamy pierwsze badania (1884 r.) z tej dziedziny. Rozumowanie to opiera się na zasadzie tzw. podobieństwa mechanicznego.

Przypuśćmy, że dwie różne ciecze znajdują się w analogicznych geometrycznie warunkach, np. w rurach o podobnym kształcie, lecz różnych wymiarach, lub w zetknięciu z ciałami podobnymi geometrycznie itp. Stawiamy sobie pytanie, jakie powinny być spełnione warunki, aby i ruch tych cieczy był geometrycznie podobny, a więc np., jak w rozpatrywanym przez nas przypadku, był dla dwu różnych cieczy, przepływających przez dwie różne rury, ruchem warstwowym lub też, przeciwnie, stawał się ruchem burzliwym. Możemy na to od razu odpowiedzieć, że warunkiem niezbędnym jest, aby w odpowiadających sobie wzajemnie punktach cieczy, czynniki, wyznaczające ruch, były w tym samym stosunku. Otóż, jak widzieliśmy, ruch cieczy wyznaczony jest przez różnicę ciśnień oraz przez siły tarcia, wynik zaś ich działania zależny jest, oczywiście, od rodzaju cieczy i wa-

runków, w jakich ciecz się znajduje. Przyjmijmy za miarę tego działania pracę, wykonaną przez każdą z tych dwu rodzajów sił. Niech v będzie prędkością, nabytą przez ciecz, m — jej masą, praca sił, uwarunkowanych istnieniem różnicy ciśnień, wyrazi się wzorem

$$\mathcal{T}_p = \frac{1}{2} mv^2. \tag{a}$$

Praca ta nie ulegnie zmianie, gdy będziemy zmieniali masę lub prędkość cieczy tak, aby iloczyn mv^2 zachowywał wartość stałą. Masa jednak cieczy zależna jest od gęstości cieczy i od zajmowanej przez nią objętości i będzie miała wartość tę samą, gdy zmianie gęstosci cieczy towarzyszyć będzie taka zmiana objętości, że iloczyn ϱl^3, gdzie l — wymiar liniowy objętości, będzie pozostawał bez zmiany. Możemy zatem powiedzieć, że stałość wielkości $\mathcal{T}_p$ jest uwarunkowana przez stałość iloczynu $\varrho l^3 v^2$.

Praca przeciwko siłom tarcia wewnętrznego wyraża się wzorem

$$\mathcal{T}_t = p_s . S . l = \eta \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} . S . l,$$

gdzie S jest powierzchnią, na którą działają siły tarcia, l — drogą, przebytą przez trące się wzajemnie warstwy. Podobnie, jak poprzednio, stwierdzimy, że $\mathcal{T}_t$ pozostanie bez zmiany, gdy np. S wzrośnie, l zmniejszy się, ale ich iloczyn $S . l$ lub, innymi słowy, iloczyn l^3 wymiarów liniowych zachowa tę samą wartość, co poprzednio, albo gdy wzrośnie wielkość Δv, lecz w tym samym stosunku zmieni się i wartość Δx, tak, że iloraz $\frac{v}{l}$ się nie zmieni (gdzie l oznacza tu odpowiedni wymiar liniowy). Warunkiem zatem stałości $\mathcal{T}_t$ jest stałość wyrażenia $\frac{\eta v}{l} \cdot l^3 = \eta v l^2$.

Ruch cieczy będzie zależał od stosunku wielkości $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_t$, a więc od

$$\frac{\varrho l^3 v^2}{\eta v l^2} = \frac{vl}{\frac{\eta}{\varrho}} = \frac{vl}{\nu} = R. \tag{9}$$

Gdy dla dwu różnych cieczy, znajdujących się w analogicznych geometrycznych warunkach, stosunek ten będzie miał tę samą wartość, ruchy cieczy będą geometrycznie podobne. Liczbę R, o wymiarze równym jedności, nazywamy **liczbą Reynoldsa**. Mała jej wartość oznacza przewagę sił lepkości, znaczna — przewagę sił różnicy ciśnień. W rozpatrywanym przez

nas przypadku cieczy, przepływającej przez rurę, wymiarem liniowym, warunkującym przepływ cieczy, jest średnica rury. Wyznaczmy doświadczalnie prędkość krytyczną v'_K, przy której ruch warstwowy cieczy o kinematycznym spółczynniku lepkości ν_1, przepływającej przez rurę o średnicy d_1, staje się ruchem burzliwym, i obliczmy odpowiadającą temu zjawisku wartość liczby Reynoldsa

$$R_1 = \frac{v'_K d_1}{\nu_1}.$$

Taką samą wartość R_1 powinniśmy otrzymać z pomiarów z jakąśkolwiek inną cieczą, o spółczynniku ν_2, przepływającą przez rurę o średnicy d_2. Będziemy mieli zatem

$$v''_K = R_1 \frac{\nu_2}{d_2}.$$

Z pomiarów otrzymujemy na R_1 wartość równą mniej więcej 1900. Ostatecznie więc prędkość krytyczna wyrazi się wzorem

$$v_K = 1900 \frac{\nu}{d}. \tag{10}$$

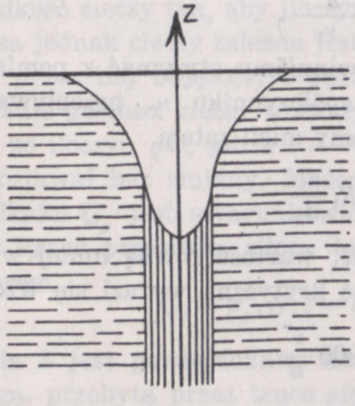
5. POWSTAWANIE WIRÓW

Mówiąc o ruchu burzliwym, wspomnieliśmy, że cechuje go powstawanie bezładnych i nieregularnych wirów. Przez r u c h w i r o w y rozumiemy ruch obrotowy pewnej ograniczonej masy cieczy, obracającej się tak, jak ciało stałe, z oznaczoną prędkością kątową około pewnej osi obrotu.

W szczególnym przypadku, gdy cząstki, znajdujące się w tym ruchu, odgraniczone są od niewirujących elementów cieczy powierzchnią cylindryczną i utworzona w ten sposób rurka, wypełniona cieczą wirującą, posiada przekrój niewielki, mamy do czynienia z w ł ó k n e m w i r o w y m (n i c i ą w i r o w ą). Cząstki cieczy, przynależne do danego włókna i tworzące w i r, poruszają się po kołach, których płaszczyzny są prostopadłe do osi włókna i których środki leżą na tej osi. Oś włókna wyznacza położenie i kierunek osi obrotu w danym przekroju. Gdy oś włókna — często nazywana l i n i ą w i r o w ą — jest linią krzywą, osi obrotu, których kierunek zmienia się wtedy od punktu do punktu, są styczne do tej krzywej. Włókno wirowe składa się zawsze z tych samych cząstek cieczy, tak, że cząstki, tworzące wir, przesuwają się razem z nim w kierunku ruchu cieczy. Prędkość kątowa w poszczególnych przekrojach zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do przekroju włókna: gdy włókno się rozszerza, pręd-

kość kątowa maleje, iloczyn jednak tych dwu wielkości pozostaje dla danego wiru wielkością stałą i może być wzięty za miarę **n a t ę ż e n i a** wiru. (Zazwyczaj jednak przez natężenie wiru rozumiemy podwójny iloczyn prędkości kątowej i przekroju włókna). Stąd wynika, że włókno wirowe nie może ani kończyć się, ani zaczynać w cieczy; linie wirowe są zatem zawsze liniami zamkniętymi (pierścienie wirowe).

Od tego ruchu wirowego, którego główne własności, ustalone przez Helmholtza (1858 r.), przytoczyliśmy wyżej bez udowodnienia, należy odróżnić tzw. **k r ą ż e n i e** płynu, przy którym tory cząstek są również krzywymi zamkniętymi. Krążenie to zachodzi dookoła tzw. jądra, którym może być jakieś ciało stałe, lub wir tej samej cieczy, lub wreszcie inny płyn lżejszy. Takie krążenie zachodzi np. przy wypływie wody z wanny: cząstki cieczy, której powierzchnia przybiera kształt leja, krążą tu koło jądra, utworzonego przez powietrze (rys. 183). Krążenie to w przeciwieństwie do ruchu wirowego nie jest ograniczone do pewnej części płynu, lecz pospolicie obejmuje całą jego masę, przy czym prędkość cząstek w miarę wzrostu odległości od jądra maleje, a więc zmienia się inaczej, niż w wirze, w którym prędkości $v = \omega . r$ wraz z odległością wzrasta.

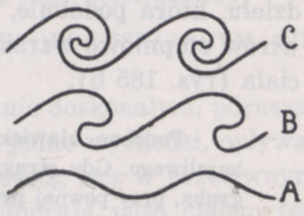


rys. 183

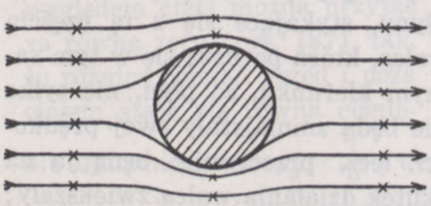
W płynie doskonałym, gdzie siły tarcia wewnętrznego są równe zeru, wir trwałby nieograniczenie długo. W płynie rzeczywistym, w którym zachodzi rozpraszanie energii ruchu, obserwujemy zarówno powstawanie, jak i zanikanie wirów. Dokładne wyznaczenie warunków, w jakich powstają wiry, nastręcza na ogół bardzo wielkie trudności. Poprzestaniemy tutaj na schematycznym i ogólnikowym ich ujęciu, opierając się głównie na teorii Prandtla (1929 r.), która, jak się zdaje, najlepiej odtwarza rzeczywisty przebieg zjawisk.

Przypuśćmy, że dwa różnego pochodzenia strumienie cieczy, opływając jakieś ostro zakończone ciało, spotykają się poza nim. Zarówno wartość, jak i kierunek prędkości mogą być w każdym strumieniu inne, tak, że przejściu przez powierzchnię, rozdzielającą te strumienie, towarzyszy skończona zmiana prędkości. Ta powierzchnia rozdziału nie zachowuje na ogół postaci stałej.

Drobne zakłócenia, jakie mogą przypadkowo zmienić jej kształt, prowadzą nie do wyrównania prędkości strumieni, ale do zwiększenia się ich wartości w jednym miejscu, do zmniejszenia — w drugim. Jeżeli np. powierzchnia ta wygnie się do góry tak, że przekrój (rys. 184 A) strugi dolnej zwiększy się w danym miejscu, prędkość zaś przepływu się zmniejszy, ciśnienie dolnej warstwy w tym miejscu się zwiększy, górnej zaś strugi się zmniejszy. Przepływ płynu od miejsc większego ciśnienia do miejsc ciśnienia mniejszego spowoduje jeszcze większe sfalowanie powierzchni rozdziału, (rys. 184 B) powodując, ostatecznie, powstanie na niej wirów (rys. 184 C). Tę samą rolę, co zetknięcie się z drugim strumieniem, może odegrać tarcie wewnętrzne. Przypuśćmy, że w poruszającym się płynie znajduje się walec. W przypadku cieczy doskonałej struga, bezpośrednio stykająca się z powierzchnią walca i zbaczająca ze swej drogi pierwotnej, miałaby prędkość w wygiętych częściach toru większą, niż w dalszych prostoliniowych, i ciśnienie mniejsze, niż panujące poza walcem. Nabyta jednak energia ruchu pozwoliłaby cząstce przezwyciężyć ten przeciwstawiający się ruchowi cieczy spad ciśnienia; cząstka poza walcem poruszałaby się z tą samą prędkością, co i przed nim (rys. 185 a). W płynie rzeczywistym zjawisko zachodzi inaczej. Struga na skutek tarcia wewnętrznego doznaje oporu ze strony warstewki cieczy, która przylega do walca, wzrost jej energii ruchu, który nastąpił na skutek zmniejszenia się przekroju (przez wygięcie strugi), jest mniejszy, niż poprzednio, i może nie wystarczyć do pokonania oporu spadu ciśnienia. Cząstki tej strugi się zatrzymują, a nawet mogą zacząć płynąć



rys. 184


rys. 185 a

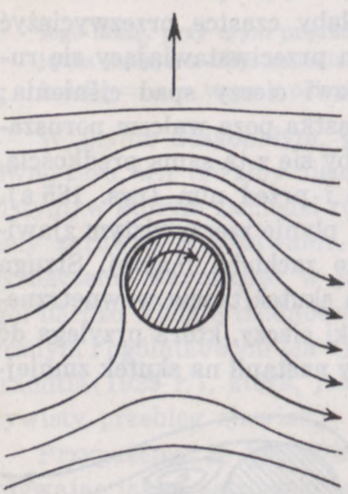

rys. 185 b

w kierunku odwrotnym. Wobec tego struga sąsiednia doznaje tym silniejszego działania hamującego, prąd o kierunku wstecznym obejmuje coraz grubsze warstwy płynu, oddzielając coraz bardziej ciało od poruszającego się płynu, który wreszcie „odrywa się" od ciała. Powstaje w ten sposób powierzchnia rozdziału, która podobnie, jak poprzednio, powoduje tworzenie się wirów stopniowo wzrastających i wreszcie odrywających się od ciała (rys. 185 b).

Podobne zjawisko można zaobserwować przy badaniu ruchu burzliwego. Gdy struga cieczy barwnej (rys. 182 a) jest dostatecznie gruba, przy pewnej prędkości, mniejszej od prędkości krytycznej, rozszerza się i wtedy powstają w niej dość regularne wiry. Powierzchnią rozdziału jest tu powierzchnia, odcinająca strugę zabarwioną od reszty cieczy.

Ten schematyczny obraz, w którym zachowaliśmy tylko najgłówniejsze zarysy teorii Prandtla, pozwoli nam zrozumieć zjawisko następujące.

Wprawmy walec, umieszczony w poruszającym się płynie, w tak szybki ruch obrotowy, aby prędkość jego na obwodzie była większa lub co najmniej równa największej prędkości prądu. Cząstki płynu, stykające się z tą częścią walca, która porusza się w tym samym kierunku, co płyn, nie tylko nie będą zmniejszały swej prędkości, lecz, przeciwnie, będą ją na skutek działania walca zwiększały; płyn z tej strony od walca się nie oderwie. Za to po stronie przeciwnej, gdzie prędkość obwodowa walca skierowana jest w stronę przeciwną, hamowanie będzie tym gwałtowniejsze; tam też nastąpi oderwanie się płynu i powstaną wiry. Ostatecznie więc rozkład linii prądu będzie można przedstawić schematycznie tak, jak na rys. 186. Mniejszej prędkości po stronie dolnej walca odpowiada większe ciśnienie; ciało doznaje parcia w kierunku prostopadłym do



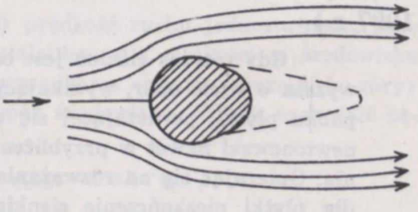
rys. 186

prędkości opływającego ciało płynu. Zjawisko to, odkryte przez Magnusa (1852 r.), nosi nazwę z j a w i s k a M a g n u s a.

W ostatnich latach Flettner próbował wyzyskać zjawisko Magnusa do poruszania okrętów siłą wiatru. Żagle na statku Flettnera zastąpione były przez szybko obracający się walec (rotor Flettnera). Wyniki jednak nie odpowiedziały, jak się zdaje, oczekiwaniom.

6. OPÓR STAWIANY PRZEZ PŁYNY PORUSZAJĄCYM SIĘ W NICH CIAŁOM

Jak wynika z tych rozważań, w płynie doskonałym, poruszającym się z prędkością stałą lub, co na jedno wychodzi, opływającym poruszające się z tą samą prędkością, lecz w przeciwnym kierunku, ciało stałe, linie prądu przybierają poza ciałem ten sam kształt, jaki miały przed nim, wobec czego i rozkład ciśnień na przedniej i tylnej powierzchni ciała jest jednakowy. Opór zatem stawiany ruchowi ciała równy jest zeru. W płynach rzeczywistych jednak warunki są zgoła odmienne: w pewnych punktach powierzchni ciała następuje, jak widzieliśmy, oderwanie się prądu od powierzchni i powstanie poza ciałem przestrzeni „martwej", będącej siedliskiem wirów i gdzie prędkość płynu względem ciała można przyjąć za równą zeru (rys. 187), tak, że różnica ciśnień przed i poza ciałem staje się równa ciśnieniu dynamicznemu $p_d = \frac{1}{2} \varrho v^2$ (ust. 2). Oznaczmy pole rzutu ciała na płaszczyznę, prostopadłą do kierunku ruchu, przez S. Siłę oporu, spowodowanego przez różnicę ciśnień, można wyrazić wzorem


rys. 187

$$F = C \, . \, S \, . \, p_d = C \, . \, S \, . \, \frac{\varrho v^2}{2}, \tag{11}$$

analogicznym do wzoru, wyprowadzonego przez Newtona na podstawie odmiennych założeń.

Do tego oporu dołącza się jeszcze opór sił tarcia, najczęściej w porównaniu z nim bardzo mały. Przypuśćmy, że mamy do czynienia z ciałami geometrycznie podobnymi, poruszającymi sie z różnymi prędkościami w różnych płynach. Z zasady mechanicz-

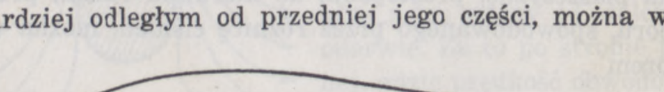
nego podobieństwa (ust. 4) wynika, że w przypadkach, którym odpowiada ta sama wartość liczby Reynoldsa, stosunek działania różnicy ciśnień do działania sił tarcia będzie miał również wartość jednakową, opór więc tarcia zmieniać się będzie proporcjonalnie do różnicy ciśnień, a zatem proporcjonalnie do p_d. Możemy zatem przyjąć, że wzór (11) wyraża całkowity opór, doznawany przez ciało, z tym jednak zastrzeżeniem, że spółczynnik C, o wymiarze równym jedności, nie jest wielkością stałą, lecz funkcją R

$$C = f(R) = f\left(\frac{v\,l}{\nu}\right), \tag{11 a}$$

gdzie l oznacza odpowiednio wybrany wymiar ciała. Dla tej samej wartości R, spółczynnik C, a więc postać funkcji f, zależy, jak to łatwo można z góry przewidzieć, od kształtu ciała. Tak np. opory, jakich doznają przy swobodnym spadaniu w powietrzu tarcza metalowa, walec o tym samym przekroju i o długości równej średnicy przekroju oraz walec o długości półtora razy większej, są do siebie w stosunku takim, jak 1,12, 1,10, 0,80 (Eiffel, 1907 r.).

Gdy różnica ciśnień jest bardzo mała, tak, że opór tarcia przewyższa o wiele opór, wynikający z różnicy ciśnień, jak np. w przypadku płytki, poruszającej się w swojej własnej płaszczyźnie, wzór newtonowski nawet w przybliżeniu nie odpowiada danym doświadczenia. Opierając się na rozważaniach teoretycznych, można dowieść, że dla płytki nieskończenie cienkiej opór wzrasta proporcjonalnie do $\sqrt{v^3}$ (Blasius 1908 r.).

Dobierając odpowiednio kształt ciała tak, aby strugi prądu nie odrywały się od ciała zupełnie lub też w punkcie możliwie najbardziej odległym od przedniej jego części, można wartość



rys. 188

spółczynnika C bardzo znacznie obniżyć. Dla ciała o kształcie takim, jak np. na rys. 188, zbliżonym do kształtu, zazwyczaj nadawanego sterowcom, wartość spółczynnika C jest 28 razy mniejsza od wartości, jaką przy poruszaniu się w tym samym płynie,

z tą samą prędkością posiada kula o tej samej średnicy, co średnica pola rzutu danego ciała.

Zależność C od liczby Reynoldsa została szczególnie dobrze zbadana dla ciał kulistych i walcowatych. Podajemy za Prandtlem dane, dotyczące ciał kulistych

$R = \frac{vr}{\nu} =$	0,1	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$C =$	120	14	2,6	0,75	0,42	0,45	0,44	0,18

Przy R małym, nie większym od 0,2, możemy przyjąć

$$C = \frac{12}{R} = \frac{12 \,.\, \nu}{v \,.\, r}.$$

Podstawiając tę wartość do wzoru (11) i kładąc $S = \pi r^2$, znajdujemy

$$F = 6\pi \nu r \varrho v$$

lub z uwagi, że $\nu = \frac{\eta}{\varrho}$

$$F = 6\pi \eta r v, \tag{12}$$

tzw. **wzór Stokesa**, wyprowadzony przez Stokesa (1845 r.) z ogólnych równań ruchu cieczy lepkiej.

Wyznaczmy ze wzoru (12) prędkość ruchu jednostajnego, jaką osiągnie kula spadająca pod działaniem siły ciężkości w środowisku lepkim, gdy siła poruszająca (wypadkowa ciężaru i parcia do góry) zostanie zrównoważona przez opór środowiska. Wtedy zachodzić będzie równość

$$\frac{4}{3}\pi r^3 (\varrho_1 - \varrho_2) g = 6\pi \eta r v,$$

gdzie ρ_1 — gęstość kuli, ρ_2 — gęstość środowiska, skąd

$$v = \frac{2}{9} g (\varrho_1 - \varrho_2) \frac{r^2}{\eta}. \tag{a}$$

Wzór ten jednak obowiązywać będzie dopóty, dopóki liczba Reynoldsa nie przekroczy 0,2, dopóki więc $\frac{vr}{\nu} \leqslant 0{,}2$.

Gdy znamy materiał, z którego zrobiona jest kula, i lepkość środowiska, możemy z tego warunku oraz ze wzoru (a) wyznaczyć największą wartość promienia kuli, do której można stosować wzór Stokesa. Dla kropli wody, spadającej w powietrzu ($\eta = 0{,}000173$, $\nu = 0{,}133$ w temp. 0°, pod ciśnieniem 760 mm rt.), otrzymamy, pomijając stratę na ciężarze,

$$v = 1{,}3 \,.\, 10^6 \,.\, r^2,$$

wobec czego

$$\frac{vr}{\nu} = \frac{1{,}3 \,.\, 10^6 \,.\, r^3}{0{,}133} \leqslant 0{,}2$$

$$r^3 \leqslant 20 \,.\, 10^{-9}, \text{ i } r \leqslant 0{,}0027 \text{ cm}.$$

Promień zatem nie może przekraczać 0,027 mm. Temu warunkowi czynią zadość kropelki mgły.

Dla kulki szklanej, spadającej w glicerynie o temperaturze 20°

$$(\rho_1 = 2{,}6\ \mathrm{g/cm^3},\ \rho_2 = 1{,}26\ \mathrm{g/cm^3},\ \eta = 7{,}8\ \mathrm{g/cm\ sek},\ \nu = \frac{\eta}{\varrho_2} = 6{,}2)$$

$$v = 37{,}4\ r^2,$$

skąd
$$\frac{vr}{\nu} = \frac{37{,}4 \cdot r^3}{6{,}2} \leqslant 0{,}2$$

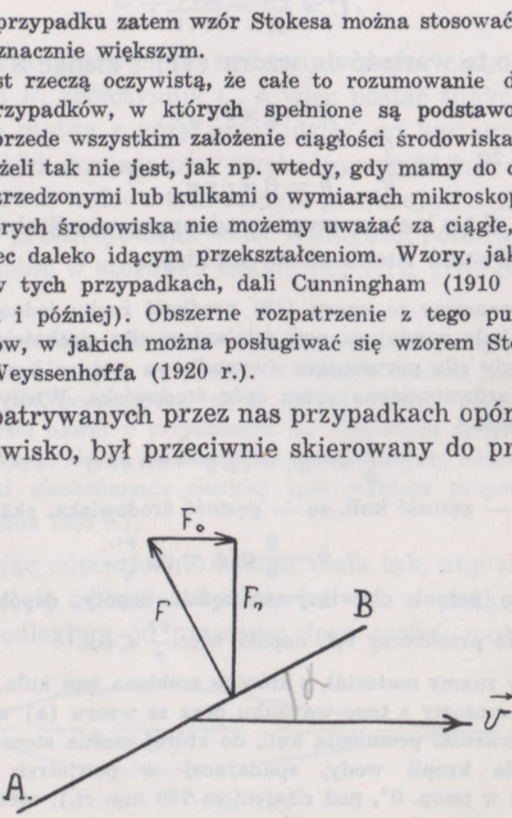
$$r^3 \leqslant 33.10^{-3}.$$

i
$$r \leqslant 0{,}3\ \mathrm{cm}$$

w tym przypadku zatem wzór Stokesa można stosować do kul o promieniu znacznie większym.

Jest rzeczą oczywistą, że całe to rozumowanie dotyczy takich tylko przypadków, w których spełnione są podstawowe założenia, a więc przede wszystkim założenie ciągłości środowiska, stawiającego opór. Jeżeli tak nie jest, jak np. wtedy, gdy mamy do czynienia z gazami rozrzedzonymi lub kulkami o wymiarach mikroskopowych, względem których środowiska nie możemy uważać za ciągłe, wzór Stokesa musi ulec daleko idącym przekształceniom. Wzory, jakie należy stosować w tych przypadkach, dali Cunningham (1910 r.) i Millikan (1911 r. i później). Obszerne rozpatrzenie z tego punktu widzenia warunków, w jakich można posługiwać się wzorem Stokesa, zawiera praca Weyssenhoffa (1920 r.).

W rozpatrywanych przez nas przypadkach opór, wywierany przez środowisko, był przeciwnie skierowany do prędkości. Nie

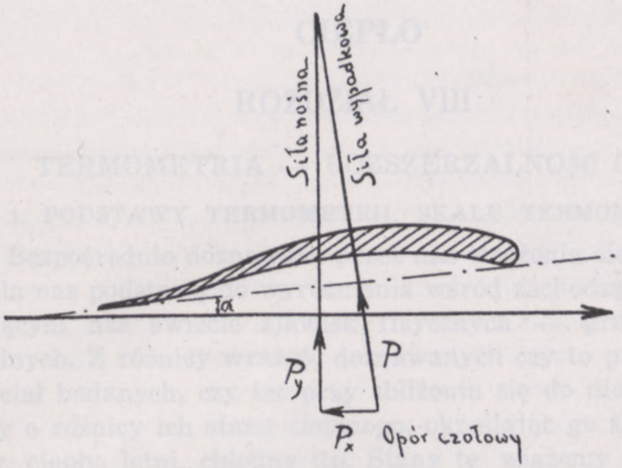


rys. 189

jest to jednak zasada ogólna. Niech AB (rys. 189) będzie cienką płytką prostokątną, poruszającą się z prędkością $\vec{v}$, której kierunek tworzy z płaszczyzną płytki kąt α.

W lotnictwie analogiczny kąt nosi nazwę k ą t a n a t a r c i a; jest to kąt, jaki tworzy cięciwa profilu płata samolotu z kierunkiem prędkości (rys. 190).

Wypadkowa sił oporu, w których, jak o tym była już mowa, przeważa opór, powodowany przez różnicę ciśnień, jest mniej więcej prostopadła do płaszczyzny AB. Punkt jej przyłożenia jest



rys. 190 (według Misesa)

nieco przesunięty ku przodowi płytki. Siłę tę możemy rozłożyć na dwie składowe: prostopadłą i równoległą do kierunku prędkości. Pierwsza z nich (przy ruchu poziomym) przeciwdziała sile ciężkości, stąd nazwa jej — s i ł y n o ś n e j, druga zaś — o p ó r c z o ł o w y — przeciwdziała ruchowi płytki. Przy odpowiednio dobranym kształcie poruszającej się powierzchni i prędkości jej ruchu siła nośna może zrównoważyć siłę ciężkości, a nawet ją przewyższyć.

I w tym, podobnie, jak i we wszystkich innych rozpatrywanych w tym ustępie przypadkach, przyjmowaliśmy, że zjawiska zachodzą w ten sam sposób, gdy płyn porusza się względem ciała z prędkością $\vec{v}$ lub też gdy ciało porusza się względem płynu z prędkością $-\vec{v}$, że więc opór zależy jedynie od prędkości względnej ciała i płynu. Założenie to jest słuszne, dopóki płyn

porusza się względem ciała ruchem jednostajnym; przestaje jednak obowiązywać, gdy ruch płynu jest ruchem burzliwym. W tym przypadku posługiwanie się danymi, otrzymanymi z pomiaru oporu, doznawanego przez ciało, poruszające się w nieruchomym płynie, może prowadzić do znacznych nieraz błędów.

CIEPŁO

ROZDZIAŁ VIII

TERMOMETRIA — ROZSZERZALNOŚĆ CIAŁ

1. PODSTAWY TERMOMETRII. SKALE TERMOMETRYCZNE

Bezpośrednio doznawane przez nas wrażenia ciepła i zimna są dla nas podstawą do wyróżnienia wśród zachodzących w otaczającym nas świecie zjawisk fizycznych — grupy zjawisk cieplnych. Z różnicy wrażeń, doznawanych czy to przy dotknięciu ciał badanych, czy też przy zbliżeniu się do nich, wnioskujemy o różnicy ich stanu cieplnego, określając go słowami: gorący, ciepły, letni, chłodny itp. Stany te wiążemy z pojęciem temperatury, przypisując jednakową temperaturę tym ciałom, od których doznajemy jednakowych wrażeń cieplnych. To określenie równości temperatur, jakkolwiek często zawodne i prowadzące do sprzeczności w ocenach, pozwala w pewnych prostych przypadkach stwierdzić, że dwa ciała, nie działające na siebie chemicznie i odosobnione od reszty ciał otaczających, z biegiem czasu wyrównywają swoje temperatury i że wyrównywaniu temu towarzyszą zazwyczaj zmiany wielkości, takich np., jak objętość lub prężność, a które zależnie od punktu widzenia nazywamy albo parametrami, wyznaczającymi stan fizyczny ciała, albo funkcjami jego stanu. Obserwacja tego rodzaju zmian, zachodzących jedynie na skutek ogrzewania się lub ochładzania się ciał podczas wyrównywania temperatur, daje nam możność uogólnić powyższe twierdzenie na przypadki, gdy bezpośrednie porównywanie doznawanych przez nas wrażeń albo jest niemożliwe (gdy np. mamy do czynienia z ciałami bardzo gorącymi albo bardzo zimnymi), albo prowadzi do wnio-

sków, na pozór sprzecznych z tym twierdzeniem (jak np. przy dotykaniu zimnego kawałka żelaza i zimnego kawałka drzewa, które, w ten sam sposób oziębiane, co żelazo, wydaje się nam cieplejsze), i uważać za ciała o jednakowej temperaturze takie, których parametry w warunkach wyżej podanych zmianie nie ulegają. Ciała takie uważamy za znajdujące się w równowadze termicznej, twierdzenie zaś o wyrównywaniu temperatur — za pierwsze prawo termometrii.

Równowaga termiczna układu danych ciał jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym, ich równowagi termodynamicznej (rozdz. XI, ust. 1).

Te założenia podstawowe prowadzą do bardziej obiektywnej klasyfikacji temperatur ciał, niż ta, którą byśmy mogli osiągnąć, opierając się na bezpośrednich wrażeniach cieplnych.

Weźmy dowolne ciało T i wybierzmy spomiędzy wszystkich wielkości, charakteryzujących jego stan fizyczny, taką, która przy ogrzewaniu stale zmienia swą wartość w oznaczonym kierunku, przeciwnym, niż przy ochładzaniu (np. przy ogrzewaniu wzrasta, przy oziębianiu maleje). Notujmy kierunek zmiany, jaka zachodzić będzie w wybranej przez nas wielkości, którą nazwiemy wielkością termometryczną, gdy ciało T znajdzie się, przy zachowaniu podanych wyżej warunków, w których obowiązuje pierwsze prawo termometrii, przez bardzo krótki czas w zetknięciu lub w pobliżu ciał, których temperatury poddajemy badaniu. W wyniku otrzymamy podział badanych ciał na trzy grupy: grupę A, która powodować będzie wzrost danej wielkości, grupę B, która nie będzie wcale zmieniała jej wartości i którą zatem możemy uważać za utworzoną z ciał o tej samej temperaturze, co T, i wreszcie grupę C, która będzie zmniejszała wielkość termometryczną. Podział ten, jak to stwierdza doświadczenie, jest niezależny od wyboru ciała T. Jeżeli ciało to zastąpimy jakimkolwiek innym, należącym do grupy B, otrzymamy podział identyczny: te same ciała należeć będą i tym razem do tych samych grup temperatur. Wynika to z drugiego prawa termometrii, udowodnionego przez codzienne nasze doświadczenia: jeżeli ciała B_1 i B_3 oraz B_2 i B_3 są w równowadze termicznej, B_1 i B_2 są też w równowadze termicznej.

To drugie prawo termometrii nie jest bynajmniej, jak na to zwrócił uwagę Maxwell, jakąś samą przez się zrozumiałą prawdą,

lecz stwierdzeniem faktu, że gdy np. sztaba żelazna, zanurzona do oliwy lub wody, jest z tymi cieczami w równowadze termicznej, woda i oliwa, umieszczone w tym samym naczyniu, będą także w równowadze termicznej.

Podobnie podział ten się nie zmieni, gdy inną wielkość weźmiemy za wielkość termometryczną, gdy np. zamiast zmian objętości ciała T będziemy badali zmiany jego oporu elektrycznego, byleby ta nowa wielkość czyniła zadość wyżej podanemu warunkowi, jakiemu powinna odpowiadać każda wielkość termometryczna.

Z ustalonej w ten sposób jednoznacznie grupy ciał A wybieramy jakiekolwiek ciało A', o tych samych własnościach wielkości termometrycznej, co ciało T, i postępujemy z nim tak, jak poprzednio z ciałem T. Grupa A rozpadnie się wtedy, na ogół, znów na trzy grupy: grupę A_2, powodującą wzrost wielkości termometrycznej ciała A', grupę A_1, będącą z tym ciałem w równowadze termicznej, i wreszcie grupę A_0, powodującą zmniejszenie wielkości termometrycznej ciała A'. Postępując tak dalej, otrzymamy ostatecznie układ następujący:

$$\begin{array}{llll}
A'_n & . & . & . & A^n_n \\
A'_{n-1} & . & . & . & A^m_{n-1} \\
. & . & . & . & . \\
B' & . & . & . & B^p \\
. & . & . & . & . \\
C'_{n-1} & . & . & . & C^r_{n-1} \\
C'_n & . & . & . & C^s_n
\end{array}$$

gdzie wszystkie ciała, stojące w tym samym szeregu poziomym, są w równowadze termicznej, w zetknięciu zaś lub przy zbliżeniu do ciał, stojących w szeregu wyższym, zmieniają swą wielkość termometryczną w kierunku przeciwnym, niż w zetknięciu lub przy zbliżeniu do ciał, stojących niżej.

Wybierzemy z każdego szeregu poziomego po jednym ciele takim, o którym możemy przypuszczać, że zawsze ma temperaturę stałą, innymi słowy, że zajmuje zawsze to samo miejsce w podanej wyżej tablicy. Temu warunkowi odpowiadają, między innymi, krzepnące lub topniejące ciała. Tak np. ciało T, znajdujące się w równowadze termicznej z topniejącym lodem, będzie zawsze zmieniało swą wielkość termometryczną w tym sa-

mym kierunku przy zetknięciu z krzepnącym glinem lub cynkiem, w kierunku zaś przeciwnym — z krzepnącą rtęcią. W tablicy ciała te występowałyby zawsze w następującej kolejności:

krzepnący glin
krzepnący cynk
topniejący lód
krzepnąca rtęć.

Ta klasyfikacja pozostałaby słuszną i wtedy, gdybyśmy tablicę obrócili o 180° tak, aby krzepnąca rtęć znalazła się u góry, krzepnący glin u dołu. Dla uniknięcia tej nieoznaczoności umówmy się uważać za temperaturę wyższą temperaturę tego ciała, które przy wyrównywaniu się temperatur ostyga, za niższą — tego ciała, które się ogrzewa, i ułóżmy tablicę tak, aby wyżej umieszczonym ciałom odpowiadała temperatura wyższa. Otrzymamy w ten sposób podstawową skalę temperatur, która pozwala nam zaklasyfikować temperaturę dowolnego ciała albo jako równą temperaturze jednego z ciał skali, albo jako zawartą między temperaturami dwu sąsiednich szeregów [1]).

Taki jednak sposób klasyfikacji temperatur jest w praktyce niedogodny. Przede wszystkim, jakkolwiek byśmy zwiększali ilość grup temperatur, tworzących daną skalę, nie będzie ona nigdy czyniła zadość warunkowi ciągłości, tak, że zawsze znajdą się takie ciała, których temperatury nie będą równe żadnej z temperatur skali, następnie sam sposób porównywania temperatur nastręczałby znaczne trudności, z których nie najmniejszą stanowiłaby zmiana podczas doświadczenia temperatury badanego ciała, wprowadzanego w zetknięcie kolejno z różnymi ciałami skali. To też ten sposób wyznaczania temperatur jest obecnie używany w wyjątkowych tylko przypadkach i skala ta służy, na ogół, jedynie jako podstawa innych, dogodniejszych w użyciu, skal termometrycznych.

Ze skal, odpowiadających pewnemu zakresowi temperatur skali podstawowej, może najczęściej używana jest dzisiaj skala Segera (1885 r.), służąca do wyznaczania temperatury pieców, w których

---

[1]) Rozumowanie, użyte przez nas do ustalenia skali podstawowej, jest w znacznym stopniu oparte na wykładzie Langevina, przytoczonym przez Perrina w książce „Les principes".

wypala się wyroby ceramiczne. Ciała, zazwyczaj w kształcie stożków, tak są co do swego składu chemicznego dobrane, że temperatury, w których stają się one plastycznymi, co ujawnia się w rozpływaniu się wierzchołków stożków, zawarte są w granicach temperatur, z jakimi ma się zazwyczaj do czynienia. Czasami też używa się skali Prinsepa (1828 r.), w której temperaturami odniesienia są temperatury topnienia nie utleniających się metali (srebro, złoto, pallad, platyna) lub stopów. Do wyznaczania temperatur poniżej 0° C może służyć skala Colemana (1884 r.), utworzona z temperatur zamarzania różnoprocentowych mieszanin wody z gliceryną; temperatury te leżą w granicach od —37° do 0° skali gazowej (p. niżej).

Zazwyczaj przeto postępuje się inaczej. Wprowadzając w zetknięcie z kolejnymi ciałami skali wybrane, dowolnie zresztą, ciało *T*, które nazywać będziemy ciałem t e r m o m e t r y c z n y m, wyznaczamy wartości, jakie przybiera po dojściu do stanu równowagi termicznej wielkość termometryczna lub jakakolwiek jej funkcja, zmieniająca się ze wzrostem temperatury w tym samym kierunku. Jeżeli przy zetknięciu z ciałem, którego temperaturę chcemy wyznaczyć, wielkość termometryczna dochodzi do wartości *a*, takiej samej, jaką miała w temperaturze ciała *A* skali podstawowej, uważamy, opierając się na drugim prawie termometrii, temperaturę danego ciała za równą temperaturze ciała *A*.

Wniosek ten jest słuszny jedynie wtedy, gdy 1. ciało termometryczne jest tak wybrane, że zetknięcie z badanym ciałem nie zmienia w znaczniejszym stopniu temperatury danego ciała, gdy więc, o ile dane ciało nie jest źródłem ciepła (rozdz. IX, ust. 1), pojemność cieplna ciała termometrycznego (rozdz. IX, ust. 4) jest mała w porównaniu z pojemnością danego ciała i gdy początkowa różnica temperatur nie jest zbyt wielka, i 2. gdy warunki, w jakich zachodzi wyrównywanie temperatur ciała *T* i ciał skali oraz ciała badanego, a których zmiana mogłaby spowodować zmianę wartości wielkości termometrycznej, są w obydwu przypadkach identyczne.

Otrzymany na tej drodze układ wartości wielkości termometrycznej (lub jej funkcji) stanowi nową skalę termometryczną, przyrządy zaś, przy których pomocy możemy porównywać temperatury badanych ciał z temperaturami skali, nazywamy t e r m o m e t r a m i.

Wybór ciała i wielkości termometrycznych jest, jak była już o tym mowa wyżej, całkowicie dowolny, najbardziej jednak celowe byłoby wybranie takiej wielkości (lub takiej jej funkcji),

której zmiana wraz ze zmianą temperatury byłaby dla wszystkich ciał jednakowa, wtedy bowiem układ jej wartości, przyporządkowany temperaturom skali podstawowej, byłby całkowicie niezależny od wyboru ciała termometrycznego. Warunkowi temu czyni zadość tzw. skala bezwzględna lub termodynamiczna temperatur (rozdz. X, ust. 3), którą możemy odtworzyć przy pomocy skali gazowej (nazywanej obecnie również teoretyczną skalą Avogadro). Amontons (1702 r.), Charles (1787 r.) i Gay-Lussac (1802 r.) stwierdzili, że wszystkie gazy, bez względu na różnice swych własności chemicznych, ogrzane do tej samej temperatury pod stałym ciśnieniem, zwiększają w tym samym stosunku swą objętość, ogrzewane zaś w stałej objętości, zwiększają w tym samym stosunku swą prężność, innymi słowy, że masy różnych gazów, posiadające w pewnej temperaturze tę samą objętość (prężność), będą miały pod tym samym ciśnieniem (w tej samej objętości) i w każdej innej temperaturze objętości (prężności) jednakowe.

Niech v_0 będzie objętością pod stałym ciśnieniem pewnej masy gazu, znajdującej się w zetknięciu z oznaczonym ciałem podstawowej skali temperatur, np. z topniejącym lodem; stykając tę masę kolejno z różnymi ciałami skali, znajdziemy dla każdej temperatury oznaczoną wartość objętości gazu tak, że o równości lub różnicy temperatur moglibyśmy wnioskować z równości lub różnicy objętości v, jaką dana masa gazu zajmuje po dojściu do równowagi termicznej z tymi ciałami. Ten sposób wyznaczania temperatur można znacznie uprościć, biorąc pod uwagę nie wartość v objętości gazu, lecz jej zmianę względną $\frac{v - v_0}{v_0}$ i przyjmując pewną oznaczoną jej wartość za miarę zmiany temperatury ciała. Niech v_1 będzie objętością danej masy gazu w pewnej stałej temperaturze, wyższej od temperatury topnienia lodu. Nazwiemy stopniem zmiany temperatury lub poprostu stopniem temperatury taką jej zmianę, która spowoduje zmianę względną objętości gazu, pozostającego pod stałym ciśnieniem, o $\frac{v_1 - v_0}{n v_0}$. W praktyce przyjęto za temperaturę, odpowiadającą objętości v_1, brać temperaturę wrzenia wody pod ciśnieniem 1 Atm, liczbę zaś n za równą 100. Jeśli więc objętość gazu przy

zetknięciu z badanym ciałem przybrała wartość v, temperaturę danego ciała uważać będziemy za wyższą (lub niższą, gdy $v < v_0$) od temperatury topnienia lodu o liczbę stopni

$$t = \frac{v - v_0}{v_0} : \frac{v_{100} - v_0}{100\, v_0} = \frac{v - v_0}{v_{100} - v_0} \cdot 100. \qquad (1)$$

Tego rodzaju określenie stopnia wprowadził Fahrenheit (1724 r.). Wielkością termometryczną była w skali Fahrenheita objętość rtęci, której zmiany, a właściwie nadwyżka tych zmian ponad zmianami objętości zbiornika, wypełnionego rtęcią, wyznaczały zmiany temperatury. Temperaturami stałymi w termometrze Fahrenheita były temperatury krzepnięcia wodnego roztworu salmiaku i topnienia lodu, n zaś równe 32. Niech h_1 i h_0 będą wysokościami słupka rtęci w dwu danych temperaturach, h — w temperaturze badanej. Gdy promień rurki termometru jest stały, $h_1 - h_0$ i $h - h_0$ są proporcjonalne do pozornej zmiany objętości rtęci. Badana temperatura jest wyższa od temperatury krzepnięcia roztworu salmiaku o liczbę stopni

$$t = \frac{h - h_0}{h_1 - h_0} \cdot 32.$$

Réaumur (1730 r.) i Celsius (1742 r.) za temperatury podstawowe wzięli temperatury topnienia lodu i wrzenia wody pod ciśnieniem 1 Atm, za n zaś przyjęli: Réaumur — 80, Celsius — 100.

Wprowadzenie pojęcia stopnia jest równoważne zastąpieniu skali podstawowej przez skalę fikcyjną, utworzoną z ciał o tak dobranych różnicach temperatur, że zetknięcie termometru o temperaturze jednego z ciał tej skali z ciałem, stojącym bezpośrednio wyżej, wywołuje zmianę wielkości termometrycznej o najmniejszą, możliwą jeszcze do zmierzenia wartość.

Znaczne zazwyczaj zmiany objętości, jakich gaz doznaje przy ogrzewaniu lub ochładzaniu, utrudniają jednak zachowanie podstawowego warunku, aby cała masa gazu była stale w zetknięciu z badanym ciałem. Z tego też powodu obecnie za wielkość termometryczną przyjmuje się nie objętość gazu pod stałym ciśnieniem, lecz prężność gazu w stałej objętości. Zachowując znakowanie analogiczne do poprzedniego, otrzymamy na liczbę stopni, liczonych od temperatury topnienia lodu

$$t = \frac{p - p_0}{p_{100} - p_0} \cdot 100. \qquad (1\,a)$$

Stopnie te, jak tego dowiodły wspomniane wyżej pomiary, głównie Gay-Lussaca, są identyczne ze stopniami skali, opartej

na zmianach objętości przy czym w obydwu przypadkach względna zmiana wielkości termometrycznej, odniesiona do wartości w temperaturze topniejącego lodu i przypadająca na jeden stopień, wynosi, bez względu na rodzaj gazu, $0{,}0036609 = \frac{1}{273{,}16}$ (Henning i Heuse, 1929 r.).

Stopnie te będziemy oznaczali symbolem $t°$C (łac. centigradus — setna część stopnia). Skala bezwzględna (termodynamiczna), oparta na założeniach odmiennych (rozdz. X, ust. 3), różni się od skali gazowej wyborem punktu zerowego temperatur: w skali tej stopnie liczy się od temperatury, leżącej o 273,16 °C poniżej temperatury topniejącego lodu. Stopnie skali bezwzględnej będziemy oznaczali przez T lub też dodawali przy liczbie stopni literę K (od nazwiska W. Thomsona, lorda Kelvina, twórcy tej skali). Będziemy zatem mieli

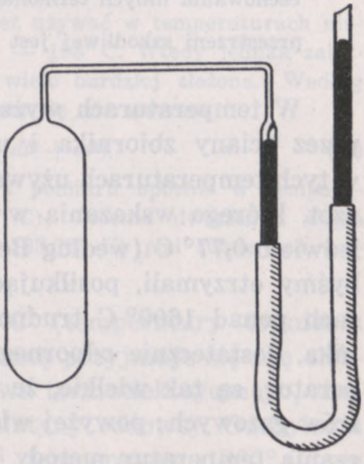
$$T = t + 273{,}16$$

$$T_1 - T_2 = t_1 + 273{,}16 - t_2 - 273{,}16 = t_1 - t_2\,.$$

Różnice więc temperatur w obydwu skalach wyrażają się tą samą liczbą stopni.

Późniejsze pomiary (ust. 4) wykazały jednak, że gazy posiadają przypisywane im przez Gay-Lussaca własności jedynie pod bardzo małymi ciśnieniami, a więc wtedy, gdy je możemy uważać za gazy doskonałe, na ogół bowiem temu samemu wzrostowi temperatury odpowiadają różne zmiany względne wielkości termometrycznej, zależnie nie tylko od rodzaju gazu, lecz również i początkowego ciśnienia oraz temperatury. Dla urzeczywistnienia więc termometru gazowego należałoby posługiwać się gazami o bardzo małym ciśnieniu, co nastręczałoby jednak duże trudności pomiarowe, gdyż zmiany prężności, wyrażające się, jak widzieliśmy, ułamkiem prężności w temperaturze 0°, byłyby przy małych zmianach temperatury zbyt małe, aby mogły być dokładnie wyznaczone. Wobec tego zjawia się konieczność używania termometrów pomocniczych, do których wskazań wyprowadza się odpowiednie poprawki (por. ust. 4), i z których każdy używany jest tylko w pewnych granicach temperatur skali gazowej.

Najważniejszym z tych termometrów jest termometr wodorowy (rys. 191), którego można używać w szerokich granicach temperatur, od — 240° C do + 300° C. Prężność wodoru, zawartego w zbiorniku, mierzy się różnicą poziomów rtęci w rurkach manometru, przy czym rtęć w rurce, łączącej się ze zbiornikiem, doprowadzamy przez opuszczanie lub podnoszenie drugiej rurki manometru zawsze do tego samego poziomu, wyznaczonego przez ostrze, które powinno dotykać powierzchni rtęci. Pomijając w pierwszym przybliżeniu rozszerzalność naczynia i przyjmując, że objętość gazu zachowała podczas pomiaru wartość stałą, wyznaczamy temperaturę w stopniach skali wodorowej ze wzoru



rys 191

$$t_H = \frac{p_t - p_0}{p_{100} - p_0} \cdot 100, \qquad \text{(a)}$$

gdzie p_0 — prężność wodoru w temperaturze topniejącego lodu, p_{100} — w temperaturze wrzącej wody, p_t — w temperaturze t_H. Kładąc $p_0 = 1$ m słupa rtęci, otrzymamy skalę, która do niedawna była, na mocy uchwały z 1887 r., powziętej przez Międzynarodową Komisję Miar i Wag, skalą obowiązującą. W podanym wyżej zakresie temperatur skala ta bardzo mało różni się od skali gazowej: największa różnica (w temperaturze — 240° C) nie przekracza 0,135° C, w temperaturach od 0° do 100° praktycznie równa jest zeru.

W podanym wyżej określeniu temperatury wodorowej nie uwzględnialiśmy ani rozszerzalności naczynia, ani też tego, że część gazu, wypełniająca rurkę, łączącą zbiornik z manometrem, tzw. przestrzeń szkodliwa, posiada pospolicie inną temperaturę, niż gaz w zbiorniku. Wprowadzenie odpowiednich poprawek doprowadza do bardziej złożonego wzoru

$$t_H = \frac{p_t - p_0}{a p_0 - a' p_t}\left[1 + \frac{v}{V_0} \cdot \frac{1}{1 + a t'} \cdot \frac{p_t}{p_0}\right], \qquad \text{(a')}$$

gdzie $\alpha = \frac{p_{100} - p_0}{100\,p_0}$, α' — spółczynnik rozszerzalności zbiornika, v — pojemność przestrzeni szkodliwej, V_0 — pojemność zbiornika w temperaturze 0°, t' — temperatura przestrzeni szkodliwej.

Chappuis w 1888 r. zbudował termometr wodorowy, służący do cechowania innych termometrów podstawowych, w którym pojemność przestrzeni szkodliwej jest tak mała, że $\frac{v}{V_0} < 0{,}001$.

W temperaturach wyższych ponad 300° C wodór przenika przez ściany zbiornika i uchodzi na zewnątrz, wobec czego w tych temperaturach używany jest, jako ciało termometryczne, azot, którego wskazania w temperaturze 1000° różnią się zaledwie o 0,77° C (według Berthelota, 1903 r.) od wskazań, jakie byśmy otrzymali, posiłkując się skalą gazową. W temperaturach ponad 1600° C trudności, jakie nastręcza budowa zbiornika, dostatecznie odpornego na ogrzewanie do wysokich temperatur, są tak wielkie, że uniemożliwiają używanie termometrów gazowych; powyżej więc tej granicy stosuje się do wyznaczania temperatur metody optyczne, oparte na prawach, rządzących promieniowaniem ciał. Przy wyznaczaniu temperatur niskich (poniżej — 200° C) używany jest termometr, wypełniony helem. Wskazania tego termometru wykazują w niskich temperaturach bardzo niewielkie odchylenia od skali gazowej: w temperaturach od — 250° C do — 100° C nie przekraczają one 0,02° C według Kamerlingh Onnesa i Braaka (1911 r.).

Termometry gazowe są jednak niedogodne w użyciu i służą najczęściej jedynie do cechowania termometrów użytkowych. Takim termometrem, pozwalającym z dostateczną dokładnością wyznaczać temperatury od — 40° C do + 630° C, jest oporowy termometr platynowy, w którym wielkością termometryczną jest opór elektryczny drutu platynowego. Niech r_0 będzie oporem drutu w temperaturze 0° C, opór r_t w temperaturze t_p wyraża się wzorem

$$r_t = r_0\,(1 + at_p + bt_p^2), \qquad \text{(b)}$$

gdzie wielkości stałe r_0, a, b, wyznacza się przez pomiar oporu w trzech temperaturach skali podstawowej: topnienia lodu, wrzenia wody i wrzenia siarki (wszystkie trzy pomiary pod ciśnieniem 1 Atm) i przez podstawienie do wzoru (b) liczby

stopni skali gazowej, odpowiadających tym trzem temperaturom (0° C, 100° C, 444,55° C). Różnice pomiędzy tą skalą i skalą gazową są na ogół niewielkie: poprawki w granicach od 0° do 100° C nie przekraczają 0,01°.

Termometru tego można również używać w temperaturach niższych: od — 40° C do mniej więcej — 193° C. Wtedy jednak zależność oporu od temperatury jest o wiele bardziej złożona. Według Henninga i Heuse'go (1924 r.) wyraża się ona wzorem

$$r_t = r_0 (1 + ct + dt^2 + et^4), \quad \text{(b')}$$

gdzie stałe c, d, e, wyznacza się z pomiaru oporów w temperaturach krzepnięcia rtęci (— 38,87° C), wrzenia dwutlenku węgla (— 78,51° C) i wrzenia tlenu (— 183,00° C) pod ciśnieniem normalnym.

Powyżej temperatury + 630° C (temperatury topnienia antymonu) za wielkość termometryczną przyjmuje się siłę elektrobodźczą (elektromotoryczną) ogniwa termoelektrycznego, zbudowanego z platyny i z 10%-wej platyny rodowej. Odchylenia od skali gazowej wynoszą poniżej temperatury 1200° C nie więcej, niż 1° C, powyżej mogą dochodzić do 5° C.

Oprócz tych głównych termometrów pomocniczych są w codziennym użyciu termometry, w których temperatury wyznacza się ze zmian objętości cieczy, a raczej z nadwyżki tych zmian nad zmianami objętości naczynia. Najpospolitszym typem takich termometrów jest termometr rtęciowy.

Skale tych termometrów, oparte na pozornej rozszerzalności (ust. 3) cieczy, wtedy tylko są porównywalne, gdy zbiorniki termometrów zrobione są z tego samego materiału. Zależnie od gatunku użytego szkła wskazania takich termometrów mogą różnić się w temperaturze około 50° C o blisko 0,1° C.

Przy użyciu odpowiedniego gatunku szkła można różnice między skalą rtęciową i gazową doprowadzić, w granicach temperatur od 0° C do 100° C, do wartości nie większej od 0,03° C, w temperaturach jednak wyższych różnica ta szybko wzrasta, dochodząc w temperaturze 300° C do przeszło 4° C.

Zakres temperatur, w których można używać termometru rtęciowego i których górną granicę stanowi temperatura wrzenia rtęci (357° C), jest znacznie rozszerzony przez zastąpienie szkła kwarcem i wypełnienie rurki włoskowatej azotem pod ciśnieniem dochodzącym

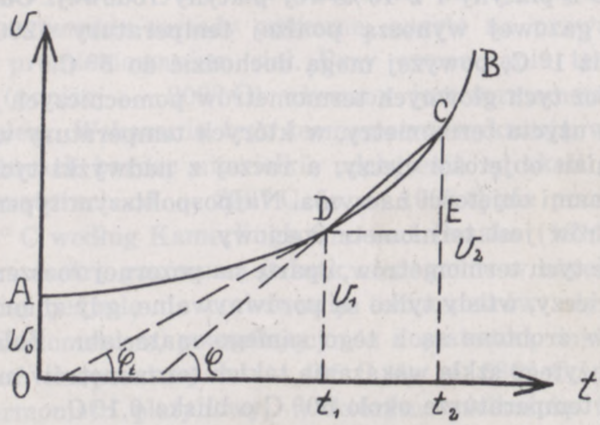
do 50 Atm. Pod takim ciśnieniem, wzrastającym w miarę podnoszenia sie słupka rtęci, rtęć wrze w temperaturze o wiele wyższej.

Dla wyznaczania temperatur niższych od temperatury krzepnięcia rtęci (— 38,87° C) używa się termometrów, wypełnionych cieczami krzepnącymi w niższych temperaturach, jak np. alkoholem (do — 100° C), lub pentanem (do — 190° C). Termometry te są zazwyczaj cechowane przez porównanie ze wskazaniami termometru gazowego.

2. SPÓŁCZYNNIK ROZSZERZALNOŚCI. ROZSZERZALNOŚĆ CIAŁ STAŁYCH

W rozważaniach ustępu poprzedniego wspomnieliśmy, że zmiany objętości, jakich doznają ciała, ogrzewane do tej samej temperatury, zależą przede wszystkim od rodzaju badanego ciała.

Niech v_0 będzie objętością w temperaturze 0° C ciała, ogrzewanego pod stałym ciśnieniem do coraz to wyższej temperatury. Odkładajmy na osi odciętych temperatury (w skali gazowej), na osi rzędnych odpowiadające im objętości (rys. 192).



rys. 192

Otrzymamy na ogół pewną krzywą *AB*, wyrażającą zależność objętości v od temperatury t. Oznaczając przez v_1 objętość ciała w temperaturze t_1, przez v_2 objętość w temperaturze t_2, nazwiemy **średnim spółczynnikiem rozszerzalności objętościowej w granicach temperatur** t_1 i t_2, wielkość

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{v_0}\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \qquad (2)$$

Z ΔDCE, gdzie $CE = v_2 - v_1$, $DE = t_2 - t_1$, znajdujemy, że $tg\,\varphi = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$, a więc że $\alpha_{1,2} = \frac{1}{v_0} tg\,\varphi$. Zakładając, że objętość początkowa, przez którą rozumieć będziemy objętość w temperaturze 0° C, równa jest jedności, znajdziemy, że

$$\alpha_{1,2} = tg\,\varphi;$$

średni spółczynnik rozszerzalności jest zatem równy liczbowo tangensowi kąta, jaki tworzy z osią t prosta, łącząca punkty krzywej, odpowiadające temperaturom granicznym.

Gdy różnicę temperatur będziemy stopniowo zmniejszali, cięciwa DC będzie przybliżała się coraz bardziej do stycznej, tak, że w granicy kąt φ stanie się równy kątowi, jaki tworzy z osią t styczna do krzywej w punkcie D (lub w nieograniczenie bliskim punkcie C). Będziemy mieli wtedy

$$\alpha_t = \frac{1}{v_0} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{v_0} \frac{dv}{dt}, \tag{2 a}$$

gdzie α_t jest **spółczynnikiem rozszerzalności objętościowej w temperaturze** t. Kładąc, podobnie, jak poprzednio, $v_0 = 1$, otrzymamy

$$\alpha_t = tg\,\varphi_t.$$

Zależnie zatem od temperatury, w której wykonywany jest pomiar, otrzymamy różne na ogół wartości spółczynników $\alpha_{1.2}$ i α_t; mają one wartość stałą tylko w przypadku szczególnym, gdy linia AB jest linią prostą, gdy więc objętość zmienia się proporcjonalnie do temperatury. Wtedy zależność objętości od temperatury wyraża się wzorem

$$v_t = v_0\,(1 + \alpha t). \tag{2 b}$$

Pospolicie jednak zależność ta wyraża się wzorem bardziej złożonym, któremu zazwyczaj możemy nadać postać

$$v_t = v_0\,(1 + At + Bt^2 + Ct^3), \tag{2 c}$$

gdzie A, B, C są spółczynnikami stałymi, wyznaczanymi z pomiarów objętości w dowolnie wybranych temperaturach t_1, t_2, t_3.

Ustalenie wartości spółczynników A, B, C pozwala wyznaczyć spółczynnik rozszerzalności a_t. Różniczkując równanie (2 c), otrzymujemy

$$dv_t = v_0\,(A dt + 2\,Bt dt + 3\,Ct^2 dt)$$

$$a_t = \frac{1}{v_0}\frac{dv}{dt} = A + 2\,Bt + 3\,Ct^2. \tag{2 d}$$

W przypadku ciał stałych poprzestajemy najczęściej na pomiarze rozszerzalności liniowej, tzn. na pomiarze zwiększania się długości ciała w pewnym wybranym przez nas kierunku. Niech l_0 będzie długością w temperaturze 0° C, l_1 i l_2 — długościami w temperaturach t_1 i t_2. *Średnim spółczynnikiem rozszerzalności liniowej w granicach temperatur* t_1 i t_2 nazwiemy wielkość

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{l_0}\cdot\frac{l_2 - l_1}{t_2 - t_1} \tag{3}$$

i analogicznie *spółczynnikiem rozszerzalności liniowej w temperaturze* t

$$\beta_t = \frac{1}{l_0}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{1}{l_0}\frac{dl}{dt}. \tag{3 a}$$

Przypuśćmy, że badane ciało jest ciałem izotropowym, mającym kształt sześcianu o bokach, równych w temperaturze topniejącego lodu l_0, i załóżmy, co w niewielkim zakresie temperatur można zawsze zrobić bez popełnienia większego błędu, że spółczynniki α i β podczas pomiaru zachowują wartość stałą. Po ogrzaniu do temperatury t objętość sześcianu

$$v_t = v_0\,(1 + \alpha t)$$

każdy zaś z boków

$$l_t = l_0\,(1 + \beta t),$$

tak, że

$$v_t = v_0\,(1 + \alpha t) = l_0^3\,(1 + \beta t)^3.$$

Otwierając nawias, skracając przez $v_0 = l_0^3$ i przez t oraz odrzucając wyrazy, zawierające drugie i trzecie potęgi β, jako bardzo małe w porównaniu z innymi, gdyż β ma na ogół wartość niewielką, znajdziemy

$$\alpha = 3\,\beta. \tag{4}$$

Ciała anizotropowe, a więc przede wszystkim kryształy, z wyjątkiem należących do układu sześciennego (równoosiowego),

posiadają, jak to pierwszy wykazał Mitscherlich (1824 r), w różnych kierunkach różne spółczynniki rozszerzalności.

Tę niejednakową rozszerzalność w różnych kierunkach można w prosty sposób stwierdzić na bryle gipsu, mającej w temperaturze pokojowej kształt kulisty; przy ogrzewaniu kula ta przechodzi w elipsoid.

Wytnijmy z badanego ciała sześcian, o bokach długości l_0 w temperaturze 0° C. Po ogrzaniu sześcian ten zamienia się na ogół w prostopadłościan, o bokach odpowiednio równych

$$l_1 = l_0(1+\beta_1 t),\ l_2 = l_0(1+\beta_2 t) \text{ i } l_3 = l_0(1+\beta_3 t)$$

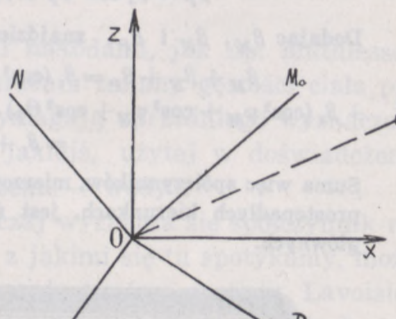
$$v_t = v_0(1+\alpha t) = l_0^3(1+\beta_1 t)(1+\beta_2 t)(1+\beta_3 t).$$

Odrzucając wyrazy, zawierające iloczyny $\beta_1\beta_2, \beta_2\beta_3, \beta_1\beta_3$ i $\beta_1\beta_2\beta_3$, otrzymamy

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3. \tag{4a}$$

Dla wyznaczenia zatem spółczynnika rozszerzalności objętościowej takich ciał wystarczy zmierzyć spółczynniki rozszerzalności liniowej w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach.

Wynik, wyrażony wzorem (4 a), nie zależy od wyboru kierunków, w których mierzymy β. Wybierzmy w krysztale trzy wzajemnie prostopadłe kierunki, posiadające tę własność, że elementy objętości, leżące na prostych, wyznaczających te kierunki lub równoległych do nich, będą przy ogrzewaniu pozostawały stale na tych samych prostych. Proste te weźmy za osie spółrzędnych (rys. 193) i nazwijmy spółczynniki β_1, β_2, β_3 w tych kierunkach spółczynnikami **g ł ó w n y m i**. Niech M_0 będzie elementem objętości kryształu, leżącym w odległości r_0 od O, na prostej OM_0, tworzącej z osiami kąty φ_M, ψ_M, Θ_M tak, że mamy $x_0 = r_0 \cos\varphi_M$, $y_0 = r_0\cos\psi_M$, $z = r_0\cos\Theta_M$. Po ogrzaniu ciała spółrzędne te przybierają wartości



rys. 193

$$x_t = x_0(1+\beta_1 t);\ y_t = y_0(1+\beta_2 t);\ z_t = z_0(1+\beta_3 t), \tag{a}$$

skąd, wobec tego, że spółczynniki β_1, β_2, β_3 posiadają wartości różne, wynika, że nie tylko długość, lecz i kierunek odcinka OM ulega zmianie. Oznaczmy długość OM_t przez r_t i napiszmy, że

$$r_t = r_0 (1 + \beta_M . t), \tag{b}$$

gdzie przez β_M będziemy rozumieli spółczynnik rozszerzalności liniowej w kierunku, tworzącym kąty φ_M, ψ_M i Θ_M z osiami x, y, z. Ze wzorów (a) mamy

$$r_t^2 = x_t^2 + y_t^2 + z_t^2 = x_0^2 (1 + \beta_1 t)^2 + y_0^2 (1 + \beta_2 t)^2 + z_0^2 (1 + \beta_3 t)^2 =$$
$$= r_0^2 [(1 + \beta_1 t)^2 \cos^2 \varphi_M + (1 + \beta_2 t)^2 \cos^2 \psi_M + (1 + \beta_3 t)^2 \cos^2 \Theta_M];$$

po odrzuceniu zaś wyrazów, zawierających drugie potęgi β

$$r_t^2 = r_0^2 + 2 r_0^2 (\beta_1 \cos^2 \varphi_M + \beta_2 \cos^2 \psi_M + \beta_3 \cos^2 \Theta_M) . t \tag{c}$$

Podnosząc równanie (b) do potęgi drugiej i podstawiając do wzoru (c) zamiast r_t^2 otrzymane w ten sposób wyrażenie, znajdziemy

$$r_0^2 + 2 r_0^2 \beta_M . t = r_0^2 + 2 r_0^2 . t (\beta_1 \cos^2 \varphi_M + \beta_2 \cos^2 \psi_M + \beta_3 \cos^2 \Theta_M)$$

i ostatecznie

$$\beta_M = \beta_1 \cos^2 \varphi_M + \beta_2 \cos^2 \psi_M + \beta_3 \cos^2 \Theta_M . \tag{d}$$

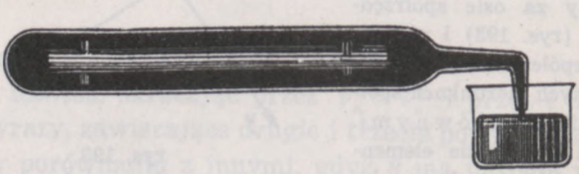
Przeprowadźmy w krysztale jeszcze dwie proste ON i OP, wzajemnie prostopadłe i prostopadłe do OM_0 i zastosujmy powyższe rozumowanie do elementów objętości N i P, leżących na tych prostych. Otrzymamy analogicznie

$$\beta_N = \beta_1 \cos^2 \varphi_N + \beta_2 \cos^2 \psi_N + \beta_3 \cos^2 \Theta_N$$
$$\beta_P = \beta_1 \cos^2 \varphi_P + \beta_2 \cos^2 \psi_P + \beta_3 \cos^2 \Theta_P .$$

Dodając β_M, β_N i β_P, znajdziemy

$$\beta_M + \beta_N + \beta_P = \beta_1 (\cos^2 \varphi_M + \cos^2 \varphi_N + \cos^2 \varphi_P) +$$
$$+ \beta_2 (\cos^2 \psi_M + \cos^2 \psi_N + \cos^2 \Theta_P) + \beta_3 (\cos^2 \Theta_M + \cos^2 \Theta_N + \cos^2 \Theta_P) =$$
$$= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 .$$

Suma więc spółczynników, mierzonych w trzech dowolnych wzajemnie prostopadłych kierunkach, jest żawsze równa sumie spółczynników głównych.



rys. 194

Stosunkowo najprostszym sposobem wyznaczenia spółczynnika rozszerzalności objętościowej ciał stałych jest sposób Dulonga i Petita (1816 r.) Badane ciało umieszczamy w zamkniętej

z jednego końca rurce szklanej, której drugi koniec wyciągamy w cienką rurkę (rys. 194). Przestrzeń swobodną wypełniamy całkowicie rtęcią. Oznaczmy gęstość badanego ciała w temperaturze 0° C przez ϱ_0, gęstość rtęci w tej samej temperaturze przez ϱ_0', masę ciała przez m, masę rtęci, znajdującej się w naczyniu o temperaturze 0° C, przez m'; pojemność naczynia jest w tej temperaturze równa:

$$v_0 = \frac{m}{\varrho_0} + \frac{m'}{\varrho_0'}.$$

Po ogrzaniu naczynia do temperatury t część rtęci o masie m''' się wyleje, w naczyniu pozostanie masa $m' - m''' = m''$, o gęstości $\varrho_t' = \dfrac{\varrho_0'}{1+\alpha_r . t}$, gdzie α_r średni spółczynnik rozszerzalności objętościowej rtęci. Niech α_n będzie średnim spółczynnikiem rozszerzalności objętościowej naczynia, α — analogicznym spółczynnikiem badanego ciała, pojemność naczynia w temperaturze t wyrazi się wzorem

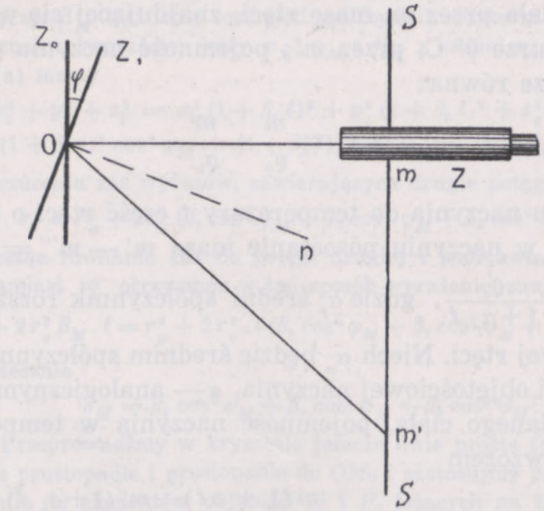
$$v_t = v_0 (1 + \alpha_n t) = \frac{m(1 + \alpha t)}{\varrho_0} + \frac{m''(1+\alpha_r . t)}{\varrho_0'}. \quad (5)$$

Chcąc z tego wzoru obliczyć α musimy uprzednio wyznaczyć spółczynniki α_n i α_r.

Podobnie jest i z innymi metodami, jak np. Mathiessena (1866 r.), polegającej na mierzeniu zmiany gęstości ciała przy ogrzewaniu. Wszystkie one wymagają uprzedniego wyznaczenia spółczynnika rozszerzalności jakiejś, użytej w doświadczeniu, cieczy (w pomiarach Mathiessena — wody).

Z tego też powodu zazwyczaj wyznacza się spółczynnik rozszerzalności β. Różne metody, z jakimi się tu spotykamy, można sprowadzić do dwu zasadniczych typów: metody Lavoisiera i Laplace'a i metody Fizeau (1864 r.). W przyrządach typu pierwszego pręt z badanego materiału, umocowany w jednym końcu, zanurzony jest do cieczy, ogrzewanej do wskazanej temperatury. Koniec swobodny zwykle opiera się o krótsze ramię dźwigni dwuramiennej, której drugie ramię jest albo wskazówką, poruszającą się po odpowiednio wycechowanej skali, albo też dźwiga lusterko, którego odchylenie wyznaczamy przy pomocy lunety i skali.

Niech Z_0 będzie początkowym położeniem lusterka; w lunecie, ustawionej poziomo, widzimy (rys. 195) odbicie podziałki m skali SS. Gdy na skutek wydłużenia pręta lusterko przybierze położenie Z_1, odchylając się o kąt φ, w lunecie zobaczymy podziałkę m'. Promień



rys. 195

OZ, który poprzednio był normalny do lusterka, obecnie tworzy z normalną do niego kąt φ, taki sam przeto kąt z normalną tworzy odpowiadający mu promień $m'O$, wobec czego kąt ZOm' równy jest 2φ. Z $\Delta\, ZOm'$ znajdujemy: $mm' = Om \cdot tg\, 2\varphi$ lub w przypadku, gdy kąt φ jest mały, $mm' = Om \cdot 2\varphi$, skąd $\varphi \doteq \frac{1}{2}\frac{mm'}{Om}$. Gdy wiemy, jakie wydłużenie pręta odpowiada odchyleniu lusterka o jednostkę kąta, możemy stąd wyznaczyć wydłużenie.

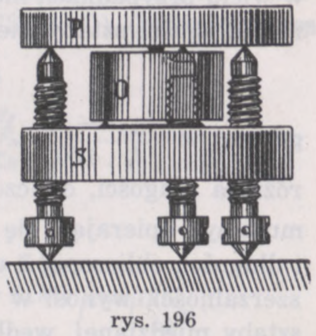
Metoda ta nie daje jednak wyników dostatecznie dokładnych, i najczęściej, gdy chodzi o pomiary precyzyjne, używa się jej jedynie do porównywania rozszerzalności liniowej danego ciała z rozszerzalnością ciała, którego spółczynnik β jest znany.

Jednym z dokładniejszych sposobów takiego pomiaru jest sposób następujący. Badane ciało w kształcie walca, o podstawach możliwie równych, umieszczone jest w pionowej rurze szklanej, opierając się dolną swą powierzchnią na dość tępym ostrzu szklanym, spojonym z dnem rury. Na górną powierzchnię kładzie się walec szklany, również zakończony ostrzem i mogący się swobodnie przesuwać w rurze. Na walcu tym, jak i na otaczającej go części rury szklanej, znajdują

się podziałki. Notuje się wzajemne położenie tych podziałek w początkowej temperaturze cieczy, do której przyrząd jest zanurzony, a następnie, gdy przy rozszerzaniu się badanego ciała stykający się z nim walec podnosi się do góry, ich położenie końcowe, wyznaczając w ten sposób przesunięcie względne. Po wycechowaniu przyrządu (przez wyznaczenie przesunięcia względnego przy umieszczeniu w rurze ciała o znanym spółczynniku rozszerzalności liniowej) można używać go do pomiaru β dowolnego ciała. Podobną metodą posługiwali się Kamerlingh Onnes i van Agt (1925 r.) przy wyznaczaniu spółczynnika rozszerzalności szkła w niskich temperaturach. Wewnętrzną powierzchnię rury szklanej o podwójnych ścianach, między którymi była wytworzona próżnia, oziębiano do odpowiedniej temperatury, zewnętrzna miała temperaturę pokojową. Przesunięcie rury zewnętrznej względem wewnętrznej wyznaczano ze zmiany położenia ostrzy platynowych, wtopionych po dwa na górnych i dolnych końcach zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni rury.

Większą dokładność można osiągnąć, używając drugiej ze wspomnianych metod — metody Fizeau, w której zmiany wymiarów liniowych wyznacza się sposobami optycznymi.

W najprostszej postaci przyrząd Fizeau składa się z okrągłego stolika *S*, przez który przechodzą trzy śruby o jednakowej długości (rys. 196). Na ostrza śrub kładzie się płytkę równoległościenną ze szkła, kryształu górskiego lub kwarcu, w ten sposób, aby płaszczyzny stolika i płytki przecinały się pod niewielkim kątem; zawarta między nimi warstewka powietrza ma wtedy kształt klina. Oświetlając z góry przyrząd światłem jednorodnym, widzimy na powierzchni płytki prążki ciemne i jasne, równoległe do krawędzi przecięcia się danych płaszczyzn; prążki te powstają na skutek interferencji promieni, odbijających się od tylnej powierzchni płytki i od stolika, przy czym prążki ciemne powstają w tych miejscach, gdzie grubość warstewki powietrza równa jest $n\frac{\lambda}{2}$, gdzie n jest liczbą całkowitą, mogącą przybierać wartości 0, 1, 2, 3 . . . ., λ — długością fali użytego światła. Przy ogrzewaniu przyrządu zwiększanie się długości śrub powoduje zmianę grubości warstewki powietrza, wobec czego następuje przesuwanie się prążków. Każdemu przesunięciu się prążka ciemnego na miejsce sąsiedniego odpowiada wydłużenie się śrubek o $\frac{\lambda}{2}$, jeżeli więc podczas



rys. 196

ogrzewania przesunie się przez dane miejsce na płytce N prążków, wydłużenie $l_0(1+\beta_s t) - l_0 = l_0 \beta_s t$ (w przypuszczeniu, że początkowa temperatura była równa zeru) będzie równe $N\frac{\lambda}{2}$. Stąd obliczamy spółczynnik rozszerzalności śrub. Znając go, możemy wyznaczyć spółczynnik β dowolnego ciała. Ciało to, (na rysunku oznaczone przez O), którego górna powierzchnia jest tak zeszlifowana, że tworzy zwierciadło, umieszczamy, wysuwając odpowiednio śrubki, aby podobnie, jak poprzednio, płaszczyzna jego powierzchni była pod niewielkim kątem nachylona do płytki równoległościennej. Zmiana grubości warstewki powietrza i wywołane przez nią przesuwanie się prążków będzie tym razem spowodowane przez różnicę rozszerzalności śrubek i ciała. Rozumując, jak poprzednio, znajdziemy

$$N\frac{\lambda}{2} = l'_0 \beta_s t - l''_0 \beta_c t,$$

gdzie l'_0 — wysokość początkowa śrubek ponad stolikiem, l''_0 — wysokość początkowa ciała, równa mniej więcej l'_0, β_c — szukany spółczynnik rozszerzalności.

Metodę Fizeau udoskonalili Benoît (1888 r.), Abbe (1889 r.) i Pulfrich (1898 r.).

Rozszerzalność ciał stałych w temperaturach bliskich pokojowej mało stosunkowo zmienia się z temperaturą, tak, że w wielu przypadkach możemy bez wielkiego błędu obliczać przyrost długości sztaby metalowej ze wzoru

$$l_t = l_0(1 + \beta_s . t), \tag{6}$$

gdzie $\beta_s = \frac{l_{100} - l_0}{l_0 . 100}$. Dla sztaby ołowianej o długości 1 m różnica długości, obliczonej z tego wzoru, gdzie na β_s przyjmujemy, opierając się na pomiarach Mathiessena, $28 . 10^{-6}$, i długości, obliczonej z uwzględnieniem zmian spółczynnika rozszerzalności, wynosi w temperaturze 50° C około 0,02 mm, dla sztaby miedzianej, według danych Fizeau (1869 r.), nieco więcej, około 0,026 mm. W temperaturach wyższych od 100° C i niższych od 0° C takie uproszczenie rachunku prowadzi jednak do błędów o wiele większych. W temperaturach wyższych długość ciała można zazwyczaj wyrazić wzorem

$$l_t = l_0(1 + at + bt^2), \tag{7}$$

gdzie a i b są wielkościami, zależnymi jedynie od rodzaju ciała.

Ze wzoru (7) znajdujemy, że spółczynnik rozszerzalności liniowej w temperaturze t wyraża się wzorem

$$\beta_t = \frac{1}{l_0}\frac{dl_t}{dt} = a + 2bt, \tag{7a}$$

jest więc funkcją liniową temperatury.

Tytułem przykładu przytaczamy tu dane, otrzymane przez Scheela (1902 r.) dla platyny i pewnego gatunku szkła jenajskiego (borokrzemowego 59‴). Dla platyny

$$l_t = l_0\,(1 + 8{,}806.10^{-6}\,t + 0{,}00195.10^{-6}\,t^2)$$

dla szkła

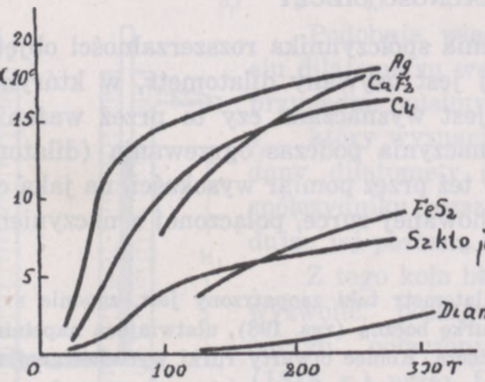
$$l_t = l_0\,(1 + 5{,}608.10^{-6}\,t + 0{,}00290.10^{-6}\,t^2)$$

W temperaturach niskich (takich np. jak temperatura wrzenia powietrza) wzory typu (7) nie odpowiadają na ogół rzeczywistemu przebiegowi zjawiska. Dla niektórych metali wyniki pomiarów odtwarza z dostatecznym przybliżeniem wzór Thiesena (1908 r.)

$$l = l_0\,(1 + k\,t^{1+\varepsilon}), \tag{7b}$$

gdzie k i ε są wielkościami charakterystycznymi dla danego ciała.

W temperaturach niskich spółczynnik rozszerzalności gwałtownie maleje wraz z obniżaniem się temperatury, dochodząc do wartości znikomo małej już w temperaturach, leżących znacznie wyżej od zera bezwzględnego (— 273,16° C) (patrz. wykres



rys. 197

rys. 197, z pracy Simona 1930 r.). Dla ciał równokierunkowych β ma zawsze wartość dodatnią, tak, że wszystkie te ciała mają spółczynnik α większy od zera. Inaczej rzecz się ma z ciałami różnokierunkowymi. Pewne kryształy (np. szmaragd, szpat

islandzki) w niektórych kierunkach kurczą się przy ogrzewaniu; kurczenie to jest jednak mniejsze od rozszerzania się w kierunku prostopadłym, wobec czego spółczynnik rozszerzalności objętościowej i dla tych ciał jest dodatni. Wyjątek stanowi jodek srebra (AgI), dla którego α jest ujemne.

Jak wynika jednak z pomiarów Radwella (1877 r.), α jest ujemne w pewnych tylko granicach temperatur; w temperaturze 142° C jodek srebra ma największą gęstość.

Kauczuk napięty zachowuje się przy ogrzewaniu tak, jak ciało anizotropowe, kurczy się w kierunku działającego napięcia, rozszerza się w kierunku prostopadłym, zwiększając nieznacznie swoją objętość.

Druty metalowe napięte wydłużają się bardziej przy ogrzewaniu, niż druty swobodne; jest to jednak, jak wykazał Dahlander (1868 r.), związane ze zmniejszaniem się modułu Younga (rozdz. V, ust. 6) przy ogrzewaniu.

Stal niklowa (o 36% niklu) tzw. inwar (łac. invarians — niezmienny) posiada znikomo mały spółczynnik rozszerzalności liniowej, równy $0{,}9.10^{-6}$, a więc przeszło 10 razy mniejszy od spółczynnika β zwykłej stali.

3. ROZSZERZALNOŚĆ CIECZY

Do wyznaczenia spółczynnika rozszerzalności objętościowej cieczy najczęściej jest używany dilatometr, w którym zmiana objętości cieczy jest wyznaczana czy to przez ważenie cieczy, wypływającej z naczynia podczas ogrzewania (dilatometr wagowy, ust. 2), czy też przez pomiar wysokości, na jaką ciecz podnosi się w wycechowanej rurce, połączonej z naczyniem, zawierającym ciecz.

Często dilatometr taki zaopatrzony jest, zgodnie z zaleceniem Ostwalda, w rurkę boczną (rys. 198), ułatwiającą napełnianie zbiornika badaną cieczą. Koniec otwarty rurki wycechowanej zanurzamy do badanej cieczy i, wyciągając powietrze przez rurkę r, wciągamy ciecz do dilatometru; po napełnieniu zamykamy otwór rurki bocznej.

Niech w temperaturze 0° ciecz wypełnia zbiornik dilatometru do podziałki 0 na skali rurki, po ogrzaniu zaś do t° C — do podziałki n. Oznaczmy pojemność zbiornika w temperaturze 0° i t° C odpowiednio przez V_0 i V_t, pojemność zaś rurki między

dwiema kolejnymi podziałkami przez v_0 i v_t, objętość cieczy po nagrzaniu jest zatem równa

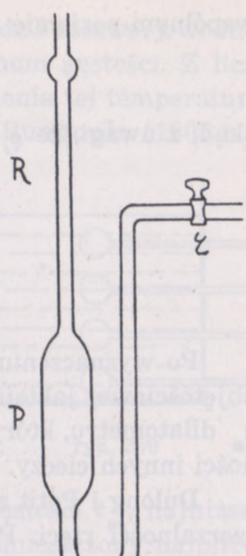
$$V'_c = V_t + nv_t,$$

gdzie nv_t nazwiemy pozornym przyrostem objętości cieczy, wielkość zaś $\frac{nv_t}{V_t \cdot t} = \Delta_{0,t}$ **s p ó ł c z y n n i k i e m   p o z o r n e j   r o z s z e r z a l n o ś c i   o b j ę t o ś c i o w e j.** Możemy napisać

$$V'_c = V_t(1+\Delta_{0,t}t) = V_0(1+\alpha_n t)(1+\Delta_{0,t} \cdot t),$$

gdzie α_n jest średnim spółczynnikiem rozszerzalności objętościowej naczynia. Po otwarciu nawiasów i odrzuceniu iloczynu $\alpha_n \cdot \Delta_{0,t}$, jako wielkości małej w porównaniu z innymi, otrzymujemy

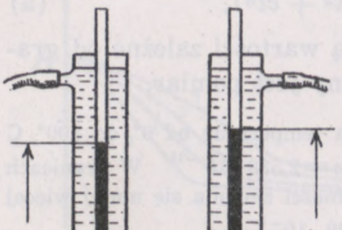
$$V'_c = V_0(1 + \alpha_n t + \Delta_{0,t} \cdot t).$$



rys. 198

Podstawiając $V'_c = V_0\,(1 + \alpha_{0,t} \cdot t)$, gdzie $\alpha_{0,t}$ jest średnim spółczynnikiem rozszerzalności objętościowej cieczy, mamy

$$\alpha_{0,t} = \alpha_n + \Delta_{0,t}. \tag{8}$$



rys. 199

Podobnie więc, jak przy użyciu dilatometru wagowego, i w tym przypadku musimy znać spółczynnik α_n, który wyznaczamy, napełniając dany dilatometr cieczą o znanym spółczynniku rozszerzalności i znajdując jej pozorną rozszerzalność.

Z tego koła błędnego można się wyzwolić, posługując się metodą naczyń połączonych, opracowaną (1818 r.) przez Dulonga i Petita. Rury pionowe, napełnione częściowo badaną cieczą i połączone u dołu rurką poziomą, umieszczone są w naczyniach o różnych temperaturach, np. 0° i t° C. Z równości ciśnień na

wspólnym poziomie rurki łączącej wynika, że

$$h_0 \varrho_0 g = h_t \varrho_t . g,$$

skąd, z uwagi, że $\varrho_t = \frac{\varrho_0}{1 + \alpha_{0,t} . t}$, znajdujemy

$$1 + \alpha_{0,t} . t = \frac{h_t}{h_0}$$

$$\alpha_{0,t} = \frac{h_t - h_0}{h_0 . t}.$$

Po wyznaczeniu w ten sposób spółczynnika rozszerzalności objętościowej jakiejś dowolnej cieczy, ze wzoru (8) wyznaczamy α_n dilatometru, który może wtedy służyć do pomiarów rozszerzalności innych cieczy.

Dulong i Petit zastosowali swą metodę do wyznaczenia rozszerzalności rtęci. Pomiary ich zostały powtórzone przez Regnaulta (1847 r.), który, zachowując samą zasadę pomiaru, usunął przez odpowiednie zmiany budowy przyrządu najjaskrawsze jej braki, a następnie przez Recknagela (1864 r.), Wüllnera (1874 r.) i innych.

Badania te ustaliły, że zależność objętości rtęci od temperatury wyraża się wzorem

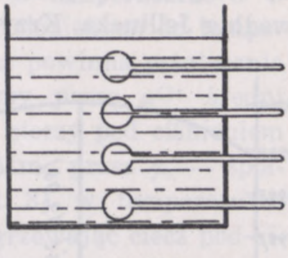
$$v_t = v_0 (1 + at + bt^2 + ct^3), \tag{a}$$

gdzie jednak spółczynniki *a, b, c* mają wartości zależne od granic temperatury, w jakich wykonywany jest pomiar.

Według Callendara (1910 r.) dla temperatur od 0° do 300° C $a = 1{,}805553 . 10^{-4}$; $b = 1{,}2444 . 10^{-8}$; $c = 2{,}539 . 10^{-11}$ W granicach od 0° do 100° C spółczynnik rozszerzalności zmienia się mniej więcej o 1%, od wartości $1{,}8056 . 10^{-4}$ do $1{,}829 . 10^{-4}$.

Podobnie, jak rtęć, rozszerzają się i inne ciecze. Spółczynnik ich rozszerzalności, zazwyczaj większy, niż dla rtęci, posiada stale wartość dodatnią, szybko wzrastającą w miarę wzrostu temperatury. Tak np. dla alkoholu etylowego spółczynnik ten wzrasta od wartości $10{,}42 . 10^{-4}$, jaką ma w temperaturze 0° C, do $11{,}99 . 10^{-4}$ w temperaturze 100° C, a więc o przeszło 10%. W paru zaledwie przypadkach (jak np. oliwy) spółczynnik ten w pewnych granicach temperatury maleje, zachowując jednak

stale wartość dodatnią. Wyjątek stanowi woda i roztwory wodne, posiadające w pewnej temperaturze maximum gęstości. Z licznych metod, użytych do dokładnego wyznaczenia tej temperatury dla wody, opiszemy tylko jedną — Hope a i Rumforda (1805 r.). W boczną ścianę naczynia z wodą wstawia się poziomo kilka termometrów tak, aby zbiorniki z rtęcią leżały na osi naczynia, przy czym jeden z nich znajduje się w pobliżu powierzchni cieczy, inny zaś w pobliżu dna naczynia (rys. 200). Przy powolnym ochładzaniu warstwy o gęstości większej będą opadały na dół, lżejsze podnosiły się do góry. Dopóki temperatury warstw wody w naczyniu będą wyższe od temperatury największej gęstości t_m, najniższą temperaturę będzie wskazywał temometr, umieszczony najbliżej dna, najwyższą — termometr, znajdujący się u góry; w temperaturach niższych od t_m wskazania termometrów będą odwrotne; różnice wskazań będą najmniejsze w pobliżu temperatury t_m.

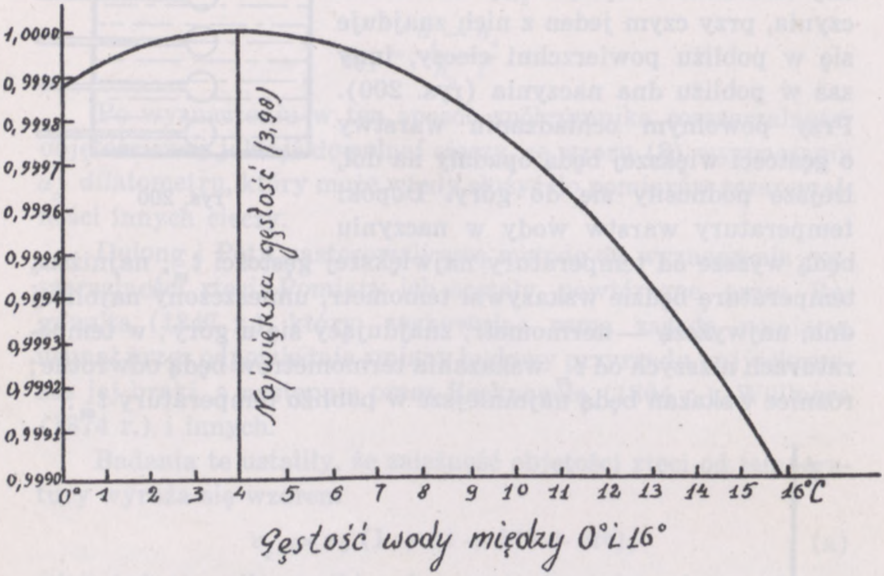

rys. 200



rys. 200 a

Jeżeli więc odkładać będziemy na osi odciętych czas, na osi rzędnych — wskazania termometrów, otrzymamy krzywe, przecinające się prawie dokładnie w jednym punkcie, odpowiadającym temperaturze największej gęstości wody (rys. 200 a). Despretz w ten właśnie sposób wyznaczył (1863 r.), że tempera-

tura ta wynosi 3,98° C. Tę samą wartość otrzymał w bardzo starannych pomiarach Coppet (1894 r.). W tej temperaturze gęstość wody wynosi, według pomiarów Benoîta i Buissona (1907 r.), 0,999 973 g/cm³. Zmiany gęstości wody w zależności od temperatury przedstawia krzywa rys. 201, którą podajemy według Jellineka. Krzywą tę można przedłużyć w kierunku tem-



rys. 201

peratur ujemnych, pomiary bowiem z wodą przechłodzoną (rozdz. XI, ust. 1), wykonane przez Pierre'a (1845 r.), Rosetti'ego (1869 r.) i innych, wykazały, że woda oziębiana poniżej temperatury krzepnięcia zwiększa w dalszym ciągu swoją objętość.

Zależność gęstości wody od temperatury Thiesen wyraził (1904 r.) następującym wzorem empirycznym

$$\varrho_t = 1 - \frac{(t-3{,}982)^2}{466\,700} \cdot \frac{t+273}{t+67} \cdot \frac{350-t}{365-t}.$$

Zależność spółczynnika rozszerzalności cieczy od ciśnienia, pod jakim ciecz się znajduje, możemy ustalić na podstawie znanej nam (rozdz. VI, ust. 3) zależności spółczynnika ściśliwości od temperatury. Przypuśćmy, że pewną masę cieczy o objętości v_0

pod ciśnieniem 1 Atm, w temperaturze 0° C chcemy doprowadzić do temperatury t° C i poddać ją ciśnieniu p Atm. Możemy to osiągnąć albo, ogrzewając ciecz pod stałym ciśnieniem do temperatury t° C i zwiększając następnie w tej temperaturze ciśnienie do p Atm, albo też, poddając ją w temperaturze 0° C ciśnieniu p Atm i ogrzewając ją pod tym ciśnieniem do temperatury t° C. W obydwu przypadkach ciecz powinna ostatecznie zajmować tę samą objętość $v_{t,p}$. Oznaczmy przez $\alpha^{(1)}$ średni spółczynnik rozszerzalności objętościowej cieczy pod ciśnieniem 1 Atm, przez $\alpha^{(p)}$ — pod ciśnieniem p Atm, przez γ_0 — spółczynnik ściśliwości cieczy (rozdz. VI, ust. 3) w temperaturze 0° C, przez γ_t — w temperaturze t° C. Ogrzewając ciecz pod ciśnieniem 1 Atm do temperatury t° C, otrzymamy

$$v_{t,1} = v_0 (1 + \alpha^{(1)} t),$$

poddając ciecz w tej temperaturze ciśnieniu p, będziemy mieli

$$v_{t,p} = v_{t,1} (1 - \gamma_t . p) = v_0 (1 + \alpha^{(1)} t)(1 - \gamma_t p). \qquad \text{(b)}$$

Zwiększając ciśnienie w temperaturze 0° C, znajdziemy

$$v_{0,p} = v_0 (1 - \gamma_0 . p),$$

ogrzewając zaś następnie do temperatury t° C

$$v_{t,p} = v_{0,p} (1 + \alpha^{(p)} t) = v_0 (1 + \alpha^{(p)} t)(1 - \gamma_0 . p). \qquad \text{(c)}$$

Przyrównywając (c) i (b), mamy

$$\frac{1 + \alpha^{(1)} t}{1 + \alpha^{(p)} t} = \frac{1 - \gamma_0 p}{1 - \gamma_t p}. \qquad (9)$$

Dla wszystkich cieczy, z wyjątkiem wody, której ściśliwość ze wzrostem temperatury, w granicach od 0° C do mniej więcej 50° C, maleje, $\gamma_0 < \gamma_t$, skąd $\alpha^{(1)} > \alpha^{(p)}$. Spółczynnik rozszerzalności objętościowej zmniejsza się ze wzrostem ciśnienia. Ten wniosek potwierdziły całkowicie doświadczenia Amagata (1893 r.) i Bridgmana (1912 r.), którzy stwierdzili również, że pod bardzo wielkimi ciśnieniami α staje się prawie niezależne od temperatury. Tak np. dla eteru etylowego pod ciśnieniem 50 Atm średni spółczynnik rozszerzalności zmienia się, według Amagata, od wartości $1511 . 10^{-6}$, jaką ma w granicach temperatur od 0° do 20°, do wartości $2112 . 10^{-6}$ w granicach od 80° do 100°, a więc o przeszło 35%, pod ciśnieniem zaś 900 Atm od $926 . 10^{-6}$ do $928 . 10^{-6}$. Wyjątku pod tym względem nie sta-

nowi również i woda. Tammann stwierdził (1912 r.), że pod ciśnieniem 100 Atm znika charakterystyczne dla tej cieczy maximum gęstości; pod ciśnieniem 3000 Atm objętość wody jest dokładnie liniową funkcją temperatury.

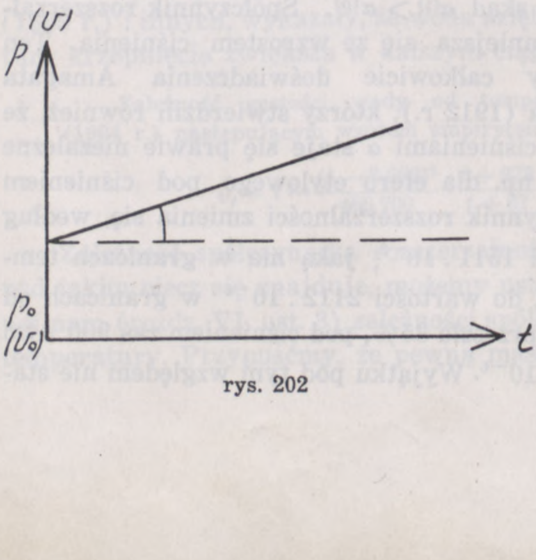
Doświadczenia te pozwoliły również wyznaczyć wzrost ciśnienia, wywieranego przez ciecz, ogrzewaną w zamkniętym naczyniu. Wzrost ten dla wszystkich cieczy, z wyjątkiem wody, jest prawie niezależny od ciśnienia początkowego i proporcjonalny do wzrostu temperatury, jak tego można było oczekiwać na podstawie zmniejszania się spółczynnika α ze wzrostem ciśnienia. Dla wody ta niezależność od ciśnienia początkowego ujawnia się dopiero w temperaturach wyższych.

4. ROZSZERZALNOŚĆ GAZÓW

W gazach wzrost prężności, towarzyszący ogrzewaniu w stałej objętości, podlega innym na ogół prawom. W gazach doskonałych jest on, jak widzieliśmy (ust. 1) w jednakowym dla wszystkich gazów stosunku do prężności w temperaturze 0° C. Z określenia zaś wybranej przez nas skali termometrycznej wynika, że wielkość, wyrażająca ten wzrost, odniesiony do jednostki początkowego ciśnienia przy ogrzaniu o 1° C

$$\alpha_p = \frac{p_t - p_0}{p_0 t}, \tag{10}$$

a którą nazwiemy spółczynnikiem rozprężliwości lub termicznym spółczynnikiem prężności gazu, posiada wartość stałą. Zmiana zatem prężności gazu doskonałego, ogrzewanego w stałej objętości, wyrazi się na wykresie (rys. 202), gdzie na osi odciętych odkładać będziemy temperatury, na osi rzędnych — ciśnienia, linią prostą, będącą w danym przypadku tzw. izochorą (gr. izos — równy, chora —



rys. 202

kraina, dziedzina). Tangens kąta nachylenia tej prostej do osi t jest proporcjonalny, a w przypadku $p_0 = 1$ równy liczbowo spółczynnikowi α_p (rys. 202). Doświadczenia Charles'a i Gay-Lussaca (ust. 1) ustaliły, że spółczynnik ten równy jest spółczynnikowi rozszerzalności objętościowej gazu pod stałym ciśnieniem α_v, tak, że kładąc $v_0 = 1$, odtworzymy zmianę objętości przy nagrzewaniu pod stałym ciśnieniem przez linię prostą, nachyloną pod tym samym kątem, co izochora, do osi t (rys. 202). Będzie to tym razem i z o b a r a.

Równość spółczynników α_p i α_v wynika bezpośrednio z prawa Boyle'a-Mariotte'a, które, jak wiadomo, przyjmujemy za obowiązujące dla gazów doskonałych. Niech v_0, p_0 będą objętością i prężnością danej masy gazu w temperaturze 0° C, v, p — w temperaturze t° C. Ogrzewajmy gaz pod stałym ciśnieniem p_0 do temperatury t° C, objętość jego przybierze wartość

$$v_t = v_0\ (1 + \alpha_v \,.\, t).$$

W tej temperaturze zmieniajmy objętość i ciśnienie tak, aby przybrały wartości v i p. Z prawa Boyle'a-Mariotte'a mamy

$$pv = p_0\ v_t = p_0\ v_0\ (1 + \alpha_v \,.\, t). \qquad \text{(a)}$$

Możemy jednak postępować i inaczej; ogrzewając gaz w stałej objętości, zwiększymy jego prężność do wartości

$$p_t = p_0\ (1 + \alpha_p \,.\, t).$$

Zmieniając i tym razem odpowiednio ciśnienie i objętość, otrzymamy

$$pv = p_t \,.\, v_0 = p_0\ v_0\ (1 + \alpha_p \,.\, t) \qquad \text{(b)}$$

Z zestawienia (a) i (b) wynika

$$\alpha_p = \alpha_v.$$

Odrzucając więc znaczki przy spółczynnikach α, możemy którykolwiek ze wzorów (a) i (b) przepisać w postaci

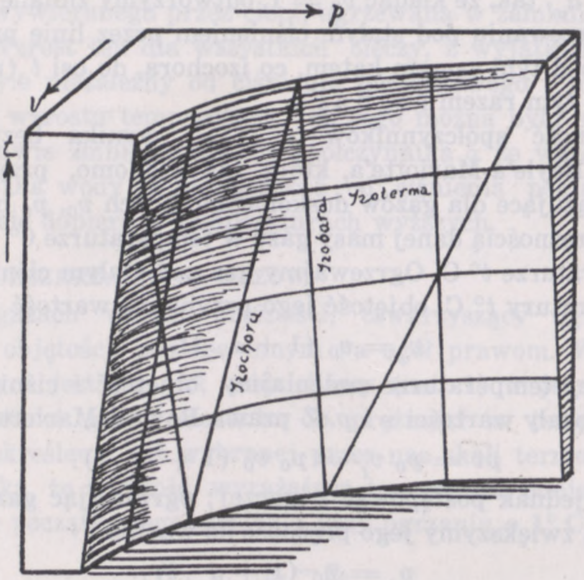
$$pv = p_0\ v_0\ (1 + \alpha t), \qquad (11)$$

otrzymując tzw. r ó w n a n i e g a z ó w d o s k o n a ł y c h.

Wartość α przyjmujemy, zgodnie z wynikami pomiarów, o których będzie mowa niżej, za równą 0,0036609 lub $\dfrac{1}{273{,}16}$ (ust. 1).

Przeprowadźmy trzy wzajemnie prostopadłe osie, na których będziemy odkładali objętości, prężności i temperatury gazu. Każda grupa wartości v, p, t wyznaczać będzie pewien punkt przestrzeni,

odpowiadający stanowi danej masy gazu. Miejscem geometrycznym tych punktów jest powierzchnia, wyznaczona przez równanie (11). Przetnijmy tę powierzchnię (rys. 203) płaszczyzną, równoległą do płaszczyzny pv. Wszystkim punktom przecięcia odpowiada ta sama wartość zmiennej t, wobec czego krzywa przecięcia jest izotermą (rozdz. VI, ust. 8), mającą, zgodnie z prawem Boyle'a-Mariotte'a,



rys. 203

kształt hiperboli równobocznej Przecięcie płaszczyzną równoległą do płaszczyzny vt, a więc płaszczyzną, której wszystkim punktom odpowiada ta sama wartość p, da nam izobarę w postaci linii prostej, skierowanej w stronę wzrastających objętości. Podobnie z przecięcia płaszczyzną, równoległą do płaszczyzny pt, otrzymamy izochorę. Biorąc inną masę gazu otrzymamy powierzchnię tego samego kształtu, równoległą do poprzedniej.

W równaniu (11) t jest temperaturą, wyznaczoną w skali gazowej. W skali bezwzględnej temperatura ta jest, jak wiadomo (ust. 1), równa $T = t + 273{,}16$. Podstawiając ją zamiast t, otrzymamy

$$pv = p_0 v_0 \left(1 + \frac{T - 273{,}16}{273{,}16}\right) = \frac{p_0 v_0}{273{,}16} T = RT, \qquad (12)$$

gdzie R jest stałą gazową. Wzór (12) często bywa nazywany równaniem Clapeyrona. Oznaczmy przez T_0

temperaturę bezwzględną topniejącego lodu, równą 273,16° *K*. Wzór (12) przepiszemy w postaci

$$\frac{pv}{T} = \frac{p_0 v_0}{T_0} = R. \tag{12a}$$

Wybierzmy za jednostkę masy masę jednej drobiny gramowej (mola), tzn. masę, zawierającą tyle gramów, ile jednostek zawiera ciężar drobinowy danego gazu, za jednostkę ciśnienia 1 Atm, za jednostkę objętości 1 litr.

Wielkość *R* będzie miała wtedy dla wszystkich gazów doskonałych o masie równej drobinie gramowej wartość jednakową, z prawa bowiem Avogadro wynika, że objętość drobiny gramowej pod danym ciśnieniem i w danej temperaturze jest dla wszystkich gazów doskonałych jednakowa. Wybierając za gaz wzorcowy tlen pod ciśnieniem 1 Atm w temperaturze 0° i obliczając z wyznaczonej doświadczalnie wartości iloczynu $p'_0 v'_0$ jednej drobiny gramowej tego gazu wartość tego iloczynu dla gazu doskonałego o tej samej temperaturze, otrzymamy

$$R = \frac{p_0 v_0}{273{,}16} = \frac{22{,}415}{273{,}16} = 0{,}08205 \frac{1 \times \text{Atm}}{\text{stop.}} \tag{13}$$

Jak o tym była już mowa w ust. 8, rozdz. VI, równanie izotermy dla niewielkich ciśnień możemy przedstawić w postaci

$$pv = A + Bp,$$

gdzie *A* wartość iloczynu dla ciśnień znikomo małych, a więc dla stanu bliskiego stanowi gazu doskonałego. Oznaczając przez $p'_0 v'_0$ wartość iloczynu dla gazu rzeczywistego pod ciśnieniem 1 Atm w temperaturze 0° C, przez $p_0 v_0 = A$ wartość dla gazu doskonałego o tej samej temperaturze i, oczywiście, tej samej masie, otrzymujemy

$$p'_0 v'_0 = p_0 v_0 \left(1 + \frac{Bp'_0}{p_0 v_0}\right) = p_0 v_0 (1 + b),$$

skąd

$$p_0 v_0 = \frac{p'_0 v'_0}{1 + b}.$$

Litr tlenu waży w temperaturze 0° C pod ciśnieniem 1 Atm 1,42892 g, objętość więc jednego grama wynosi $\frac{1}{1{,}42892}$ l, objętość zaś drobiny gramowej o masie 32 g — $\frac{32}{1{,}42892}$ l, iloczyn zatem

$$p'_0 v'_0 = \frac{32}{1{,}42892} 1 \times \text{Atm}$$

Według danych van Laara

$$p_0 v_0 = \frac{p'_0 v'_0}{1-0{,}000956} = \frac{32}{1{,}42892\,(1-0{,}000956)} = 22{,}416\ \mathrm{l} \times \mathrm{Atm}$$

Inne pomiary prowadzą do wartości nieco mniejszej; biorąc przeciętną, otrzymujemy wartość, podaną wyżej, nieco mniejszą od przyjętej na Międzynarodowym Kongresie Chemicznym 1906 r. i wyznaczonej przez Berthelota (1904 r.) wartości 0,08207.

Znając R, możemy z wartości iloczynu $p'v'$ i stałych A, B danej izotermy wyznaczyć temperaturę bezwzględną T tej izotermy ze wzoru

$$T = \frac{pv}{R} = \frac{p'v'}{R\left(1+\frac{Bp'}{A}\right)}.$$

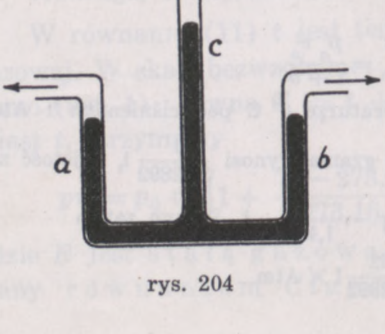
W układzie C. G. S. wartość R wynosi, po podstawieniu zamiast litra 1000,027 cm³, zamiast 1 Atm — 1013 260 dyn/cm², 8,314 . 10⁷ erg/stop.

Równanie gazów doskonałych, gdy masa gazu równa jest n drobinom gramowym, będzie miało postać następującą

$$pv = n \,.\, 0{,}08205\, T\ \mathrm{l} \times \mathrm{Atm} = n \,.\, 8{,}314 \,.\, 10^7 \,.\, T\ \mathrm{erg} \qquad (13\,\mathrm{a})$$

Gazy rzeczywiste nie podlegają jednak, jak wiemy, prawu Boyle'a-Mariotte'a i przytoczone wyżej rozumowanie, na którym oparliśmy dowód równości obydwu spółczynników termicznych gazu, do nich stosować się nie może. Pierwsze dokładne pomiary wartości spółczynników termicznych różnych gazów, zawdzięczamy Regnaultowi (1842 r.).

Różnicę wartości α_p dla różnych gazów Regnault stwierdził przy pomocy przyrządu, którego zasadniczą część stanowiła rurka, zgięta w kształt potrójnych widełek (rys. 204) i wypełniona częściowo rtęcią. Poziome rurki, stanowiące przedłużenie gałęzi a, b, prowadziły do zbiorników, z których każdy zawierał inny gaz, rurka c była otwarta. Masy gazów tak były dobrane, że w temperaturze 0° C rtęć w rurkach a i b stała na jednakowym poziomie. Po ogrzaniu obydwu zbiorników do 100° C dolewano do rurki c tyle rtęci, aby osiągnęła w rurkach bocznych poziom poprzedni. To się jednak okazało rzeczą niemożliwą: gdy rtęć w rurce a doszła do poprzedniego poziomu, w rurce b poziom był wyższy lub niższy od poprzedniego.



rys. 204

Wartości α_p i α_v Regnault wyznaczał przy pomocy przyrządów, mało różniących się, poza pewnymi szczegółami budowy, od termometru gazowego (ust. 1). Oto kilka danych, otrzymanych przez niego przy pomiarach pod ciśnieniem normalnym, w granicach od 0° do 100° C.

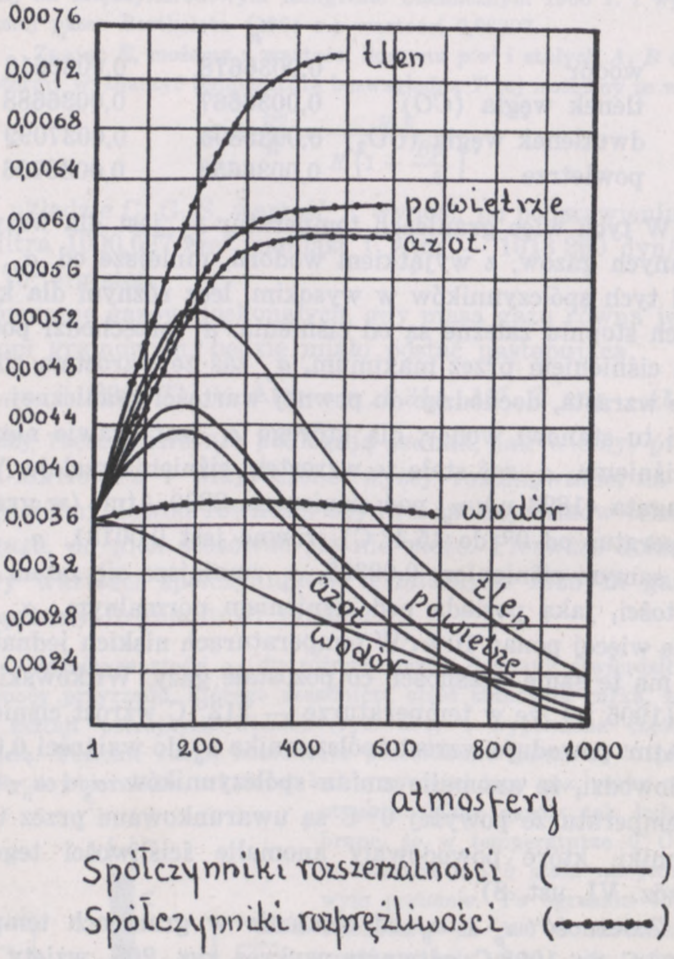
	α_p	α_v
wodór	0,0036678	0,0036613
tlenek węgla (CO)	0,0036667	0,0036688
dwutlenek węgla (CO_2)	0,0036896	0,0037099
powietrze	0,0036653	0,0036706

W tych więc granicach temperatur α_p jest dla wszystkich badanych gazów, z wyjątkiem wodoru, mniejsze od α_v. Wartości tych spółczynników w wysokim, lecz różnym dla każdego z nich stopniu zależne są od ciśnienia. α_v przechodzi pod pewnym ciśnieniem przez maximum, α_p zaś ze wzrostem ciśnienia stale wzrasta, dochodząc do pewnej wartości granicznej. Wyjątek i tu stanowi wodór, dla którego α_p jest prawie niezależne od ciśnienia, α_v zaś stale ze wzrostem ciśnienia maleje. Według Amagata (1893 r.) α_v pod ciśnieniem 2800 Atm (w granicach temperatur od 0° do 15,4° C) równe jest 0,00131, α_p — pod tym samym ciśnieniem 0,00325, α_v zmniejsza się zatem o 64% wartości, jaką posiada pod ciśnieniem normalnym, α_p — nie wiele więcej ponad 10%. W temperaturach niskich jednak i wodór ma te same własności, co pozostałe gazy. Witkowski wykazał (1905 r.), że w temperaturze — 212° C wzrost ciśnienia do 60 Atm powoduje wzrost spółczynnika α_v do wartości 0,003841, co dowodzi, że anomalie zmian spółczynników α_p i α_v wodoru w temperaturze powyżej 0° C są uwarunkowane przez te same czynniki, które powodowały anomalie ściśliwości tego gazu (rozdz. VI, ust. 8).

Zależność α_p i α_v od ciśnienia w granicach temperatur od 0° C do 100° C odtwarza wykres rys. 205, wzięty z podręcznika „Handbuch der Physik" Müllera-Pouilleta. Wykres ten wskazuje dowodnie, że w miarę zmniejszania się ciśnienia różnice wartości spółczynników α_p i α_v stopniowo się zmniejszają, dążąc do pewnej, wspólnej dla wszystkich gazów granicy, którą osiągają pod bardzo małymi ciśnieniami. Tę wartość

graniczną 0,00366 09 przyjmujemy za $\alpha_p = \alpha_v = \alpha$ gazu doskonałego.

Spółczynniki termiczne są również funkcjami temperatury. Pomiary Witkowskiego, z którego nazwiskiem ciągle się spotykamy w tym dziale fizyki, stwierdziły, że dla powietrza pod ci-



rys. 205

śnieniem 15 Atm α_v zmienia się od wartości 0,00427 w temperaturze — 145° C do wartości 0,00379 w temperaturze 100° C. Zmiana więc, jak widzimy, jest niewielka: w tak obszernych granicach temperatury wynosi mniej więcej 11%.

ROZDZIAŁ IX

PIERWSZA ZASADA TERMODYNAMIKI. KALORYMETRIA

1. ILOŚĆ CIEPŁA

Rozpatrywane w rozdziale poprzednim zjawisko wyrównywania temperatur dwu ciał *A* i *B*, nie działających na siebie chemicznie i stanowiących układ odosobniony, przypisujemy przejściu pewnej ilości ciepła od ciała *B*, którego temperatura obniża się wskutek tego o *b* stopni, do ciała *A*, którego temperatura wzrasta o *a* stopni.

Ochłodźmy ciało *A* do temperatury początkowej i zastąpmy w układzie ciało *B* innym ciałem *C*, które przy wyrównywaniu temperatur ochłodzi się o *c* stopni; jeżeli i tym razem temperatura ciała *A* wzrośnie o poprzednią liczbę *a* stopni, będziemy uważali ilości ciepła, oddane przez ciała *B* i *C*, za jednakowe. Stwierdzamy doświadczalnie, że wynik pomiaru nie ulegnie żadnej zmianie, gdy ciało *A* zastąpimy innym ciałem *D*: ilości ciepła, które powodowały jednakowe zmiany temperatury ciała *A*, spowodują jednakowe (lecz na ogół różne od zmiany temperatury *A*) zmiany temperatury ciała *D*. Podane wyżej określenie równych ilości ciepła jest zatem niezależne od wyboru ciała k a l o r y m e t r y c z n e g o (łac. calor — ciepło) tzn. ciała, przy którego pomocy równość tę ustalamy.

Jeżeli zmienimy masę ciała *A* z m_1 na m_2, to, jak to znów stwierdzamy doświadczalnie, w tym samym stosunku musimy zmienić masę ciała kalorymetrycznego *B*, aby to samo obniżenie jego temperatury *b* wywołało ten sam wzrost o *a* stopni temperatury ciała *A*. Na tej podstawie przyjmujemy, że ilość

ciepła, oddana w tym przypadku, jest do ilości ciepła, oddanej poprzednio, w stosunku takim, jak masa m_2 do masy m_1.

Te założenia podstawowe uważamy za obowiązujące również i w przypadku, gdy tylko jedno z ciał układu (np. B) zmienia swą temperaturę, tak, że temperaturą równowagi jest temperatura drugiego ciała, które jest wtedy tzw. źródłem ciepła, ujemnym, gdy jego temperatura jest niższa, lub dodatnim, gdy jest wyższa od początkowej temperatury ciała B. Zmiany, zachodzące w źródle przy pobieraniu lub oddawaniu ciepła przez ciało B, wyrażają się tym razem nie w zmianach temperatury ciała, lecz jak np. w przypadku, gdy źródłem ciepła jest topniejące ciało, w zmniejszaniu lub zwiększaniu się tej części jego masy, która znajduje się w stanie ciekłym. Mierząc zmiany odpowiedniej wielkości, charakteryzującej stan fizyczny źródła, będziemy uważali za równe te ilości ciepła, które powodują te same zmiany równych mas źródła, za będące zaś w stosunku $\frac{m_1}{m_2}$ te, które spowodują te same zmiany w masach m_1 i m_2 źródła. Źródło ciepła może być zatem, podobnie, jak ciało A, ciałem kalorymetrycznym.

Pospolicie za ciała kalorymetryczne bierze się wodę albo lód w temperaturze topnienia. Przez jednostkę wodną ciepła rozumiemy taką jego ilość, która ogrzewa oznaczoną masę wody o oznaczoną liczbę stopni, przez jednostkę lodową taką ilość ciepła, która zamienia oznaczoną masę lodu o temperaturze 0° w wodę o tej samej temperaturze.

Z jednostek wodnych używane są średnia kaloria i kaloria. Nazwą średniej kalorii oznaczamy setną część tej ilości ciepła, która jest potrzebna do ogrzania jednego grama wody od 0° C do 100° C, nazwą zaś kalorii, przyjętej obecnie za obowiązującą w pomiarach laboratoryjnych jednostkę ciepła, ilość ciepła, potrzebną do ogrzania 1 g wody od 14,5° do 15,5° C. Jednostki te tak mało się różnią, że można, bez obawy popełnienia znaczniejszego błędu, uważać je za równe; będziemy je też oznaczali tym samym symbolem kal.

Czasami można się spotkać z oznaczeniem kalorii symbolem kal_{15}.

Biorąc za jednostkę masy 1 kg, otrzymamy, zachowując poza tym określenia poprzednie, dużą średnią kalorię lub dużą

kalorię (Kal), biorąc zaś 1 tonnę $= 10^6$ g, rzadko używaną termię.

Za jednostkę lodową, będącą obecnie jedynie jednostką pomocniczą, przyjmujemy ilość ciepła, potrzebną do zamiany 1 g (lub 1 kg) lodu o temperaturze 0° C w wodę o tej samej temperaturze. Jednostka lodowa równa jest, według Smitha (1903 r.), 79,3 kal (rozdz. XI, ust. 2).

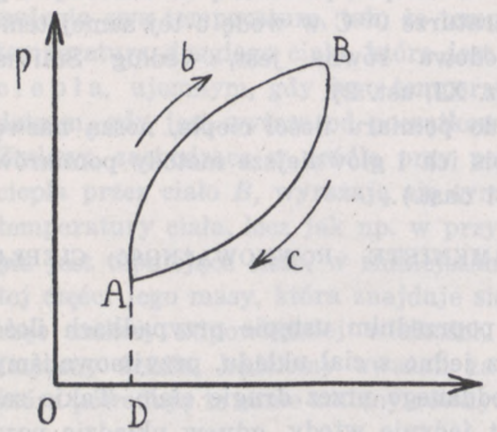
Przyrządy, służące do pomiaru ilości ciepła, noszą nazwę kalorymetrów. Opis ich i główniejsze metody pomiarów są podane niżej (ust. 5 i nast.).

2. PRZEMIANY ZAMKNIĘTE. RÓWNOWAŻNOŚĆ CIEPŁA I PRACY

W rozważanych w poprzednim ustępie przypadkach ilość ciepła, pobieranego przez jedno z ciał układu, przyjmowaliśmy za równą ilości ciepła, oddanego przez drugie ciało. Takie założenie dopuszczalne jest jedynie wtedy, gdy w układzie poza wyrównywaniem temperatur nie zachodzą żadne inne zjawiska. Przypuśćmy jednak, że tak nie jest i że ciało A podlega różnym przemianom, wracając ostatecznie do tego samego stanu początkowego, przez co rozumiec będziemy tę samą objętość, kształt, temperaturę, własności chemiczne i fizyczne, lecz nie energię ruchu ciała, która może mieć wartość odmienną od początkowej. Mówimy wtedy, że ciało podległo przemianie zamkniętej lub kołowej lub wreszcie zamkniętemu cyklowi przemian.

W wielu przypadkach stan fizyczny ciała możemy uważać (dla danej masy ciała) za funkcję dwu tylko jego parametrów (rozdz. VIII, ust. 1). Wtedy każdorazowy stan ciała możemy przedstawić graficznie w postaci punktu, odniesionego do osi, na których odkładać będziemy odpowiednie wartości parametrów. Niech np. badane ciało będzie pewną masą gazu o początkowej objętości v i prężności p. Punkt A (rys. 206) o spółrzędnych $v = OD$ i $p = AD$ odtworzy jednoznacznie stan gazu, trzeci bowiem parametr — temperatura — jest, jak wiemy, dla danej masy wyznaczony przez jej objętość i prężność. Jeżeli przemiany, jakim gaz podlega, są tego rodzaju, że w każdej chwili prężność i objętość właściwa (tzn. objętość jednostki masy) ma we wszystkich elementach ciała wartość jednakową, wtedy kolejnym stanom gazu przy przejściu ze stanu A do stanu B odpowiadają punkty krzywej AB. Gdy gaz ze stanu B wróci do stanu

początkowego A, przechodząc przez stany, odpowiadające punktom krzywej BA, krzywa $A b B c A$ stanie się krzywą zamkniętą. Stąd jednak nie wynika bynajmniej, aby każda krzywa, zamknięta w płaszczyźnie pv, odpowiadała przemianie zamkniętej. Jeżeli bowiem stan ciała wyznaczany jest przez trzy parametry, wówczas rzut na płaszczyznę pv krzywej skośnej, odtwarzającej przemianę ciała, może być krzywą zamkniętą, podczas gdy krzywa skośna będzie otwarta. Przypuśćmy, biorąc przykład podany przez Marchis, że badanym ciałem jest mieszanina chloru i wodoru w stosunku 1 g wodoru na 35,5 g chloru, zajmująca początkowo objętość v pod ciśnieniem p, w temperaturze $t°$ C i że tym wartościom parametrów p i v odpowiada na wykresie rys. 206 punkt A. Przypuśćmy dalej, że jedną z przemian, jakim podlega ta mieszanina, jest połączenie się chemiczne tych pierwiastków, nie powodujące samo przez się zmiany objętości, wobec czego powstały gaz chlorowodorowy zajmuje po dojściu z powrotem do temperatury początkowej tę samą objętość i ciśnienie, co poprzednio. Na płaszczyźnie pv stan jego odtwarza ten sam, co poprzednio, punkt A i krzywa przemian na tej płaszczyźnie jest krzywą zamkniętą, jakkolwiek stan końcowy ciała jest, oczywiście, inny, niż początkowy.



rys. 206

Ilość ciepła, którą ciało pobierze lub odda podczas takiej przemiany, a którą wyznaczymy, mierząc ciepło, jakie należy ciału ostatecznie odebrać lub dodać, aby doprowadzić je do stanu początkowego, nie będzie na ogół równa ciepłu oddanemu lub pobranemu przez inne ciała układu. Będzie ona większa lub mniejsza, zależnie od tego, czy praca $\mathcal{T}_z$ pobrana przez dane ciało będzie większa czy mniejsza od zmiany energii ruchu. Będziemy bowiem mieli zazwyczaj nierówność

$$\mathcal{T}_z - (L_1 - L_0) \neq 0.$$

Stała równoległość występowania tych dwu zjawisk: pozornej straty (lub przyrostu) części pracy i wywiązywania się (lub

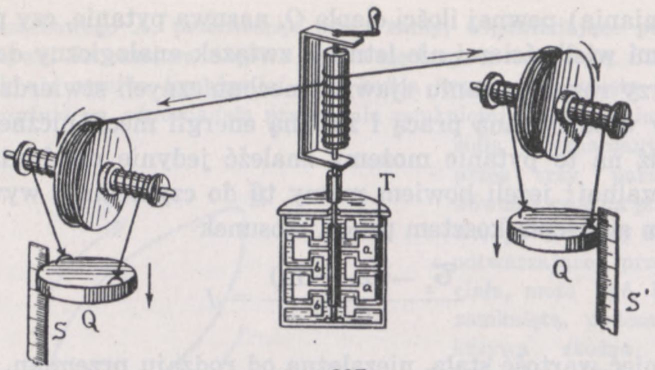
pochłaniania) pewnej ilości ciepła Q, nasuwa pytanie, czy pomiędzy tymi wielkościami nie istnieje związek analogiczny do tego, jaki przy rozpatrywaniu zjawisk mechanicznych stwierdziliśmy między wykonywaną pracą i zmianą energii mechanicznej. Odpowiedź na to pytanie możemy znaleźć jedynie na drodze doświadczalnej; jeżeli bowiem mamy tu do czynienia z wywiązywaniem się ciepła kosztem pracy, stosunek

$$\frac{\mathcal{T}_z-(L_1-L_0)}{Q}=J \tag{1}$$

musi mieć wartość stałą, niezależną od rodzaju przemian, jakim dane ciało podlega. Stwierdzenie tej stałości zawdzięczamy w pierwszym rzędzie pracom J. R. Mayera (1842 r.) i Joule'a (od 1843 r.).

Należy wyraźnie podkreślić, że dopiero pomiary, stwierdzające proporcjonalność wywiązanego ciepła i straconej pozornie pracy, mogły udowodnić powstawanie ciepła kosztem pracy. To bowiem, że wywiązywaniu ciepła towarzyszy zużycie pewnej pracy, mogło być i było wyjaśniane inaczej, a mianowicie, że praca wyzwala ciepło z danego ciała, podobnie, jak przekłucie worka wypełnionego wodą, powoduje wypływ z niego wody. Jest rzeczą oczywistą, że między pracą, wykonaną przy przekłuwaniu i zależną jedynie od grubości i rodzaju materiału worka, a ilością wypływającej cieczy czy też prędkością jej wypływu czy wreszcie energią jej ruchu nie może być żadnego oznaczonego związku. Tym się tłumaczy, że ani doświadczenia Rumforda (1798 r.), który stwierdził, że przy wierceniu luf armatnich wywiązują się ogromne ilości ciepła, ani doświadczenia Davy'ego (1799 r.), który stopił kawałki lodu, pocierając jeden z nich o drugi, nie odegrały w historii nauki większej roli, aniżeli znane od dawna fakty nagrzewania się nienasmarowanych osi lub wzniecania ognia przez pocieranie.

O pracy Mayera będziemy mówili niżej (ust. 9); z licznych doświadczeń Joule'a, wykonywanych przez niego w ciągu lat z górą trzydziestu, opiszemy tylko jedno, wyróżniające się prostotą układu. W naczyniu, wypełnionym wodą (rys. 207), umieszczona jest oś pionowa, zaopatrzona w poziome łopatki a. Na osi osadzony jest z zewnątrz naczynia wał, na który nawinięte są dwa sznury, przerzucone przez bloki i obciążone ciężarami $Q = mg$. Ciężary te, spadając, wprawiają w ruch wiatraczek i wodę w naczyniu. Dla zwiększenia tarcia i zapobieżenia zbyt



rys. 207

szybkiemu ruchowi wody osadza się w ścianach naczynia nieruchome łopatki *b*. Praca siły ciężkości $\mathcal{T}_z$, wykonana przy spadaniu ciężarów z wysokości *h*, wynosi *mgh*, energia ruchu, jaką ciężary posiadają w końcowym punkcie swej drogi, niech będzie równa $2 \cdot \frac{1}{2} mv^2 = mv^2$, praca przeciwko siłom tarcia między sznurem i blokiem $\mathcal{T}_t$, ciepło, wywiązane w naczyniu z wodą i które należałoby odebrać, aby ciała te doprowadzić do stanu początkowego, *Q*. Dla każdej wartości $\mathcal{T}_z$ (a więc dla różnych wysokości spadku i różnych mas ciał zawieszonych) stosunek

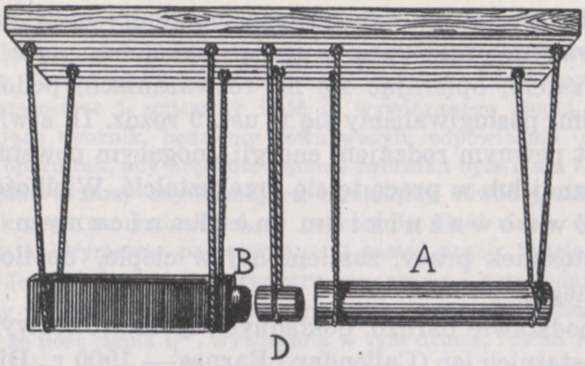
$$\frac{\mathcal{T}_z - mv^2 - \mathcal{T}_t}{Q} = J$$

powinien mieć wartość stałą.

Pomiary Joule'a wniosek ten potwierdziły. Wartość *J* we wszystkich przypadkach wahała się, w granicach błędu doświadczenia, około pewnej średniej wartości.

W tym układzie błędy doświadczenia są dość znaczne. Największe trudności sprawiało wyznaczenie pracy przeciwko siłom tarcia i straty energii w końcowym punkcie drogi ciężarów. Poprawki te muszą być wyznaczone bardzo dokładnie, gdyż wzrost temperatury wody w naczyniu jest na ogół niewielki: dwudziestokrotne spadanie ciężarów powodowało w doświadczeniach Joule'a podniesienie się temperatury wody zaledwie o 0,2° C.

Szczególnie dokładne pomiary stosunku (1) wykonał Rowland (1879—1880 r.), wprowadzając pewne ulepszenia do metody, użytej przez Joule'a, następnie Miculescu (1892 r.)



rys. 208

i ostatnio Jaeger i Steinwehr (1915 r.). Podobną metodą posługiwał się również Puluj (1876 r.).

Hirn wyznaczał (1850 r.) wartość J sposobem następującym. Na mocnej ramie drewnianej (rys. 208) zawieszony był blok kamienny, na który w B nasadzona była żelazna płytka; na tej samej ramie wisiał walec żelazny A, między zaś walcem i blokiem grubościenne naczynie ołowiane D, zawieszone tak, aby otwór jego przypadał na osi walca; naczynie to przed doświadczeniem napełniano wodą, której temperaturę, równą temperaturze naczynia, starannie wyznaczono, po czym wodę z naczynia wylewano. Walec A podnoszono do góry na wysokość h i opuszczano; walec uderzał o naczynie, które ze swej strony uderzało o blok, i odskakiwał na wysokość h', mniejszą znacznie od h, gdyż uderzenie było w tym przypadku niesprężyste, blok zaś podnosił się na wysokość h''. Zaraz po tym uderzeniu wyjmowano naczynie i wyznaczano jego temperaturę, skąd obliczano ilość ciepła Q, jaką musiałoby oddać, aby wrócić do stanu początkowego. Oznaczając przez m_w — masę walca, przez m_b — masę bloku, na stosunek J otrzymujemy

$$J = \frac{m_w \cdot hg - m_w h' g - m_b h'' g}{Q}.$$

Wszystkie tego rodzaju pomiary dały na J stosunkowo mało różniące się wartości i potwierdziły istnienie proporcjonalności między nadwyżką pracy i ilością wywiązanego ciepła. Co więcej, doświadczenia Hirna nad pracą, wykonaną przez maszynę pa-

rową, ustaliły analogiczną proporcjonalność między ciepłem, otrzymywanym przez parę, i pracą, wykonaną przez maszynę. Możemy zatem, opierając się na rozważaniach, podobnych do tych, jakimi posługiwaliśmy się w ust. 9 rozdz. II, stwierdzić, że ciepło jest pewnym rodzajem energii, mogącym powstać z pracy mechanicznej lub w pracę tę się przekształcić. Wielkość J, nazywana r ó w n o w a ż n i k i e m m e c h a n i c z n y m c i e p ł a, wyraża stosunek pracy, zamienionej w ciepło, do ilości ciepła wywiązanego.

Na podstawie bardzo dokładnych pomiarów, wykonanych w ciągu ostatnich lat (Callendar i Barnes — 1900 r., Dieterici — 1905 r., Jaeger i Steinwehr 1915 r.), za najprawdopodobniejszą wartość J uważamy

$$4{,}184 \frac{\text{dżul}}{\text{kal}} = 0{,}4269 \frac{\text{kgc}}{\text{kal}}. \qquad (2)$$

Jeżeli energia ruchu badanego ciała lub badanego układu ciał, poddanego przemianie kołowej, pozostaje bez zmiany, tak że $L_1 = L_0$, wzór (1) przybiera postać

$$\mathcal{T}_z - JQ = 0, \qquad (3)$$

wyrażającą zasadę r ó w n o w a ż n o ś c i c i e p ł a i p r a c y w przemianach zamkniętych. Gdy pracę i ciepło, pobrane przez układ, będziemy uważali za wielkości dodatnie, pracę zaś wykonaną i ciepło wywiązane za ujemne, otrzymamy

$$\mathcal{T}_z + JQ = 0. \qquad (3a)$$

3. PRZEMIANY OTWARTE. ENERGIA WEWNĘTRZNA. ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

Doświadczalne potwierdzenia zasady równoważności ciepła i pracy, rozpatrzone w ustępie poprzednim, dotyczyły tych przypadków, gdy praca zewnętrzna powodowała wzrost temperatury ciała lub układu. Może się jednak zdarzyć, że w wyniku wykonanej pracy ciała układu doznają innych jeszcze, nie tylko cieplnych, zmian swego stanu fizycznego. Doświadczenia Joule'a (1843 r.), Favre'a (1857 r.), Violle'a (1870 r.) udowodniły, że i w tych przypadkach powrotowi układu do stanu początkowego towarzyszyć będzie wywiązanie ciepła w ilości takiej samej, jaką byśmy otrzymali, przekształcając bezpośrednio pracę w ciepło.

Wyobraźmy sobie, że pracę mechaniczną zużywamy na obracanie twornika prądnicy prądu stałego, której bieguny nie są ze sobą połączone, obwód elektryczny jest więc otwarty. Umieśćmy prądnicę w kalorymetrze i zmierzmy ilość Q wywiązanego ciepła, gdy siły, obracające twornik, będziemy równoważyli odpowiednio dobranymi siłami oporu tak, aby prędkość kątowa twornika była stała i niewielka. Następnie usuńmy siły hamujące, zamknijmy obwód i działajmy na twornik tymi samymi siłami, co poprzednio. Ilość ciepła Q', wywiązana w kalorymetrze przy użyciu tej samej pracy, będzie mniejsza, niż Q. Jeżeli jednak do kalorymetru zanurzymy i przewodnik, łączący bieguny prądnicy, a przez który przepływa prąd elektryczny, stwierdzimy, że ilość ciepła Q'', wywiązana w tym drucie, równa jest $Q—Q'$. Przypuśćmy wreszcie, że w obwód włączone jest naczynie z zakwaszoną wodą; podczas przechodzenia prądu wydzieli się z tego roztworu wodór i tlen; niech ilości ciepła, wywiązane tym razem w tworniku i drucie, będą Q^{III} i Q^{IV}; suma tych wielkości będzie znowu mniejsza od Q. Wystarczy jednak zamienić otrzymany gaz piorunujący z powrotem w wodę, aby stwierdzić, że ciepło, oddane przy spalaniu Q_s, wyrówna różnicę $Q — Q^{III} — Q^{IV}$.

Rozumując znów tak samo, jak w ust. 9 rozdz. II, dochodzimy do wniosku, że zmianom stanu fizycznego ciał układu, spowodowanym przez pracę mechaniczną, towarzyszą zmiany energii, które mogą ujawniać się zgoła inaczej, niż rozpatrywane dotychczas energie mechaniczne i cieplna, lecz które są z nimi w stałym oznaczonym stosunku.

Stąd wynika, że gdy przemiana, jakiej układ podlega, jest przemianą o t w a r t ą, tzn. końcowy stan układu jest różny od początkowego, będziemy mieli na ogół nierówność

$$\mathcal{T}_z + JQ \neq 0.$$

Przypuśćmy, że przy przejściu układu ze stanu 1 do stanu 2 nadwyżka pracy pobranej nad ciepłem wywiązanym wyniesie e

$$\mathcal{T}_z + JQ = e. \tag{a}$$

Przeprowadźmy układ z powrotem do stanu 1 i niech tym razem praca pobrana będzie równa $\mathcal{T}'_z$, ciepło zaś wywiązane Q'; przypuśćmy, że będziemy mieli wtedy

$$\mathcal{T}'_z + JQ' = e'. \tag{b}$$

Obiedwie te przemiany stanowią przemianę zamkniętą. Zgodnie więc ze wzorem (3a) otrzymamy

$$(\mathcal{T}_z + \mathcal{T}'_z) + J(Q + Q') = e + e' = 0, \tag{c}$$

gdzie zarówno $\mathcal{C}_z$ i $\mathcal{C}'_z$ jak i Q oraz Q' mogą być wielkościami dodatnimi lub ujemnymi, zależnie od tego, czy praca została pobrana przez układ czy też przez układ wykonana i czy ciepło zostało pochłonięte czy wywiązane.

Ze wzoru (c) wynika, że

$$e = -e',$$

że więc wartość bezwzględna wielkości $(\mathcal{C}_z + JQ)$ nie zależy bynajmniej od rodzaju przemiany, jakiej układ podlega, lecz od końcowego i początkowego stanu układu. Gdy za stan początkowy będziemy przyjmowali zawsze jeden i ten sam stan układu (np. stan 1), wielkość e zależeć będzie jedynie od końcowego stanu układu, będzie tego stanu funkcją (rozdz. VIII, ust. 1).

Funkcją stanu nie jest jednak ani praca $\mathcal{C}_z$ ani ciepło Q, gdyż wartość każdej z tych wielkości oddzielnie zależy od rodzaju przemiany, jakiej podlega układ, od kształtu drogi, jaką przebiega punkt, odtwarzający stan układu (rys. 206).

Na podstawie wyżej przytoczonych rozumowań możemy wielkość e uważać za miarę zmiany energii układu, spowodowanej przez zmianę jego stanu fizycznego; energię tę nazywać będziemy e n e r g i ą   w e w n ę t r z n ą układu, rozumiejąc przez to wszelkie postaci energii, których kosztem układ przy powrocie do stanu początkowego może wykonać pracę lub wywiązać ciepło. Niech U_1 będzie energią wewnętrzną układu w stanie początkowym, U_2 — w stanie końcowym, wzór (a) lub (b) przepiszemy w postaci

$$\mathcal{C}_z + JQ = U_2 - U_1, \tag{4}$$

wyrażającej p i e r w s z ą   z a s a d ę   t e r m o d y n a m i k i.

Często mierzymy energię wewnętrzną w jednostkach cieplnych, wtedy wzór (4) przybiera taki kształt

$$\mathcal{C}_z + JQ = J\,(U_2 - U_1). \tag{4a}$$

Dla układu odosobnionego $\mathcal{C}_z$ i Q równe są zeru, wobec czego

$$U_2 = U_1.$$

W układzie odosobnionym energia wewnętrzna ma wartość stałą.

Gdy układ jest jedynie cieplnie odosobniony, tak, że nie pobiera ani nie oddaje ciepła na zewnątrz

$$\mathcal{C}_z = U_2 - U_1. \tag{5}$$

Pobieraniu pracy przez układ towarzyszy zwiększanie się, wykonywaniu pracy — zmniejszanie się energii wewnętrznej układu. Te twierdzenia, będące wyrazem uogólnionej *zasady zachowania energii* (por. rozdz. II, ust. 11), prowadzą, podobnie jak zasada zachowania energii mechanicznej w układach zachowawczych, do wniosku, że nie może istnieć układ, który by mógł dostarczać pracy w nieograniczonej ilości, który by więc był tzw. *perpetuum mobile pierwszego rodzaju*.

4. CIEPŁO WŁAŚCIWE

Przypuśćmy, że ciało o masie m g pobiera pewną ilość ciepła Q, na skutek czego ogrzewa się od temperatury t_1 do t_2. Wielkość $\frac{Q}{t_2 - t_1}$ będziemy nazywali *pojemnością cieplną* danego ciała, wielkość zaś $\frac{Q}{m(t_2 - t_1)} = c_{t_1, t_2}$, a więc pojemność, odniesioną do jednostki masy, *ciepłem właściwym ciała w granicach temperatur* t_1 i t_2. Gdy różnica temperatur $t_2 - t_1$ będzie dążyła do zera, wielkość

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{m \Delta t} = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dt} = c_t$$

nazwiemy *ciepłem właściwym w temperaturze* t (por. rozdz. VIII, ust. 2).

Z równania (4a) po podstawieniu $c_{t_1, t_2}(t_2 - t_1)$ zamiast Q i po uwzględnieniu, że ciało ogrzewane nie pobiera pracy, lecz ją wykonywa, tak, że $\mathcal{T}_z = -\mathcal{T}$, otrzymujemy

$$c_{t_1, t_2}(t_2 - t_1) = U_2 - U_1 + \frac{1}{J}\mathcal{T} \tag{6}$$

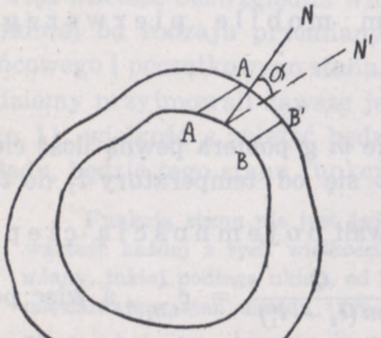
lub w zastosowaniu do przemiany elementarnej

$$c_t dt = dU + \frac{1}{J} d\mathcal{T}. \tag{6a}$$

Z wielkości, stojących po prawej stronie równań (6) i (6a), pierwsza $U_2 - U_1$ (lub dU) jest zależna jedynie od początkowego i końcowego stanu układu, druga zaś $\mathcal{T}$ (lub $d\mathcal{T}$) od warunków, w jakich ciało jest ogrzewane, skąd wynika, że i wartość ciepła właściwego zależy od tych warunków, tak, że mówiąc o cieple właściwym, musimy ściśle określić warunki, w jakich

jest wyznaczane. W fizyce (nie technice) najczęściej mamy do czynienia z ogrzewaniem ciała albo w stałej objętości, czemu odpowiada ciepło właściwe c_v, lub też pod stałym ciśnieniem, gdzie w wyniku pomiaru otrzymujemy ciepło właściwe c_p.

Załóżmy, że badane ciało poddane jest ciśnieniu, działającemu normalnie i równomiernie na wszystkie elementy jego powierzchni. Na element $AB = ds$ powierzchni (rys. 209) działa siła zewnętrzna $df = pds$; praca, wykonana przeciwko tej sile przy przesunięciu się elementu o długość dl, tworzącą z kierunkiem siły kąt α, równa jest $pds \, . \, dl \cos \alpha$; praca zaś, wykonana przeciwko siłom ciśnienia przez nieskończenie mało rozszerzające się ciało,



rys. 209

$$d\mathfrak{T} = \iint pds \, dl \cos \alpha,$$

gdzie całka podwójna oznacza sumowanie, rozciągnięte na wszystkie elementy powierzchni ciała przy przesuwaniu się każdego z nich o dl.

Iloczyn $ds \, . \, dl \cos \alpha$ wyraża objętość .walca elementarnego o podstawie ds i wysokości $dl \cos \alpha$; sumę tych objętości możemy z dokładnością do nieskończenie małych rzędu wyższego uważać za równą zwiększeniu się objętości ciała. Mamy zatem

$$d\mathfrak{T} = pdv.$$

Wzrostowi objętości o wartość skończoną odpowiada suma prac elementarnych

$$\mathfrak{T} = \int d\mathfrak{T} = \int_{v_1}^{v_2} pdv.$$

Wartość tej całki zależy nie tylko od początkowej i końcowej wartości v_1 i v_2, lecz również i od chwilowych wartości, na ogół zmiennych, ciśnienia podczas rozpatrywanej przemiany. Jeżeli jednak ciśnienie jest stałe, równe p_0, wtedy

$$\mathfrak{T} = p_0 \, (v_2 - v_1)$$

Podstawiając do wzoru (6), znajdujemy

$$c_p \, (t_2 - t_1) = Q_{t_1}^{t_2} = U_2 - U_1 + \frac{1}{J} p_0 \, (v_2 - v_1) =$$
$$= \left(U_2 + \frac{1}{J} p_0 v_2 \right) - \left(U_1 + \frac{1}{J} p_0 v_1 \right).$$

W tym przypadku ciepło wyraża się różnicą dwu wielkości, z których każda wyznaczona jest całkowicie przez chwilowy stan ciała. Wielkość $U + \frac{1}{J} pv = H$ jest, podobnie, jak U, jedną z tzw. funkcyj termodynamicznych, nazywaną zazwyczaj funkcją Gibbsa. Nazwa entalpii (grec. enthalpein — ogrzewać się), zaproponowana przez Kamerlingh Onnesa, rzadko, jak dotychczas, jest używana.

Pomiary ciepła właściwego ciał stałych i cieczy pospolicie odpowiadają temu ostatniemu warunkowi, tak, że przez ciepło właściwe tych ciał zazwyczaj rozumiemy ciepło właściwe c_p pod stałym ciśnieniem i często dla skrócenia oznaczamy je przez c.

Z podanych wyżej określeń ciepła właściwego pod stałym ciśnieniem i w stałej objętości, jak również z tego, że ciało, zachowujące podczas ogrzewania niezmienną objętość, nie wykonywa żadnej pracy zewnętrznej, nie wynika jednak bynajmniej, aby różnica c_p i c_v była równoważna pracy, wykonanej przez zwiększające swą objętość ciało. W każdym bowiem z tych szczególnych przypadków ogrzewania stan końcowy ciała, i co za tym idzie, wartość jego energii wewnętrznej jest inna. W przypadku pierwszym zmienia się temperatura i objętość ciała, w drugim — temperatura i ciśnienie, któremu ciało jest poddane. Dla ciał stałych i ciekłych różnica energii wewnętrznych tych dwu różnych stanów końcowych przewyższa o wiele pracę zewnętrzną, wykonaną przez ciało podczas zwiększania swej objętości, tak, że zazwyczaj pracy tej w obliczeniach nie uwzględniamy (por. ust. 5).

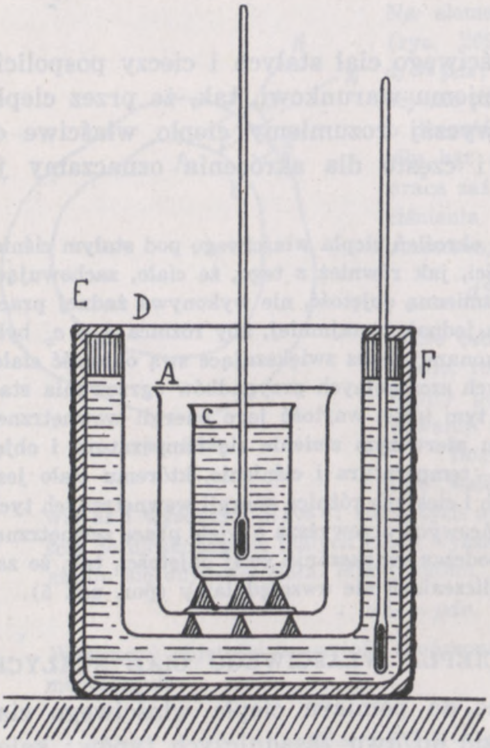
5. WYZNACZANIE CIEPŁA WŁAŚCIWEGO CIAŁ STAŁYCH

Kalorymetry, służące do pomiaru ciepła właściwego ciał stałych, można sprowadzić do dwu zasadniczych typów: kalorymetrów o zmiennej i stałej temperaturze. Najczęściej używanym kalorymetrem typu pierwszego jest kalorymetr wodny. Naczynie c (rys. 210), zazwyczaj mosiężne, poniklowane od wewnątrz i zewnątrz (dla zmniejszenia strat, spowodowanych przez promieniowanie), wypełnione wodą, umieszczamy na zaostrzonych podstawkach korkowych wewnątrz drugiego podobnego naczynia A. Ciało badane, ogrzane do temperatury t_1, wyższej od temperatury t_k wody w kalorymetrze, i następnie wrzucone do kalorymetru, oddaje, ostygając do temperatury równowagi t, ilość ciepła $Q = c\,(t_1 - t)$.

Zakładając, że całe to ciepło pobrane jest przez kalorymetr, i oznaczając pojemność cieplną kalorymetru przez q, mamy

$$c\,(t_1 - t) = q\,(t - t_k).$$

W rzeczywistości jednak zachodzą zawsze pewne straty ciepła, tak, że wyznaczona temperatura t jest niższa od tej, którą byśmy otrzymali, gdyby całe ciepło, oddane przez ciało, było zużyte na podniesienie temperatury kalorymetru. Odpowiednią poprawkę można wyznaczyć, znając szybkość ostygania kalorymetru. W tym celu obserwuje się w równych odstępach czasu zmiany wskazań termometru przed i po wrzuceniu ciała. Poprawkę tę można tym dokładniej wyznaczyć, im mniejsza jest początkowa różnica temperatur $t_1 - t_k$ i im mniejszym wahaniom ulega temperatura otoczenia. Dlatego też przy pomiarach, w których chodzi o większą dokładność, umieszcza się często naczynia C i A w jednym jeszcze naczyniu D o podwójnych ścianach, między którymi znajduje się dość znaczna masa wody (rys. 210).

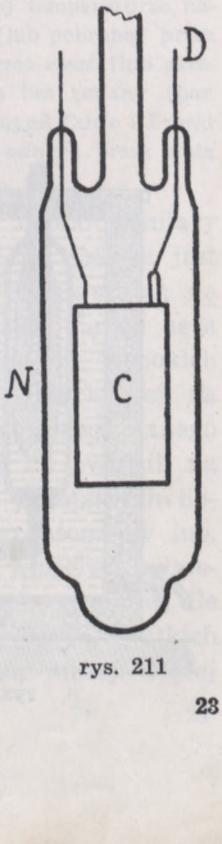


rys. 210

Błędy, związane z obliczeniem pochłaniania ciepła przez termometr, zanurzony w kalorymetrze, próbowali usunąć (1852 r.) Favre i Silbermann, a później Schottky (1913 r.) w ten sposób, że rozszerzająca się przy ogrzewaniu ciecz kalorymetryczna jest jednocześnie cieczą termometryczną. W kalorymetrach wodnych tzw. adiabatycznych (grec. diabainein — przechodzić, a — przeczenie) po-

mysłu Atwatera i Rosa (1892 r.), następnie wielokrotnie ulepszanych, temperatura płaszcza ochronnego, otaczającego ze wszystkich stron (i z góry) naczynie kalorymetryczne, jest utrzymywana stale na tej samej mniej więcej wysokości, ponad temperaturą cieczy kalorymetrycznej. Osiągą się to albo przez wywiązywanie w płaszczu odpowiednich reakcyj chemicznych (płaszcz ochronny wypełniony jest roztworem alkalicznym, zobojętnianym stopniowo przez dopływający kwas), albo przez ogrzewanie prądem elektrycznym, lub wreszcie, jak w kalorymetrze Świętosławskiego i Dorabialskiej (1927 r.), przez zanurzenie kalorymetru o małej pojemności cieplnej w bardzo wielkiej masie wody o stałej temperaturze. W kalorymetrach różnicowych (Steinwehr 1901 r., Wertenstein 1920 r.) mamy dwa jednakowe naczynia kalorymetryczne, z których jedno ogrzewane jest przez badaną ilość ciepła, drugie zaś, przez prąd elektryczny o tak dobranym natężeniu, aby temperatury obydwu naczyń były stale równe. Te różne odmiany kalorymetrów, mogące w pewnych przypadkach lepiej nadawać się do pomiarów, niż opisany wyżej kalorymetr wodny, nie pozwalają jednak, jak się zdaje, osiągnąć dokładności większej, niż ta, którą się otrzymuje po uwzględnieniu wszystkich poprawek przy użyciu kalorymetru wodnego i która może dojść do 1‰ mierzonej wielkości.

Odmienny typ przedstawia kalorymetr Nernsta i Lindemanna (1910 r.), wyobrażony na rys. 211 w tej postaci, jaką mu nadał Pollitzer (1911 r.). Badane ciało *C* zawieszone jest na dwu cienkich drutach *D* wewnątrz naczynia *N*, w którym wytworzona jest próżnia. Naczynie to umieszczone jest w większym zbiorniku o stałej, zazwyczaj niskiej, temperaturze. Na ciele nawinięty jest cienki drut platynowy, łączący się poprzez druty, na których ciało wisi, z zewnętrznym źródłem prądu. Drut ten jest jednocześnie termometrem oporowym (rozdz. VIII, ust. 1). Prąd, przechodzący przez ten drut, ogrzewa ciało, którego wzrost temperatury najczęściej wyznacza się w sposób następujący: w równych odstępach czasu przed i po ogrzaniu mierzymy opór drutu i z wykresu, wyrażającego zależność oporu od czasu, znajdujemy zmianę oporu w chwili ogrzewania ciała.



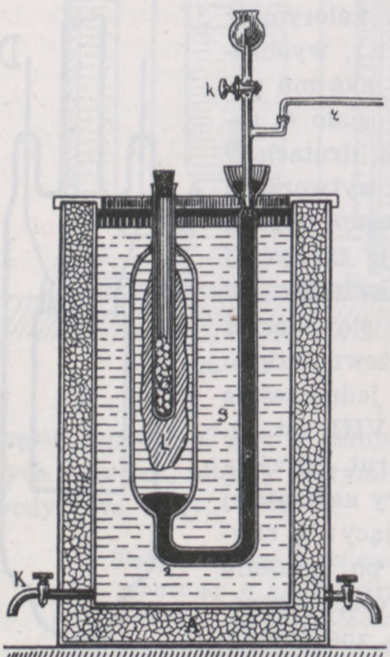
rys. 211

Niech i oznacza natężenie prądu w amperach, V — różnicę potencjałów na końcach drutu, mierzoną w woltach, τ — czas w sekundach

$$\frac{1}{J}\int iV\,d\tau = m c_p\,(t_2 - t_1).$$

Ponieważ zmiany temperatury, jakich doznaje ciało, są pospolicie niewielkie, wyznaczone w ten sposób średnie ciepło właściwe mało różni się od ciepła właściwego w danej temperaturze. Tej metody używał Nernst (1910 r.), Eucken (1913 r.), Lange (1924 r.) i inni do wyznaczania ciepła właściwego w niskich temperaturach.

Pewną odmianę tego sposobu, używaną do pomiarów w wysokich temperaturach, stanowi ogrzewanie prądem, przechodzącym przez samo badane ciało (Lecher, 1907 r.). I w tym przypadku badane ciało znajduje się w naczyniu (w doświadczeniach Lechera — w rurce porcelanowej), z którego usunięto powietrze i które umieszczone jest w zbiorniku o stałej temperaturze (np. w piecu elektrycznym). Temperaturę wyznacza się, mierząc albo opór badanego ciała (Behrens i Drucker, 1924 r.) albo też siłę elektrobodźczą ogniwa termoelektrycznego, stykającego się z danym ciałem (Lecher, 1907 r., Lapp, 1928 r.).



rys. 212

Z kalorymetrów o stałej temperaturze najczęściej stosunkowo używany jest kalorymetr Bunsena (rys. 212). Szklany zbiornik, wypełniony wodą, jest w dolnej swej części połączony z rurką Rr, zawierającą rtęć aż do pewnej podziałki rurki poziomej r, starannie wycechowanej. Zbiornik i rurka umieszczone są w większym naczyniu s, zawierającym wodę i otoczonym płaszczem ochronnym, wypełnionym topniejącym lodem. Nalewając do probówki, umieszczonej w zbiorniku, jakiejś łatwo parującej cieczy (alkoholu, eteru) i powodując gwałtowne jej parowanie (np. usuwając przedmuchiwaniem

tworzącą się nad nią parę), obniża się temperaturę wody w zbiorniku tak, że część jej, przylegająca do probówki, zamarza, tworząc na probówce mniej lub więcej grubą powłokę lodową; jeżeli wtedy do probówki wrzucimy badane ciało, ciepło, przez nie oddawane, topić będzie lód, otaczający probówkę, czemu towarzyszyć będzie zmniejszanie się objętości układu lód — woda (rozdz. XI, ust. 2) tak, że rtęć, która początkowo dochodziła do podziałki n_1 rurki poziomej r, cofnie się do podziałki n_0. Znając pojemność jednej podziałki i wiedząc, że 1 g lodu w temperaturze 0° C zajmuje objętość o 0,09070 cm^3 większą, niż woda w tej samej temperaturze, możemy od razu wyznaczyć ilość jednostek lodowych ciepła, oddanego przez ciało, ze wzoru $\frac{n_1 - n_0}{0{,}09070}\,v$, gdzie v — pojemność jednej podziałki lub z uwagi, że 1 j. l. = 79,7 kal (ust. 1), $\frac{(n_1 - n_0)v}{0{,}09070} \cdot 79{,}7$ kal.

Świętosławski wraz ze swymi współpracownikami przystosował (1933 r.) kalorymetr Bunsena do pomiaru niewielkich ilości ciepła.

Do tego samego typu kalorymetrów o stałej temperaturze należą kalorymetry, w których ilość ciepła, oddaną (lub pobraną) przez ciało, wyznacza się z ilości pary, wytworzonej przez ciecz (lub skroplonej), przy czym temperatura pary pozostaje bez zmiany (por. ust. 8). Tego typu kalorymetru używali między innymi Curie i Dewar (1904 r.) dla wyznaczenia ilości ciepła, wywiązywanych przez ciała promieniotwórcze.

Wykonane przy użyciu wyżej opisanych metod pomiary doprowadziły do wniosku, że ciepło właściwe ciał stałych jest w znacznym stopniu zależne od temperatury, zmniejszając się przy jej obniżaniu do wartości mało różniących się od zera w temperaturach bliskich zera bezwzględnego. W wysokich temperaturach ciepło właściwe pierwiastków stałych jest na ogół tym mniejsze, im większy jest ciężar atomowy danego ciała. Dulong i Petit, którzy pierwsi (w 1819 r.) zwrócili na ten fakt uwagę, założyli, że w temperaturach normalnych iloczyn ciepła właściwego ciała przez jego ciężar atomowy lub, innymi słowy, ciepło atomowe C_p, tzn. ciepło właściwe, odniesione do jednego atomu gramowego (masy tylu gramów, ile jednostek zawiera ciężar atomowy), posiada dla wszystkich pierwiastków stałych tę samą wartość, równą mniej więcej

$6{,}3 \frac{\text{kal}}{\text{stop.}}$. To założenie potwierdziły dla znacznej większości pierwiastków stałych badania późniejsze, przede wszystkim Regnaulta (1840 r.).

Grupując pierwiastki według zmniejszających się ciężarów atomowych, otrzymujemy następującą tablicę

	c_p od 0° do 100°	ciężar atomowy A	C_p
bizmut	0,0303	209,02	6,33
ołów	0,0305	207,20	6,32
złoto	0,0316	197,2	6,23
platyna	0,03224	195,2	6,3
iryd	0,0323	193,1	6,24
cer	0,0448	140,25	6,25
srebro	0,05625	107,88	6,06
pallad	0,0592	106,7	6,32
nikiel	0,1089	58,68	6,39
żelazo	0,113	55,84	6,31
wapń	0,152	40,07	6,09
fosfor (czerw.)	0,1829	31,04	5,68
glin	0,217	27,1	5,88
sód	około 0,308	23,00	7,08
lit	około 0,8	6,94	5,55

Od podanych wyżej wartości ciepła atomowego odbiega znacznie ciepło atomowe krzemu, węgla, boru i berylu. Dla tych pierwiastków mamy

	c_p	A	C_p
krzem (kryst.)	około 0,17	28,3	4,8
węgiel (grafit)	„ 0,16	12	1,92
„ (diament)	„ 0,113	12	1,36
bor	0,307	11	3,38
beryl	0,425	9,01	3,83

Różnice są zbyt znaczne, aby je można było przypisać błędom pomiaru. Ale oto tych właśnie pierwiastków ciepło właściwe wzrasta o wiele szybciej ze wzrostem temperatury, niż pierwiastków, czyniących zadość prawu Dulonga i Petita w temperaturach normalnych. Tak np. według Webera (1875 r.) ciepło właściwe dia-

mentu w granicach od 11° C do 140° C zmienia się od 0,113 do 0,222, wzrasta więc blisko o 100%, gdy tymczasem ciepło właściwe miedzi w większych granicach temperatur, od 20° C do 200° C, zmienia się od 0,0912 (Gaede, 1902 r.) do 0,0963 (Naccari, 1887 r.), a więc zaledwie o 5,5%. Można więc przypuszczać, jak to uczynił Weber, że w miarę wzrostu temperatury odstępstwa poszczególnych pierwiastków od prawa Dulonga i Petita stają się coraz to mniejsze i że wartości ciepła atomowego wszystkich pierwiastków stałych zbliżają się asymptotycznie do pewnej wspólnej wartości, którą przyjmujemy za równą 6,4. To przypuszczenie potwierdzają wyniki pomiarów Bohna (1900 r.), zawarte w poniższej tablicy, którą podajemy za Chwolsonem.

	— 180° do — 79°	— 79° do + 18°	+ 18° do 100°
ołów	6,0	6,2	6,4
platyna	5,4	6,1	6,3
iryd	5,1	5,8	6,2
pallad	5,2	6,0	6,3
antymon	5,5	5,8	6,0
cyna	5,8	6,1	6,5
kadm	5,6	6,0	6,3
srebro	5,4	5,9	6,0
nikiel	4,3	5,8	6,4
żelazo	4,0	5,6	6,0
wapń	4,5	5,6	6,0
glin	4,2	5,3	6,0

W temperaturach niższych od tych, w jakich Bohn wykonywał swe pomiary, C_p spada, jak o tym już wyżej mowa, do bardzo małej wartości. Tak np. w temperaturze — 258,65° C ciepło atomowe miedzi wynosi zaledwie 0,0396 (Keesom i Kamerlingh Onnes, 1916 r.), ciepło właściwe zatem 0,0006, ołowiu w temperaturze — 253,16° C (Keesom i van Ende, 1930 r.) odpowiednio — 2,62 i 0,012, w — 270,16° C już tylko 0,0233 i 0,0001. Spadek więc, jak widzimy, jest bardzo gwałtowny: wartość ciepła właściwego glinu zmniejsza się przy obniżeniu temperatury od — 233° C do — 240,6° C o 45% (Nernst, 1911 r.).

Prawo zatem Dulonga i Petita jest prawem granicznym, obowiązującym tylko w wysokich temperaturach.

Do tego wniosku prowadzą również rozważania teoretyczne, z których wynika, że ciepło właściwe C_v w stałej objętości powinno mieć w wysokich temperaturach wartość 5,94 $\frac{\text{kal}}{\text{stop.}}$. Ciepło to możemy, znając C_p, obliczyć ze wzoru

$$C_p - C_v = T v_0 \frac{\alpha^2}{\gamma},$$

gdzie v_0 oznacza objętość atomu gramowego, α — spółczynnik rozszerzalności objętościowej, γ — spółczynnik ściśliwości. W temperaturach wysokich różnica ta nie przekracza 10%, w temperaturach niskich praktycznie równa jest zeru. Należy jednak zaznaczyć, że niektóre nowsze pomiary, jak np. Carpentiera i Harle'a (1932 r.) nad bizmutem, zdają się przeczyć temu wnioskowi, aby ciepło atomowe wszystkich pierwiastków dążyło do wyżej podanej granicy.

Zależność ciepła atomowego od temperatury w granicach od — 255° C do — 230° z dużym przybliżeniem wyraża wzór Debye'a

$$C_v = 464{,}5 \cdot \frac{T^3}{\Theta^3}, \tag{7}$$

gdzie Θ jest pewną stałą temperaturą, zależną od rodzaju ciała. Zależność od temperatury ciepła C_v ciał bezpostaciowych lepiej, jak można sądzić na podstawie prac Wietzela (1921 r.) i Simona (1922 r.), odtwarza wzór

$$C_v = a T^2. \tag{7a}$$

6. CIEPŁO WŁAŚCIWE CIECZY

Do wyznaczenia ciepła właściwego cieczy pod stałym ciśnieniem można używać którejkolwiek z wyżej opisanych metod, wprowadzając do nich odpowiednie, niewielkie zresztą, zmiany, poza tym jednak są w użyciu i inne metody, nie nadające się do badania ciał stałych. Jedną z nich jest metoda przepływu (Callendar i Barnes, 1902 r.). Badana ciecz przepływa stałym strumieniem przez wąską rurkę (o średnicy około 2 mm), wzdłuż której rozpięty jest drut platynowy, ogrzewany prądem elektrycznym. Z różnicy temperatur cieczy wpływającej i wypływającej można, znając masę, przypływającą w ciągu jednej sekundy, oraz dostarczoną w ciągu tego czasu energię, obliczyć ciepło właściwe. Do pomiarów względnych służyć może metoda Pfaundlera (1869 r.). Z dwu możliwie identycznych kalorymetrów jeden wypełniony jest wodą, drugi tą samą masą badanej cieczy. Obydwie ciecze ogrzewa ten sam prąd elektryczny. Jeżeli opory przewodników, zanurzonych do cieczy, są jednakowe, energia dostar-

czana cieczom ma w obydwu kalorymetrach tę samą wartość, stosunek więc ciepła właściwego badanej cieczy do ciepła właściwego wody równy jest odwrotneści stosunku wzrostów temperatury tych cieczy.

Szczególnie starannie było wyznaczone ciepło właściwe wody. Rowland wyznaczał je (1879 r.), mierząc ilość pracy, potrzebną do ogrzania danej masy wody o 1° C. Przyrząd, którym się posługiwał, niewiele się różnił od przyrządu, którego Joule użył do wyznaczenia mechanicznego równoważnika ciepła (ust. 2). Przytaczamy tutaj w skróceniu wyniki jego pomiarów, odniesione do jednostki masy. Praca, potrzebna do ogrzania 1 g wody od temperatury o pół stopnia niższej od odpowiedniej temperatury, podanej w pierwszej kolumnie, do temperatury o pół stopnia wyższej, jest obliczona w ergach

10°	$4{,}196.10^7$
15°	$4{,}188.10^7$
20°	$4{,}181.10^7$
25°	$4{,}176.10^7$
30°	$4{,}174.10^7$
35°	$4{,}175.10^7$

Przyjmując za jednostkę ciepła, zgodnie z określeniem kalorii (ust. 1), tę jego ilość, która jest potrzebna do ogrzania 1 g wody od 14,5 do 15,5° C, otrzymujemy na ciepło właściwe wartości

10°	1,0019
15°	1,0000
20°	0,9983
25°	0,9972
30°	0,9967
35°	0,9969

skąd wynika, że ciepło właściwe wody przechodzi w pobliżu temperatury 30° C przez minimum. Według Rowlanda temperatura minimum wynosi 32° C, według Jaegera i Steinwehra (1921 r.), który posługiwali się tą samą metodą pomiaru, 33° C.

Podobne minimum wykazują również i inne ciecze, np. rtęć (w wysokiej temperaturze); w większości jednak przypadków ciepło właściwe cieczy stale wzrasta ze wzrostem temperatury. Przejściu ciała ze stanu stałego w ciekły towarzyszy pospolicie wzrost ciepła właściwego, dochodzący nieraz, jak np. dla wodoru

(temperatura krzepnięcia około — 259° C) lub dla wody, do 100% wartości ciepła właściwego ciała stałego.

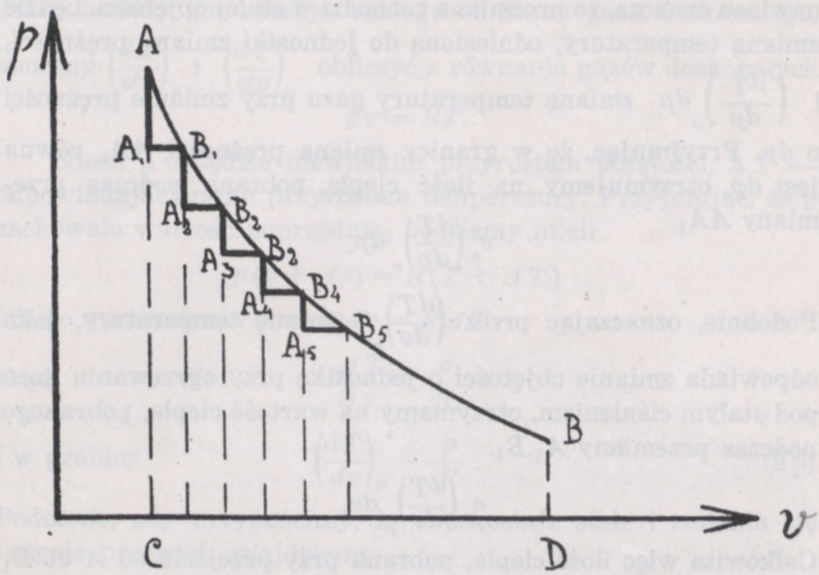
Ciepło właściwe w stałej objętości nie ulega jednak przy zmianie stanu skupienia prawie żadnej zmianie. Jedyny znany, jak dotychczas, wyjątek stanowi woda, której ciepło właściwe c_v wzrasta, podobnie, jak c_p, przy topnieniu dwukrotnie.

7. CIEPŁO POBIERANE PRZEZ GAZY. PRZEMIANY ADIABATYCZNE

Badając własności cieplne gazów, nie można poprzestać tak, jak to czyniliśmy dotychczas, na rozpatrzeniu ogrzewania pod stałym ciśnieniem. Wielka ściśliwość gazów sprawia, że niewielkie stosunkowo zmiany ciśnienia zewnętrznego, których mogliśmy zupełnie nie uwzględniać przy pomiarach ciepła właściwego ciał stałych i ciekłych, powodują znaczne stosunkowo zmiany objętości gazu i, co za tym idzie, w znacznym stopniu wpływają na wynik pomiarów. Podobnie, wielka rozszerzalność gazów, o wiele przewyższająca rozszerzalność ciał stałych i ciekłych, pozwala, gdy gaz znajduje się w szczelnie zamknietym naczyniu, pomijać, przynajmniej w pierwszym przybliżeniu, zmianę objętości naczynia i uważać objętość gazu podczas ogrzewania za stałą, czego urzeczywistnienie w przypadku ciał stałych i ciekłych byłoby połączone z wielkimi trudnościami doświadczalnymi. Mimo jednak tej różnorodności warunków, w jakich gazy mogą być ogrzewane, i tym razem będziemy mogli zdać sobie sprawę z zachodzących zjawisk, posługując się określonymi wyżej pojęciami ciepła właściwego pod stałym ciśnieniem i ciepła właściwego w stałej objętości.

Przypuśćmy, że 1 g gazu, znajdującego się w naczyniu, zamkniętym tłokiem, ogrzewamy od początkowej temperatury t_0 do temperatury t_1, przy czym objętość gazu zmienia się od v_0 do v_1, prężność zaś od p_0 do p_1. Załóżmy, że jakkolwiek zmieniałaby się podczas ogrzewania prężność gazu, posiada ona w każdej chwili dla całej masy gazu tę samą wartość, równą ciśnieniu, wywieranemu przez tłok na gaz. Będziemy mogli wtedy przebieg zjawiska przedstawić krzywą AB, odniesioną do osi pv (rys. 213), temperatura bowiem gazu będzie w każdej chwili wyznaczona przez odpowiednie wartości p i v. Praca, wykonana podczas tej przemiany, jest, oczywiście, sumą prac elementar-

nych, wykonanych przeciwko siłom zewnętrznym. Niech S będzie przekrojem tłoka, p — chwilową wartością ciśnienia, wywieranego na gaz, równą, w myśl założenia, prężności gazu w danej chwili. Siła zewnętrzna, przezwyciężana przez gaz przy zwiększaniu jego objętości, równa jest $p \cdot S$. Jeżeli tłok podniesie się



rys. 213

podczas przemiany elementarnej na wysokość dh, praca elementarna wyniesie $p \cdot S \cdot dh$ albo z uwagi, że Sdh równe jest zmianie objętości gazu dv, $p \cdot dv$. Praca całkowita wyrazi się polem figury $CABD$ (rozdz. II, ust. 8) będzie więc, jak o tym była już mowa (ust. 3), zależna od sposobu, któregośmy użyli dla przeprowadzenia gazu ze stanu A do stanu B, lub, innymi słowy, od kształtu krzywej AB. Ilość ciepła, pobrana przez gaz podczas tej przemiany skończonej, będzie równa

$$Q = U_B - U_A + \frac{1}{J}\mathcal{T}.$$

Zastąpmy daną przemianę skończoną szeregiem przemian elementarnych, w których gaz początkowo ogrzewany jest w stałej objętości, następnie zaś pod stałym ciśnieniem, krzywą AB zastąpimy wtedy linią łamaną $MA_1\, B_1\, A_2\, B_2 \ldots$, która w granicy nieograniczenie mało różni się od krzywej AB. Przejście ze

stanu A do stanu B_1 wyobrażamy sobie zatem jako wynik dwu przemian: AA_1 w stałej objętości, $A_1 B_1$ — pod stałym ciśnieniem. Niech dT będzie zmianą temperatury, odpowiadającą zmianie prężności gazu o dp; $\left(\frac{dT}{dp}\right)_v$, gdzie znaczek v u dołu nawiasu oznacza, że przemiana zachodzi w stałej objętości, będzie zmianą temperatury, odniesioną do jednostki zmiany prężności, i $\left(\frac{dT}{dp}\right)_v dp$ zmianą temperatury gazu przy zmianie prężności o dp. Przyjmując, że w granicy zmiana prężności AA_1 równa jest dp, otrzymujemy na ilość ciepła, pobraną podczas przemiany AA_1

$$c_v \left(\frac{dT}{dp}\right)_v dp.$$

Podobnie, oznaczając przez $\left(\frac{dT}{dv}\right)_p$ zmianę temperatury, jaka odpowiada zmianie objętości o jednostkę przy ogrzewaniu gazu pod stałym ciśnieniem, otrzymamy na wartość ciepła, pobranego podczas przemiany $A_1 B_1$

$$c_p \left(\frac{dT}{dv}\right)_p dv.$$

Całkowita więc ilość ciepła, pobrana przy przejściu od A do B_1 w warunkach nieograniczenie mało różniących się od rzeczywistych, wyniesie

$$dQ = c_p \left(\frac{dT}{dv}\right)_p dv + c_v \left(\frac{dT}{dp}\right)_v dp. \tag{8}$$

Analogicznie możemy obliczyć ilości ciepła pobrane w przemianach $B_1 B_2$, $B_2 B_3$ itd. Suma wyznaczonych w ten sposób wartości da nam ilość ciepła, pobraną podczas przemiany skończonej AB, zależną, jak na to niejednokrotnie zwracaliśmy już uwagę, od drogi, na jakiej zachodzi przejście gazu ze stanu A do stanu B.

Może się jednak zdarzyć, że gaz zmienia swój stan fizyczny, nie pobierając ani nie oddając ciepła na zewnątrz, gdy więc jest odosobniony cieplnie. W takiej przemianie adiabatycznej praca wykonana jest przez ciało kosztem jego energii wewnętrznej (patrz wzór (5) ust. 3), praca przez ciało pobrana zużywa się na jej zwiększenie. Przypuśćmy, że i tym razem przemiana czyni

zadość warunkom, jakim podlegała, zgodnie z poczynionymi założeniami, przemiana AB. Kładąc we wzorze (8) $dQ = 0$, otrzymujemy dla każdej przemiany elementarnej

$$c_p \left(\frac{dT}{dv}\right)_p dv + c_v \left(\frac{dT}{dp}\right)_v dp = 0. \tag{9 a}$$

Jeżeli badany gaz niezbyt odbiega od stanu gazu doskonałego, możemy $\left(\frac{dT}{dv}\right)_p$ i $\left(\frac{dT}{dp}\right)_v$ obliczyć z równania gazów doskonałych

$$pv = RT.$$

Niech Δv będzie niewielkim przyrostem objętości, ΔT — odpowiadającym mu przyrostem temperatury. Przyjmując, że p zachowało wartość poprzednią, będziemy mieli

$$p(v + \Delta v) = R(T + \Delta T)$$

lub po uproszczeniu $\qquad p\Delta v = R\Delta T$

skąd $\qquad \dfrac{\Delta T}{\Delta v} = \dfrac{p}{R}$

i w granicy

$$\left(\frac{dT}{dv}\right)_p = \frac{p}{R}. \tag{9 b}$$

Podobnie, gdy przypuścimy, że v pozostaje stałe i zmienia się jedynie prężność, znajdziemy

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)_v = \frac{v}{R}. \tag{9 c}$$

Podstawienie tych wartości do wzoru (9 a) nada mu postać następującą

$$c_p \cdot \frac{p}{R} dv + c_v \cdot \frac{v}{R} dp = 0$$

lub

$$-\frac{dp}{p} = +\frac{c_p}{c_v} \cdot \frac{dv}{v}. \tag{9 d}$$

Względne zmniejszenie się prężności gazu jest $\frac{c_p}{c_v} = k$ razy większe od względnego przyrostu objętości. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy prężność i objętość gazu są związane ze sobą wzorem

$$pv^k = \text{stałej}, \tag{10}$$

gdzie wartość stałej jest zależna od początkowych warunków, w jakich gaz się znajduje. Krzywa AB, wyrażająca w tym przy-

padku związek między prężnością i objętością gazu, nosi nazwę adiabaty. Równanie adiabaty wyprowadził w 1822 r. Poisson. Stąd też wzór (10) często nazywany jest wzorem Poissona. Ponieważ k jest zawsze większe od jedności, adiabata opada ku osi v bardziej stromo, niż izoterma (rozdz. VI, ust. 8), dla której względne zwiększenie objętości jest równe względnemu zmniejszeniu się prężności.

Wzór (10) otrzymujemy, całkując (9 d) i przyjmując, że k ma wartość stałą

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = -k \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v}$$

$$\lg p_1 - \lg p_0 = -k (\lg v_1 - \lg v_0)$$

$$\lg \frac{p_1}{p_0} = k \lg \frac{v_0}{v_1} \quad \text{lub} \quad \lg \frac{p_1}{p_0} = \lg \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^k,$$

skąd

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^k \text{ i ostatecznie } p_1 v_1^k = p_0 v_0^k .$$

W przypadku, gdy przemiana jest częściowo tylko adiabatyczna, gdy więc istnieje wymiana ciepła z otoczeniem, związek między prężnością i objętością gazu można wyrazić wzorem

$$pv^n = \text{stałej}, \tag{10a}$$

gdzie n na ogół nie jest równe k. Wzór ten stosuje się również do przemian izotermicznych, dla których $n = 1$.

Przepiszmy wzór (8) w postaci

$$dQ = cdT = c_p \left(\frac{dT}{dv}\right)_p dv + c_v \left(\frac{dT}{dp}\right)_v dp,$$

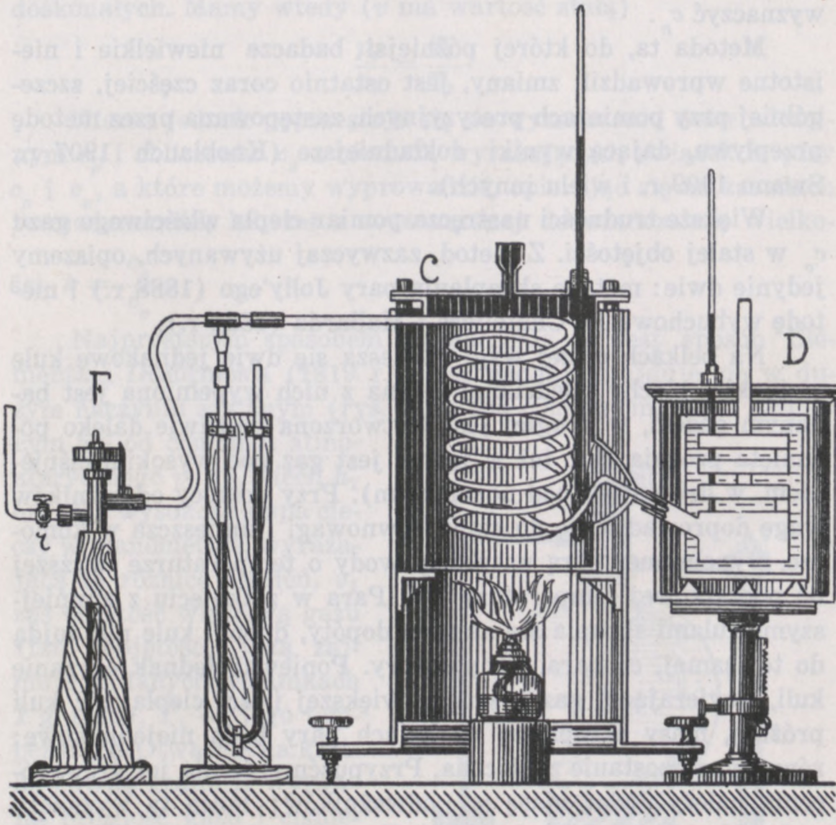
gdzie dT oznacza przyrost temperatury gazu przy przejściu ze stanu A do B, (rys. 213), c — ciepło właściwe gazu, odpowiadające danej przemianie. Ze wzoru tego wynika, że w przemianie adiabatycznej $c = 0$, w przemianie izotermicznej $c = \pm \infty$ (dT jest wtedy równe zeru), w przemianie izobarycznej ($dp = 0$) $c = c_p$, w izochorycznej ($dv = 0$) $c = c_v$. Obszerniejsze rozpatrzenie tego politropizmu ciepła właściwego (wielopostaciowości, grec. polys — mnogi, tropos — rodzaj, sposób) dał Szyszkowski (1912 r.).

8. WYZNACZANIE CIEPŁA WŁAŚCIWEGO GAZU

Pierwsze dokładne pomiary ciepła właściwego gazów c_p pod stałym ciśnieniem wykonał Regnault (1862 r.). Metoda przez niego opracowana była aż do ostatnich lat jedyną, powszechnie używaną.

Z poprzedników Regnaulta zasługują na wymienienie Delaroche i Bérard (1813 r.). Pomiary ich dawały możność wyznaczenia stosunku wartości c_p dla rozmaitych gazów.

Gaz znajdujący się w zbiorniku, (pominiętym na rys. 214), przechodził przez rurkę *r*, zaopatrzoną w wentyl regulujący *F*, do wężownicy, umieszczonej w naczyniu *C*, zawierającym olej (lub mieszaninę chłodzącą przy pomiarach w niskich tempera-



rys. 214

turach), gdzie dochodził do pewnej oznaczonej temperatury, stamtąd zaś przepływał do naczynia, utworzonego z czterech płaskich pudełek metalowych, połączonych ze sobą rurkami pionowymi. Spiralne przegródki, odpowiednio rozmieszczone wewnątrz pudełek, zamieniały je w rodzaj wężowatego kanału, tak, że gaz przebywał dostatecznie długą drogę, aby, wychodząc z tych naczyń, posiadać tę samą temperaturę, co kalorymetr *D*,

w którym naczynia te były zanurzone. Stałość ciśnienia przepływającego gazu, wyznaczaną przy pomocy manometru, regulowano wentylem F. Znając masę gazu, która przepłynęła przez kalorymetr (masę tę można wyznaczyć, mierząc ciśnienie gazu w zbiorniku przed i po pomiarze, oraz wiedząc, jaka jest pojemność zbiornika), znając dalej początkową temperaturę gazu oraz początkową i końcową temperaturę kalorymetru, można wyznaczyć c_p.

Metoda ta, do której późniejsi badacze niewielkie i nieistotne wprowadzili zmiany, jest ostatnio coraz częściej, szczególniej przy pomiarach precyzyjnych, zastępowana przez metodę przepływu, dającą wyniki dokładniejsze (Knoblauch 1907 r., Swann 1909 r. i wielu innych).

Większe trudności nastręcza pomiar ciepła właściwego gazu c_v w stałej objętości. Z metod, zazwyczaj używanych, opiszemy jedynie dwie: metodę skraplania pary Jolly'ego (1888 r.) i metodę wybuchową Le Châteliera i Mallarda (1881 r.).

Na belkach czułej wagi zawiesza się dwie jednakowe kule z cienkiej blachy miedzianej. Jedna z nich wypełniona jest badanym gazem, w drugiej jest wytworzona możliwie daleko posunięta próżnia (lub też w jednej jest gaz pod wysokim ciśnieniem, w drugiej — pod normalnym). Przy pomocy odważników wagę doprowadza się do stanu równowagi i umieszcza w komorze, wypełnionej parą nasyconą wody o temperaturze wyższej od początkowej temperatury kul. Para w zetknięciu z zimniejszymi kulami skrapla się na nich dopóty, dopóki kule nie dojdą do tej samej, co para, temperatury. Ponieważ jednak ogrzanie kuli, zawierającej gaz, wymaga większej ilości ciepła, niż kuli próżnej, masy skroplonej na kulach pary będą niejednakowe; równowaga zostanie zakłócona. Przypuśćmy, że dla jej przywrócenia należy dodać masę m_1 odważników; masa ta wyznacza nadwyżkę skroplonej pary na kuli, zawierającej gaz. Oznaczając ciepło utajone skraplania przez r, masę gazu w kuli przez m_g, temperaturę początkową gazu przez t_1, temperaturę pary przez t_2, otrzymujemy

$$m_1 . r = m_g . c_v \ (t_2 - t_1).$$

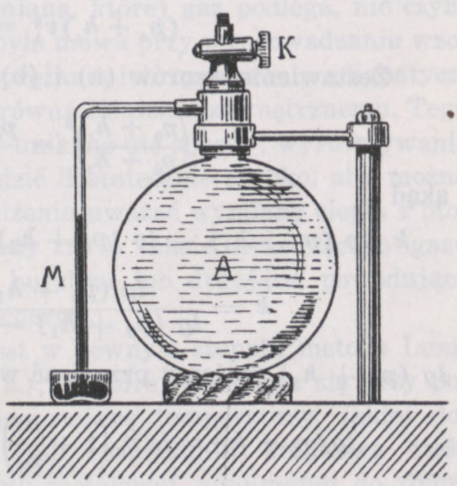
Ten sposób pomiaru, nastręczający przy wykonaniu duże trudności doświadczalne, obecnie rzadko jest używany. Częściej stosowana jest metoda wybuchowa. Do gazu, umieszczonego

w grubościennym szczelnym naczyniu (tzw. bombie kalorymetrycznej), domieszana jest niewielka ilość gazowej mieszaniny wybuchowej (np. gazu piorunującego). Wybuch powoduje bardzo znaczny wzrost temperatury, który wyznaczamy, mierząc ciśnienie gazu w chwili wybuchu i przy końcu pomiaru, gdy temperatura gazu zrówna się z temperaturą kalorymetru, przy czym przyjmujemy, że gaz w danych warunkach podlega prawu gazów doskonałych. Mamy wtedy (v ma wartość stałą)

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Nieraz jednak poprzestaje się na wyznaczeniu doświadczalnym c_p i obliczeniu c_v z równań, wyrażających związek między c_p i c_v, a które możemy wyprowadzić, opierając się na zasadach termodynamiki, lub też z wyznaczonej doświadczalnie wielkości $k = \frac{c_p}{c_v}$.

Najprostszym sposobem wyznaczenia k jest sposób Clémenta i Desormes'a (1819 r.). Gaz badany znajduje się w dużym naczyniu szklanym (rys. 215) pod ciśnieniem, nieco różniącym się od ciśnienia atmosferycznego p_0 [1]). Niech h_1 oznacza wysokość słupa cieczy w manometrze, wyrażającą tę różnicę ciśnień, v_1 zaś objętość właściwą gazu (tzn. objętość, jaką zajmuje w danych warunkach 1 g gazu), T_1 — jego temperaturę. Otwarcie na krótką chwilę kranu K wyrówna prężność gazu i ciśnienie zewnętrzne. Gaz albo rozpręży się, gdy $h_1 > 0$, i wykona pracę przeciwko ciśnieniu zewnętrznemu,



rys. 215

1) Na rysunku uwzględniony jest tylko przypadek, gdy ciśnienie gazu jest mniejsze od atmosferycznego, gdy więc, zgodnie z naszymi oznaczeniami, $h_1 < 0$.

wskutek czego temperatura jego się obniży lub też ulegnie zgęszczeniu, gdy $h_1 < 0$, pobierze pewną pracę, wskutek czego dozna zwyżki temperatury. W końcowym wyniku tej przemiany, którą przyjmujemy za adiabatyczną, prężność gazu równa będzie p_0, objętość właściwa v_2, temperatura T'. Po zamknięciu kranu gaz zacznie się stopniowo ogrzewać (lub ostygać) do temperatury otoczenia, a więc do swej temperatury początkowej; prężność jego wzrośnie (lub zmniejszy się) o h_2 ponad ciśnienie p_0, objętość właściwa zachowa wobec zamknięcia kranu K wartość poprzednią v_2. Ponieważ gaz ostatecznie będzie miał tę samą temperaturę, co na początku, związek między początkowym ciśnieniem i objętością, a końcowymi wartościami tych wielkości wyrazi się prawem Boyle'a-Mariotte'a

$$(p_0 + h_1)\, v_1 = (p_0 + h_2)\, v_2$$

lub

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_0 + h_1}{p_0 + h_2}. \tag{a}$$

W przemianie adiabatycznej, której gaz doznał podczas rozprężania (lub zgęszczania), związek między p i v ustala wzór Poissona

$$(p_0 + h_1)\, v_1^k = p_0\, v_2^k. \tag{b}$$

Zestawienie wzorów (a) i (b) prowadzi do równania

$$\left(\frac{p_0 + h_1}{p_0 + h_2}\right)^k = \frac{p_0 + h_1}{p_0},$$

skąd

$$k\,[lg\,(p_0 + h_1) - lg\,(p_0 + h_2)] = lg\,(p_0 + h_1) - lg\,p_0$$

$$k = \frac{lg\,(p_0 + h_1) - lg\,p_0}{lg\,(p_0 + h_1) - lg\,(p_0 + h_2)} \tag{c}$$

$lg\,(p_0 + h_1)$ możemy przepisać w postaci

$$lg\,(p_0 + h_1) = lg\,p_0\left(1 + \frac{h_1}{p_0}\right) = lg\,p_0 + lg\left(1 + \frac{h_1}{p_0}\right).$$

Ułamek $\frac{h_1}{p_0}$ jest zawsze mniejszy od jedności, wobec czego

$$lg\left(1 + \frac{h_1}{p_0}\right) = \frac{h_1}{p_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{h_1}{p_0}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h_1}{p_0}\right)^3 - \ldots$$

Wynika to ze znanego wzoru:

$$lg\,(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4,$$

gdzie $x=\frac{h_1}{p_0}$.

Odrzucając drugie i wyższe potęgi ułamka, otrzymujemy

$$lg\left(1+\frac{h_1}{p_0}\right)=\frac{h_1}{p_0}.$$

Analogicznie

$$lg\left(1+\frac{h_2}{p_0}\right)=\frac{h_2}{p_0}.$$

Po podstawieniu do wzoru (c) otrzymujemy

$$k=\frac{lg\,p_0+\frac{h_1}{p_0}-lg\,p_0}{lg\,p_0+\frac{h_1}{p_0}-lg\,p_0-\frac{h_2}{p_0}}=\frac{h_1}{h_1-h_2}. \tag{11}$$

Pomiar sprowadza się zatem do wyznaczenia początkowej i końcowej różnicy ciśnień, w jednostkach zupełnie dowolnych.

Wadą zasadniczą tej prostej metody jest, jak to wykazał Röntgen (1873 r.), że przemiana, której gaz podlega, nie czyni zadość warunkom, o jakich była mowa przy wyprowadzaniu wzorów (8) i (10): podczas rozprężania lub zgęszczania adiabatycznego prężność gazu nie jest równa ciśnieniu zewnętrznemu. Tego podstawowego błędu metody uniknąć nie sposób; wyrównywanie bowiem ciśnień musi zachodzić dostatecznie szybko, aby można było przynajmniej w przybliżeniu uważać wymianę ciepła z otoczeniem za równą zeru, wtedy zaś w masie uchodzącego gazu powstają gwałtowne ruchy burzliwe lub drgające, powodujące znaczne stosunkowo straty energii.

Od tego błędu wolna jest w pewnym stopniu metoda Lummera i Pringsheima (1898 r.), w której wyznacza się przy pomocy termometru oporowego zmianę temperatury, jakiej doznaje podczas zgęszczania (lub rozprężania) środkowa część masy gazu, zawartego w kuli metalowej, zanurzonej do zbiornika z wodą o stałej temperaturze. Wyrównywanie ciśnień może zachodzić dostatecznie wolno, gdyż ta część masy gazu, której temperaturę się wyznacza, jest dobrze zabezpieczona przez warstwy sąsiednie od wymiany ciepła ze ścianami naczynia.

O ile gaz znajduje się w stanie bliskim stanu gazu doskonałego, można wziąć za punkt wyjścia do wyznaczania k wzór (10). Podstawiając w nim $\frac{RT_1}{v_1}$ zamiast p_1 i $\frac{RT_2}{v_2}$ zamiast p_2, otrzymujemy po po skróceniu przez R

$$v_1^{k-1} T_1 = v_2^{k-1} T_2$$

lub

$$\frac{v_1^{k-1}}{v_2^{k-1}} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Ponieważ jednak $v_1 = C \cdot p_1^{\frac{1}{k}}$ i $v_2 = C \cdot p_2^{\frac{1}{k}}$, będziemy mieli

$$\frac{p_1^{\frac{k-1}{k}}}{p_2^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{T_2}{T_1}. \tag{11 a}$$

Znając początkową i końcową prężność gazu oraz początkową i końcową jego temperaturę, możemy wyznaczyć k.

Tego rodzaju zgęszczenia i rozrzedzenia adiabatyczne powstają również, jak to wykazał Laplace (1816 r.), i wtedy, gdy w masie gazu rozchodzą się fale głosowe. Prędkość rozchodzenia się fal wyraża się wzorem

$$v = \sqrt{\frac{kp}{\varrho}},$$

gdzie ϱ = gęstość gazu, stąd

$$k = \frac{\varrho}{p} v^2. \tag{12}$$

Z pomiaru zatem prędkości rozchodzenia się głosu w gazie można wyznaczyć k. Ten sposób, użyty, między innymi, przez Kundta i Warburga (1876 r.) do wyznaczenia k pary rtęci, następnie przez Wüllnera do wyznaczenia k wielu innych gazów, jest jeszcze i dzisiaj dość często stosowany (Dixon, 1921 r., Partington i Shilling, 1923 r.) szczególniej, gdy chodzi o pomiary w wysokich temperaturach, jakkolwiek, jak się zdaje, ustępuje on w dokładności metodzie Lummera i Pringsheima.

Prostą, aczkolwiek niezbyt dokładną odmianę metody, użytej po raz pierwszy przez Assmanna (1852 r.) i następnie Müllera (1883 r.), dał Rüchardt (1929 r.).

Przez korek, zamykający szczelnie sporą butlę z badanym gazem, przechodzi pionowa rurka szklana, w której umieszczona jest kulka metalowa, o promieniu równym promieniowi rurki i mogąca swobodnie się w niej przesuwać. Niech b oznacza ciśnienie atmo-

sferyczne, p — prężność gazu, s — przekrój rurki, m — masę kuli. Kula będzie w rurce w spoczynku, gdy

$$p = b + \frac{mg}{s}.$$

Przypuśćmy, że wpychamy kulkę nieco głębiej; gaz ulega wtedy zgęszczeniu i prężność jego wzrasta o dp. Na kulkę działa wtedy ku górze siła, równa sdp; zakładając, że zgęszczenie jest adiabatyczne i oznaczając głębokość, na jaką kulka jest wepchnięta, przez x, otrzymujemy z równania (9 d)

$$dp = -kp\frac{dv}{v} = -kp\frac{sx}{v}.$$

Siła zatem, działająca na kulkę, jest proporcjonalna do jej odchylenia od położenia równowagi; nadaje jej przyspieszenie, skierowane ku górze, które stopniowo maleje i dochodzi do zera, gdy kulka wraca do początkowego położenia; gdy kulka, na skutek nabytej energii ruchu, podnosi się wyżej, powodując rozrzedzenie gazu, kierunek siły zmienia się na odwrotny i wartość jej wzrasta w miarę podnoszenia się kulki, która, wyczerpawszy na pokonanie tej siły swą energię ruchu, zaczyna opadać na dół ruchem o przyspieszeniu stopniowo malejącym aż do położenia równowagi, a później znów wzrastającym. Do tych drgań kulki, które by trwały nieograniczenie długo, gdyby w układzie nie działały siły tarcia, możemy zastosować wzory, wyprowadzone w rozdz. II, ust. 13. Mamy zatem

$$4\pi^2 m \cdot \frac{x}{T^2} = kp\frac{s^2 x}{v},$$

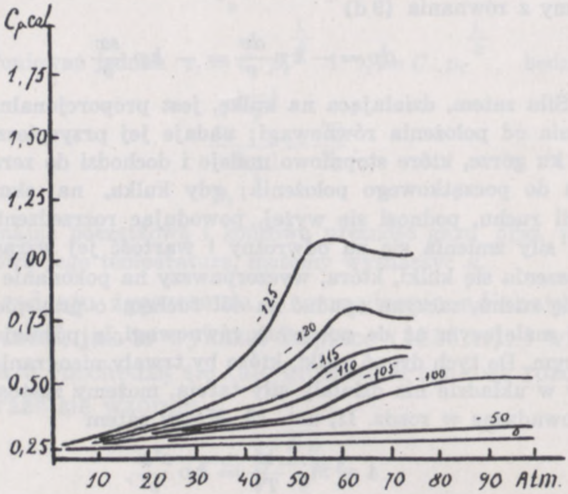
stąd
$$k = \frac{4\pi^2 . mv}{T^2 p . s^2};$$

znając więc objętość i prężność gazu i mierząc okres drgań kulki, możemy wyznaczyć k.

Według Regnaulta, ciepło właściwe gazów pod stałym ciśnieniem jest w temperaturach, odległych od temperatury krytycznej danego gazu (rozdz. XI, ust. 7), prawie niezależne od ciśnienia. Zmieniając ciśnienie od 1 do 10 Atm, otrzymał on na średnie ciepło właściwe c w granicach od 0° do 200° wartości prawie dokładnie stałe, przy czym dla powietrza równe 0,2375, azotu — 0,2434, tlenu — 0,2175, tlenku węgla — 0,2450, metanu — 0,5929 i wodoru — 3,409.

W rzeczywistości jednak i w tych temperaturach c_p wzrasta nieco ze wzrostem ciśnienia: według Holborna i Jakoba wzrost ten nie przekracza jednak 1‰ przy wzroście ciśnienia o 1 Atm; według wcześniejszych (1894 r.) pomiarów Lussany wzrost ten jest nieco większy.

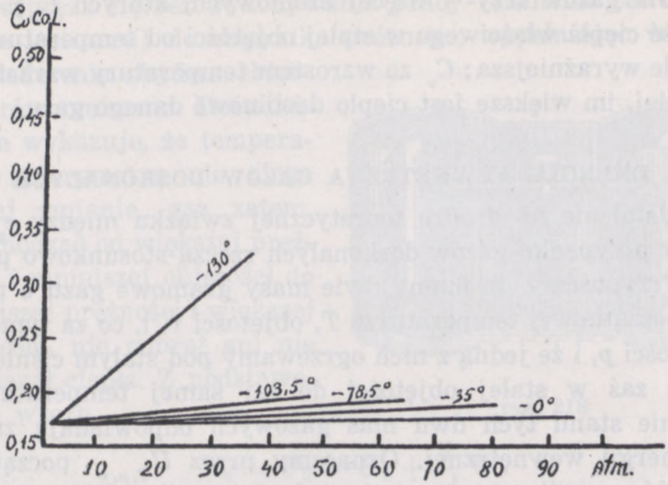
W niskich temperaturach zależność c_p od ciśnienia występuje o wiele wyraźniej. Witkowski w swych klasycznych badaniach nad własnościami termodynamicznymi powietrza wykazał (1896 r.), że w niskich temperaturach c_p przechodzi przez maximum, tym wyraźniejsze, im temperatura jest niższa (rys. 216). W miarę zmniejszania się ciśnienia różnice wartości



rys. 216

c_p w różnych temperaturach stają się coraz mniejsze, dążąc do wspólnej granicy, przy $p \to 0$ równej 0,2372, prawie równej liczbie, otrzymanej przez Regnaulta.

Zależność c_v od ciśnienia wyznaczał doświadczalnie Jolly (1886 r.). Z pomiarów jego wynika, że wartość c_v powietrza i wodoru w granicach od 20° C do 100° C zmienia się bardzo niewiele ze wzrostem ciśnienia od 1 do 25 Atm. Zmiany te są nieco większe dla dwutlenku węgla: w danych granicach temperatur c_v wzrasta o mniej więcej 6% swej początkowej wartości przy wzroście ciśnienia od 1 do 20 Atm. Witkowski, wyznaczając na drodze teoretycznej c_v ze znalezionych doświadczalnie wartości c_p, stwierdził, że i w tym przypadku zależność od ciśnienia jest tym większa, im niższa jest temperatura (rys. 217). Dla wszystkich jednak temperatur zależność ta wyraża się mniej więcej linią prostą: c_v nie przechodzi tak, jak c_p, przez maxi-



rys. 217

mum. Pod ciśnieniem $p \to 0$ otrzymujemy i tutaj graniczną wartość (równą w przypadku powietrza 0,169), niezależną w danych granicach od temperatury. W rzeczywistości jednak wartość c_v nie zależy od temperatury jedynie w przypadku gazów jednoatomowych. Biorąc zamiast c_v ciepło właściwe drobinowe C_v (odniesione do jednej drobiny gramowej), otrzymujemy dla tych gazów mniej więcej tę samą we wszystkich temperaturach wartość 3 kal/stop. (para rtęci, sodu, hel, argon, neon, krypton, ksenon). Dla gazów dwuatomowych, których C_v w temperaturze normalnej wynosi około 5 kal/stop. (wodór, tlen, azot, tlenek węgla, chlorowodór), zmiany ciepła właściwego w zależności od temperatury są tak małe, że w niewielkich granicach temperatur możemy ich zupełnie nie brać pod uwagę, tym bardziej, że dokładność, z jaką pospolicie wyznacza się ciepło właściwe, jest o wiele mniejsza, niż przy innych pomiarach kalorymetrycznych.

Tak np. według Henry'ego (1932 r.) przy wzroście temperatury o 1° C, w granicach od 0° C do 100° C, C_v powietrza wzrasta przeciętnie o 0,016%, C_v azotu o 0,008%, tlenu o 0,03%. Wyjątek stanowi chlor, mający w temperaturze pokojowej (17° C) C_v o wyjątkowo wysokiej wartości 5,86; C_v chloru wzrasta przeciętnie o 0,085% przy wzroście temperatury o 1° C.

Dla gazów trzy- i więcej atomowych, których $C_v > 6$, zależność ciepła właściwego w stałej objętości od temperatury jest o wiele wyraźniejsza; C_v ze wzrostem temperatury wzrasta tym bardziej, im większe jest ciepło drobinowe danego gazu.

9. ENERGIA WEWNĘTRZNA GAZÓW DOSKONAŁYCH

Ustalenie na drodze teoretycznej związku między c_p i c_v jest w przypadku gazów doskonałych rzeczą stosunkowo prostą.

Przypuśćmy, że mamy dwie masy gramowe gazu o tej samej początkowej temperaturze T, objętości v, i, co za tym idzie, prężności p, i że jedną z nich ogrzewamy pod stałym ciśnieniem, drugą zaś w stałej objętości do tej samej temperatury T'. Zmianie stanu tych dwu mas gazowych odpowiadają zmiany ich energii wewnętrznej. Oznaczmy przez $U_{T,p,v}$ początkową wartość energii wewnętrznej, jednakową dla obydwu gazów; gaz, ogrzewany pod stałym ciśnieniem, doznał zmiany temperatury i objętości, końcowa wartość jego energii wewnętrznej wynosi $U_{T',p,v'}$, gdzie v' — objętość po ogrzaniu; gaz, ogrzewany w stałej objętości, doznał zmiany temperatury i prężności, jego energia wewnętrzna przybrała wartość $U_{T',p',v}$, gdzie p' — prężność po ogrzaniu. Z równania (6) otrzymamy

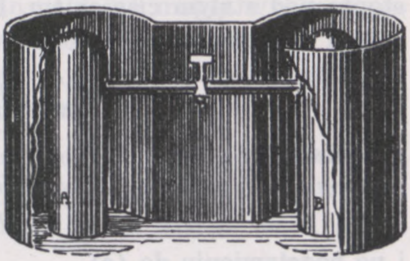
$$c_p(T' - T) = U_{T',p,v'} - U_{T,p,v} + \frac{1}{J}p(v' - v) \tag{a}$$

$$c_v(T' - T) = U_{T',p',v} - U_{T,p,v}. \tag{b}$$

Stany końcowe tych dwu mas gazowych różnią się, jak widzimy, wartością prężności i objętości; gdybyśmy więc wiedzieli, w jaki sposób energia wewnętrzna gazu zależy od tych dwu wielkości, moglibyśmy na podstawie wzorów (a) i (b) ustalić związek między c_p i c_v.

Na drodze doświadczalnej zagadnienie to zostało rozwiązane po raz pierwszy przez Gay-Lussaca (1807 r.), a następnie przez Joule'a (1846 r.). Doświadczenia, wykonane w obydwu przypadkach w sposób prawie identyczny, można ująć w następujący schemat. W kalorymetrze odpowiedniego kształtu (rys. 218) umieszczone są dwa zbiorniki, połączone rurką z kranem. Jeden ze zbiorników wypełniony jest badanym gazem, w drugim wytworzona jest próżnia. Gdy kran otworzymy,

gaz rozpręża się bez wykonywania pracy (ciśnienie zewnętrzne równe jest zeru) do zbiornika próżnego, wypełniając w końcu doświadczenia obydwa zbiorniki równomiernie. Doświadczenie wykazuje, że temperatura kalorymetru nie ulega żadnej zmianie, gaz zatem, przechodząc od większej prężności i mniejszej objętości do mniejszej prężności i większej objętości, nie pobrał ani nie wywiązał ciepła. Z podstawowego wzoru



rys. 218

$$Q = U_2 - U_1 + \frac{1}{J}\mathcal{T}$$

otrzymujemy, kładąc Q i $\mathcal{T} = 0$

$$U_2 = U_1 .$$

Energia wewnętrzna zachowała więc wartość początkową.

W doświadczeniu tym należy rozróżniać dwa stadia: po otwarciu kranu gaz ze zbiornika uchodzi z pewną prędkością, energia jego ruchu powstaje kosztem energii cieplnej gazu, którego temperatura się obniża; strumień gazu, przechodząc do zbiornika próżnego i uderzając o ściany naczynia, oddaje im swoją energię ruchu, która przekształca się w energię cieplną, częściowo zaś zużywa ją na pokonanie oporów tarcia; wywiązana w ten sposób ilość ciepła równa jest ciepłu pobranemu. Można to wykazać, mierząc, jak to robił Gay-Lussac, temperaturę gazu w zbiorniku, z którego gaz wypływał, i w zbiorniku, do którego gaz wpływał, lub też umieszczając, jak to robił Joule, każdy ze zbiorników w oddzielnym kalorymetrze.

Stąd wynika, że energia wewnętrzna gazu nie zależy od objętości i prężności, lecz jest jedynie funkcją jego temperatury

$$U = f(T). \qquad (13)$$

Możemy zatem we wzorach (a) i (b) uważać $U_{T',p,v'}$ i $U_{T',p',v}$ za równe.

Podstawiając wartość c_v ze wzoru (b) do wzoru (a), znajdujemy

$$c_p (T' - T) = c_v (T' - T) + \frac{1}{J} p (v' - v) \qquad (c)$$

lub $$(c_p - c_v)(T' - T) = \frac{1}{J} p(v' - v). \qquad (c')$$

We wzorze tym v' oznacza objętość gazu po ogrzaniu o $T' - T$ stopni pod stałym ciśnieniem. Przyjmując, że badany gaz jest gazem doskonałym, ze wzoru

$$\frac{pv'}{T'} = \frac{pv}{T} = R$$

otrzymujemy

$$v' - v = \frac{R}{p}(T' - T)$$

i po podstawieniu do (c)

$$c_p - c_v = \frac{1}{J} R. \qquad (14)$$

Ponieważ c_p i c_v odniesione są do jednego grama, nie zaś do jednej drobiny gramowej, stała gazowa R nie ma tej wartości, jaką podaliśmy w rozdz. VIII, ust. 4, lecz tyle razy mniejszą, ile jednostek ma ciężar drobinowy danego gazu. Niech badanym gazem będzie powietrze o ciężarze drobinowym 28,8; wartość stałej gazowej, którą oznaczymy tym razem przez R_1, wyniesie

$$R_1 = \frac{8{,}314 \,.\, 10^7}{28{,}8} \text{ erg/stop.} \doteq 0{,}29 \,.\, 10^7 \text{ erg/stop.}$$

Biorąc na c_p i $k = \frac{c_p}{c_v}$ wartości, wyznaczone przez Regnaulta, równe odpowiednio 0,2375 i 1,41 i znajdując stąd $c_v = 0{,}168$, mamy

$$0{,}2375 - 0{,}168 = 0{,}0695 = \frac{1}{J} \cdot 0{,}29 \,.\, 10^7.$$

Na wartość więc J — mechanicznego równoważnika ciepła — otrzymamy liczbę $4{,}173 \,.\, 10^7$, nieco mniejszą od podanej w ust. 2.

W ten właśnie sposób J. R. Mayer wyznaczył (1842 r.) mechaniczny równoważnik ciepła.

10. ZJAWISKO JOULE'A I THOMSONA

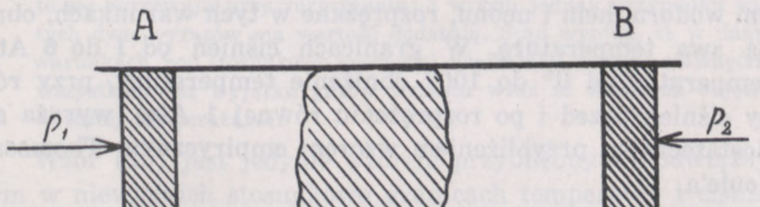
Z rozważań ustępu poprzedniego wynika, że gdy gaz rozpręża się do próżni, a więc bez pokonywania oporu zewnętrznego, z prędkością wypływu tak małą, że praca, zużyta na zwięk-

szenie jego energii ruchu, stanowi znikomy ułamek jego energii wewnętrznej, temperatura jego się nie zmienia. W rzeczywistości jednak tak nie jest: rozprężaniu gazu towarzyszy zawsze zmiana jego temperatury. Zmiany tej nie mogły wykazać pomiary Gay-Lussaca i Joule'a; w warunkach bowiem, w jakich były wykonywane ich doświadczenia, zmiana ta była zbyt mała, aby mogła być stwierdzona pomiarem.

W doświadczeniach Joule'a np., gdzie ciśnienie początkowe równe było 22 Atm, końcowe 11 Atm, obniżenie temperatury kalorymetru wynosiłoby, według Pollitzera, około $\frac{1}{200}$ ° C, wartość, leżącą w granicach błędu doświadczenia.

Dopiero użycie przez W. Thomsona i Joule'a (1853 r.) dokładniejszej metody pomiaru pozwoliło stwierdzić, że podobnie, jak prawo Boyle'a-Mariotte'a i Gay-Lussaca, wzór (13) odpowiada pewnemu stanowi granicznemu, gdy zarówno wartość początkowej prężności, jak i różnica prężności przed i po rozprężeniu jest znikomo mała.

Metoda, użyta w tym pomiarze, jest zgoła odmienna od metody Gay-Lussaca i Joule'a. Gaz, znajdujący się w rurce, zabezpieczonej od wymiany ciepła z otoczeniem, przepychany był pod ciśnieniem p_1 przez zatyczkę z waty, dzielącą rurę na dwie części, rozprężając się poza zatyczką do ciśnienia atmosferycznego p_2 (rys. 219). Przypuśćmy dla uproszczenia rozumowania,



rys. 219

że przed rozpoczęciem doświadczenia do zatyczki przylegał bezpośrednio tłok B, wywierający ciśnienie p_2, tłok zaś A wywierający ciśnienie p_1, znajdował się w odległości l_1 od zatyczki, tak że objętość gazu, znajdującego się przed zatyczką, wyno-

siła l_1S, gdzie S — przekrój rury. W ciągu doświadczenia tłok A przesunął się w głąb rury, przepychając przez zatyczkę zawartą pod nim masę gazu. Praca sił zewnętrznych, wykonana podczas tego przesunięcia, wyniosła $p_1l_1S = p_1v_1$. Gaz, wychodząc na drugą stronę z prędkością znikomo małą, cała bowiem jego energia ruchu zużyła się na pokonanie bardzo znacznego oporu tarcia w zatyczce, odsuwał stopniowo tłok B, wykonywając pracę $pSl_2 = p_2v_2$. Różnica pracy pobranej i wykonanej $p_1v_1 - p_2v_2$ nie jest, jak wiemy, (rozdz. VI, ust. 8) równa zeru. Możemy bez trudu ją wyznaczyć, znając zależność iloczynu pv od ciśnienia w danej temperaturze. Pod ciśnieniami mniejszymi od p_m, pod którym pv ma wartość najmniejszą, p_2v_2 jest większe od p_1v_1; praca wykonana przez gaz jest większa od pracy pobranej. Gdyby energia wewnętrzna gazu była istotnie niezależna od objętości i prężności, moglibyśmy oczekiwać obniżenia temperatury, odpowiadającego tej właśnie nadwyżce pracy. Pomiary Thomsona i Joule'a wykazały, że tak bynajmniej nie jest: chcąc doprowadzić gaz po rozprężeniu do tej samej temperatury, jaką miał przed rozprężeniem, musimy dostarczyć mu ciepła w ilości, która na ogół nie jest równoważna różnicy prac $p_1v_1 - p_2v_2$. Stąd wynika, że zmiana temperatury spowodowana jest nie tylko przez nierówność pracy pobranej i wykonanej, lecz również przez zmianę, jakiej doznała energia wewnętrzna gazu na skutek zmiany jego objętości.

W temperaturach bliskich 0° C wszystkie gazy, z wyjątkiem wodoru, helu i neonu, rozprężane w tych warunkach, obniżają swą temperaturę. W granicach ciśnień od 1 do 6 Atm i temperatur od 0° do 100° obniżenie temperatury, przy różnicy ciśnień przed i po rozprężeniu równej 1 Atm, wyraża się z dostatecznym przybliżeniem wzorem empirycznym Thomsona i Joule'a

$$\delta = a\left(\frac{273}{T}\right)^2, \tag{15}$$

gdzie a jest wielkością stałą, charakterystyczną dla danego gazu. Dla powietrza $a = 0{,}276$.

Oznaczmy przez U_1 początkową wartość energii wewnętrznej 1 grama gazu, przez U'_2 — wartość jej po rozprężeniu, gdy temperatura gazu zmieniła się o ΔT, objętość zaś właściwa przybrała war-

tość v'_2. Z równania zasadniczego (6) mamy, kładąc $Q = 0$, układ bowiem jest cieplnie odosobniony,

$$U'_2 - U_1 = \frac{1}{J}(p_1 v_1 - p_2 v'_2)$$

lub, przyjmując dla uproszczenia, że energię wewnętrzną mierzymy w jednostkach mechanicznych, i przenosząc wyrazy z tymi samymi znaczkami na tę samą stronę,

$$U_1 + p_1 v_1 = U'_2 + p_2 v'_2\,; \qquad \text{(a)}$$

przemiana zatem zachodzi przy stałej wartości funkcji H Gibbsa (patrz. ust. 4).

Aby doprowadzić gaz do poprzedniej temperatury, nie zmieniając jego prężności, musimy dostarczyć mu (lub odjąć w przypadku wodoru, helu i neonu) ilość ciepła równą $c_p . \Delta T$. Objętość jego właściwa przybierze wtedy wartość v_2, energia zaś wewnętrzna — U_2. Będziemy mieli

$$U_2 - U'_2 = Jc_p . \Delta T + p_2 (v'_2 - v_2)$$

lub

$$U_2 + p_2 v_2 = U'_2 + p_2 v'_2 + Jc_p . \Delta T. \qquad \text{(b)}$$

Podstawiając na $U'_2 + p_2 v'_2$ ze wzoru (a) $U_1 + p_1 v_1$, otrzymamy po uproszczeniu

$$U_2 - U_1 = Jc_p . \Delta T + p_1 v_1 - p_2 v_2.$$

Dla wszystkich gazów, z wyjątkiem trzech wyżej wymienionych, wartość $p_1 v_1 - p_2 v_2$ jest w warunkach doświadczenia Thomsona i Joule'a mniejsza od zera, $Jc_p . \Delta T > 0$. Każdy z tych wyrazów oddzielnie możemy obliczyć; okazuje się, że $Jc_p . \Delta T$ jest większe od $p_2 v_2 - - p_1 v_1$, U_2 jest zatem większe od U_1. Dla wodoru, helu i neonu $p_1 v_1 - p_2 v_2 > 0$ (patrz rozdz. VI, ust. 8), $Jc_p\ \Delta T < 0$, gdyż gazy te się ogrzewają przy rozprężaniu; i w tym jednak przypadku suma tych dwu wyrazów ma wartość dodatnią. Stąd wynika, że w danych warunkach, pod stosunkowo miernymi ciśnieniami, energia wewnętrzna wszystkich bez wyjątku gazów wzrasta wraz ze wzrostem objętości w stałej temperaturze.

Wzór (15) jest jedynie wzorem przybliżonym, obowiązującym w niewielkich stosunkowo granicach temperatur i ciśnień. Przebieg bowiem zjawiska zależy w wysokim stopniu od początkowej temperatury i początkowej prężności. W miarę wzrostu temperatury wielkość δ początkowo wzrasta i to tym bardziej, im niższe jest ciśnienie początkowe, przechodzi przez maximum i następnie maleje, dochodząc w pewnej temperaturze do wartości zero, powyżej zaś tej temperatury, zmieniając znak na odwrotny. Istnienie takiej temperatury o d w r ó c e n i a (i n w e r s j i), powyżej której gaz, rozprężany, ogrzewa się,

pierwszy stwierdził Olszewski (1902 r.), wyjaśniając w ten sposób pozorną anomalię wodoru w temperaturze 0° C, leżącej o 80,5° C powyżej jego temperatury odwrócenia. Dla helu temperatura odwrócenia wynosi nieco poniżej — 173° C (Perry, 1924 r.).

E. Natanson (1887 r.) powtórzył doświadczenia Joule'a i Thomsona, rozprężając dwutlenek węgla w temp. 20°; ostatnio badania tego zjawiska przeprowadził w szerokich granicach temperatur i ciśnień Hausen (1925 r.).

ROZDZIAŁ X

DRUGA ZASADA TERMODYNAMIKI

1. DRUGA ZASADA TERMODYNAMIKI. PRZEMIANY ODWRACALNE

Użyte przez nas w rozważaniach rozdziału poprzedniego pojęcie równoważności ciepła i pracy mogłoby nasunąć przypuszczenie, że przekształcenie energii mechanicznej w cieplną i odwrotnie nie poddane jest żadnym innym warunkom poza tym, który wyraża wzór (3) rozdz. IX, aby wartości przekształcanych energij były do siebie w stosunku, wyznaczonym przez wartość mechanicznego równoważnika ciepła *J*. Taki wniosek byłby jednak w całkowitej sprzeczności z doświadczeniem, jak o tym możemy się przekonać, rozpatrując z nieco innego, niż dotychczas, punktu widzenia zjawiska, zachodzące w układach zachowawczych i rozpraszających.

Nazwijmy, używając terminu wprowadzonego przez W. Natansona, p r z e m i a n ą k o ł o w ą z a m k n i ę t ą z u p e ł n ą (z j a w i s k i e m k o ł o w y m z u p e ł n y m) taką przemianę zamkniętą, w której wyniku nie tylko badany układ, lecz również i wszystkie ciała otaczające wracają do stanu początkowego, przemianami zaś o b o j ę t n y m i poszczególne składające się na przemianę zupełną przemiany. Przemiany, jakim podlega układ zachowawczy, są zawsze przemianami obojętnymi. Niech np. w prostym przypadku układu, złożonego z dwu ciał — kamień i ziemia, rozpatrywaną przemianą będzie ruch kamienia pod działaniem siły grawitacyjnej; przemiana taka jest przemianą obojętną, możemy bowiem zawsze uzupełnić ją taką inną przemianą, po której konfiguracja układu wróci do stanu początkowego, w ciałach zaś otaczających nie pozostaną żadne trwałe

zmiany. Istotnie, wystarczy na drodze kamienia umieścić płytkę doskonale sprężystą; kamień odbije się od niej z tą samą prędkością, z jaką poprzednio spadał, i podniesie się na tę samą, co poprzednio, wysokość, wracając względem ziemi do położenia początkowego; płytka zaś odkształcona podczas uderzenia przybierze po odbiciu kamienia swój kształt poprzedni.

Podobnie byłoby i w przypadkach bardziej złożonych; jedyna różnica polegałaby na tym, że mechanizmy, których musielibyśmy użyć, aby układowi przywrócić stan początkowy, i które w ostatecznym wyniku nie doznałyby żadnych zmian, byłyby również bardziej złożone.

Uważajmy poddany przemianom układ i mechanizmy pomocnicze za jeden układ odosobniony; przytoczone wyżej rozumowanie prowadzi nas do wniosku, że zachowawczy układ odosobniony zawsze m o ż e wrócić do stanu początkowego.

Jeżeli jednak tak, jak to zresztą jest w rzeczywistości, ciała układu, poruszając się, muszą przezwyciężać opór sił tarcia, jeżeli więc układ badany jest układem rozpraszającym, wtedy część przynajmniej energii mechanicznej przechodzi w energię cieplną, której, jak o tym wiemy z doświadczenia, nie możemy przekształcić całkowicie w energię mechaniczną bez wytworzenia trwałych zmian w ciałach otaczających.

Możemy to stwierdzić na pospolitym przykładzie ciała poruszającego się po szorstkiej powierzchni. Ciało to, pchnięte z pewną prędkością, stopniowo zwalnia swój bieg i wreszcie staje; jego energia ruchu, zużyta na pracę przeciwko tarciu, przekształca się w ciepło, które podnosi temperaturę zarówno powierzchni trącej, jak i poruszającego się ciała. Gdyby nam się udało przy pomocy jakiegokolwiek mechanizmu, któryby nie podlegał żadnym zmianom trwałym, przekształcić z powrotem ciepło w energię mechaniczną, moglibyśmy pobudzić ciało do dalszego ruchu kosztem oziębiania się powierzchni, na której ciało spoczywa, i samego ciała. Co więcej, nic by nie stało na przeszkodzie, aby po przywróceniu ciału tym sposobem prędkości poprzedniej, nadawać mu prędkość coraz większą, oziębiając coraz bardziej podstawę.

Tak np., że użyjemy tu przykładu, podanego przez W. Thomsona, okręt, znajdujący się na morzu, mógłby, przy użyciu odpowiedniego, nie ulegającego zmianom mechanizmu, czerpać

dowolne ilości ciepła z otaczających go wód, przekształcać je na energię ruchu, która, zużywając się na pokonanie tarcia, przechodziłaby z powrotem w ciepło, pobierane przez morze. Układ — okręt, morze — nie doznawałby żadnych zmian poza zmianą położenia okrętu w tym układzie. Tego rodzaju zjawisko, które Ostwald nazwał perpetuum mobile drugiego rodzaju, uważamy za niemożliwe, za sprzeczne z codziennym doświadczeniem i z założeniami, przyjętymi przez nas uprzednio dla wyjaśnienia przebiegu zjawisk fizycznych.

Prowadziłoby ono, między innymi, do zaprzeczenia zasadności pierwszego prawa termometrii (rozdz. VIII, ust. 1), na którym oparliśmy wyznaczanie temperatur. Wtedy bowiem byłoby rzeczą możliwą, aby z dwu ciał, odosobnionych i nie działających na siebie chemicznie, chłodniejsze ostygało coraz bardziej, gorętsze zaś coraz bardziej się ogrzewało; wystarczyłoby w tym celu dołączenie do układu odpowiedniego urządzenia, nie podlegającego żadnym trwałym zmianom, przekształcenie przy jego pomocy części energii cieplnej ciała chłodniejszego w energię mechaniczną, i następnie zużycie tej energii na ogrzanie ciała cieplejszego.

Taki przebieg zjawiska jest nie do pogodzenia z wyobrażeniem, jakie mamy o świecie nas otaczającym. Na tej podstawie wnioskujemy, że przemiany, jakim podlega układ, w którym zachodzą zjawiska cieplne, a więc każdy układ rzeczywisty, — nie znamy bowiem układów, w których zjawiska te by nie występowały, — nigdy nie są przemianami obojętnymi: rozpraszający układ odosobniony nigdy nie może wrócić do stanu początkowego. Stwierdzenie tego faktu stanowi treść drugiej zasady termodynamiki, którą podamy tutaj w sformułowaniu Plancka.

Jest rzeczą niemożliwą zbudować okresowo działający motor, którego działanie polegałoby jedynie na podnoszeniu ciężaru (a więc na wykonywaniu pracy) i oziębianiu zbiornika ciepła.

Druga zasada termodynamiki została po raz pierwszy wypowiedziana, w sformułowaniu nieco odmiennym od podanego wyżej, przez Sadi-Carnota (1824 r.), następnie rozwinięta przez Clausiusa (1850 r.), który ją uzgodnił z zasadą zachowania energii, wkrótce zaś potem

(1851 r.) przez W. Thomsona (późniejszego lorda Kelvina), który nadał jej postać, mało różniącą się od tej, w jakiej wyraził ją Planck.

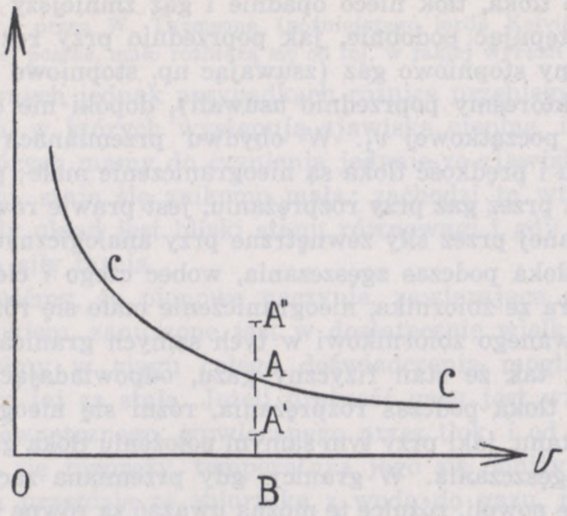
W pewnych jednak przypadkach różnica przebiegu zjawisk w układach, w których występują zjawiska cieplne, i w układach, w których mamy do czynienia jedynie ze zjawiskami mechanicznymi, staje się znikomo mała; zachodzi to wtedy mianowicie, gdy układ jest bliski stanu równowagi i gdy nie działają w nim siły tarcia.

Przypuśćmy, że pionowe naczynie, zawierające gaz i zamknięte tłokiem, zanurzone jest w dostatecznie wielkiej masie wody, abyśmy w ciągu całego doświadczenia mogli uważać temperaturę jej za stałą. Jeżeli prężność gazu jest większa od ciśnienia zewnętrznego, wywieranego przez tłok, i od oporu sił tarcia, gaz się rozpręży, temperatura jego się obniży i pewna ilość ciepła przejdzie ze zbiornika z wodą do gazu, podnosząc jego temperaturę do wartości poprzedniej. Podczas tego rozprężania zarówno prężność gazu, jak i jego temperatura, nie będą miały na ogół jednakowej wartości w poszczególnych elementach objętości masy gazowej; przeciętna ich wartość zależeć będzie nie tylko od objętości gazu, lecz również i od prędkości rozprężania, wobec czego przemiana ta nie będzie bynajmniej tą przemianą izotermiczną, o której była mowa w rozdz. VI, ust. 8 i w której związek między prężnością i objętością wyraża się prawem Boyle'a-Mariotte'a. Zgęszczenie gazu z powrotem do objętości poprzedniej będzie w tym przypadku, zgodnie z tym, o czym była mowa wyżej, możliwe jedynie przy użyciu ciał otaczających, których stan fizyczny doznałby wskutek tego trwałych zmian.

Inaczej jednak będzie, gdy tłok porusza się bez tarcia i gdy nadwyżka prężności gazu nad ciśnieniem zewnętrznym jest dowolnie mała. Przypuśćmy, że za każdym razem, gdy na skutek tego, tym razem, nieograniczenie małego rozprężania się gazu i podnoszenia się tłoka, prężność gazu stawać się będzie równa ciśnieniu zewnętrznemu, będziemy zmniejszali nieograniczenie mało obciążenie tłoku (przesuwając np. z powierzchni tłoka nieograniczenie mały ciężarek na umieszczoną na tym samym poziomie nieruchomą podstawkę) i w ten sposób stopniowo zwiększali objętość gazu od początkowej wartości v_1 do końcowej v_2. Gdy gaz osiągnie tę objętość, powiększmy nieograniczenie mało

obciążenie tłoka, tłok nieco opadnie i gaz zmniejszy swą objętość. Postępując podobnie, jak poprzednio przy rozrzedzaniu, zgęszczajmy stopniowo gaz (zsuwając np. stopniowo na tłok te ciężarki, któreśmy poprzednio usuwali), dopóki nie dojdzie do objętości początkowej v_1. W obydwu przemianach prędkość masy gazu i prędkość tłoka są nieograniczenie małe; praca, wykonywana przez gaz przy rozprężaniu, jest prawie równa pracy, wykonywanej przez siły zewnętrzne przy analogicznych przesunięciach tłoka podczas zgęszczania, wobec czego i ciepło, jakie gaz pobiera ze zbiornika, nieograniczenie mało się różni od ciepła, oddawanego zbiornikowi w tych samych granicach położenia tłoka, tak że stan fizyczny gazu, odpowiadający danemu położeniu tłoka podczas rozprężania, różni się nieograniczenie mało od stanu, jaki przy tym samym położeniu tłoka gaz posiada podczas zgęszczania. W granicy, gdy przemiana zachodzi nieskończenie powoli, różnice te można uważać za równe zeru, i gaż za znajdujący się w każdej chwili w stanie równowagi. Wtedy nieskończenie mała zmiana obciążenia tłoka może, jak widzieliśmy, spowodować przemianę odwrotną, w ciągu której gaz przechodzić będzie przez te same stany, przez jakie przechodził podczas przemiany pierwotnej.

Odkładajmy na osi odciętych chwilowe objętości gazu (lub proporcjonalne do nich, gdy naczynie ma kształt cylindryczny, odległości tłoka od dna), na osi rzędnych odpowiadające danej objętości (danemu położeniu tłoka) ciśnienie zewnętrzne (rys. 220). Krzywa CC, będąca znaną nam izotermą, i wyrażająca związek między objętością i prężnością gazu, dzieli płaszczyznę rysunku na dwie części, z których górna odpowiada zgęszczaniu, dolna — rozrzedzaniu gazu. Istotnie, przypuśćmy, że w chwili, gdy gaz zajmuje objętość OB i gdy prężność jego wynosi BA, zwiększamy obciążenie tłoka, tak że ciśnienie zewnętrzne wzrasta do $BA'' > BA$. Tłok zacznie opadać i to tym prędzej, im większa będzie różnica AA''; zmniejszając tę różnicę, zmniejszamy prędkość przemiany. Gdy więc punkt A'' będzie się zbliżał wzdłuż prostej BA'' do A, prędkość przemiany będzie się stopniowo zmniejszała, w punkcie nieskończenie bliskim A stanie się nieskończenie mała; gdy ciśnienie zewnętrzne jeszcze nieco zmniejszymy, punkt A'' przejdzie na drugą stronę krzywej: prężność gazu stanie się większa od ciśnienia zewnętrznego i gaz zacznie



rys. 220

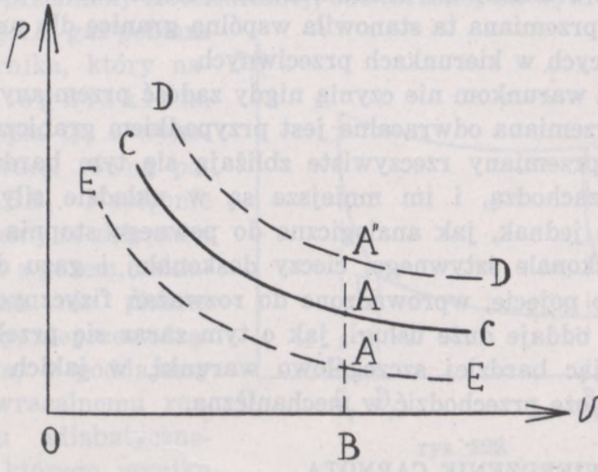
się rozprężać. W chwili zatem, gdy zarówno gaz, jak i ciśnienie zewnętrzne posiadają tę samą wartość *BA*, nieskończenie mała zmiana ciśnienia zewnętrznego może spowodować albo rozprężanie się gazu albo jego zgęszczanie. Krzywa *CC* jest granicą, wzdłuż której stykają się dziedziny odpowiadające przemianom, zachodzącym w kierunkach przeciwnych. Przemiany takie, jak ta, którą odtwarza krzywa *CC*, nazywamy o d w r a c a l n y m i. Są one, jak widzimy, nieskończenie powolne, przechodząc w granicy w szereg kolejnych stanów równowagi.

Pojęciem przemiany odwracalnej niejednokrotnie posługiwaliśmy się milcząco w rozdziałach poprzednich. Na identycznych założeniach opieraliśmy się np. przy wyprowadzaniu prawa Boyle'a-Mariotte'a, wzoru Poisson'a, odkształcenia doskonale sprężystego itd.

Przemiana odwracalna jest jednak nie do pomyślenia w układach, w których występuje tarcie. Niech opór, jaki stawia tarcie przesuwaniu się tłoka, wynosi f. Tłok nie będzie opadał, dopóki jego obciążenie P będzie mniejsze od $(pS + f)$, nie będzie się podnosił, dopóki P będzie większe od $(pS - f)$, gdzie S przekrój tłoka. Warunek równowagi sprowadza się więc do nierówności

$$pS - f < P < pS + f.$$

Niech tak, jak poprzednio, związek między prężnością gazu i jego objętością wyraża się krzywą CC (rys. 221) i niech w danej chwili gaz ma objętość OB i prężność BA, przy czym ciśnienie, wywierane przez tłok, niech będzie także równe AB. Dla



rys. 221

wywołania zgęszczenia nie wystarczy tak, jak poprzednio, zwiększyć nieskończenie mało obciążenie tłoka, w tym bowiem przypadku ciśnienie zewnętrzne musi co najmniej o $\frac{f}{S}$ przewyższać prężność gazu. Punkt A'', odpowiadający tej wartości ciśnienia, jaka powoduje zgęszczanie gazu, będzie leżał w skończonej odległości od A. Podobnie punktu A', odpowiadającego ciśnieniu zewnętrznemu, przy którym zajdzie rozprężanie gazu, nie będzie można przybliżyć do punktu A bardziej, niż na odległość $A'A = \frac{f}{S}$. Wyznaczając w ten sposób punkty A' i A'' dla każdego położenia tłoka, otrzymamy dwie krzywe DD i EE, które będą dzieliły płaszczyznę rysunku na trzy części. Punkty, leżące powyżej krzywej DD, będą odpowiadały ciśnieniom zewnętrznym, powodującym zgęszczanie gazu, leżące poniżej EE — ciśnieniom, wywołującym rozrzedzanie, punkty między krzywymi — stanom równowagi. Dziedziny zgęszczenia i rozrze-

dzenia nie będą miały wspólnej granicy, nie będzie można zatem przez nieskończenie małą zmianę warunków zewnętrznych spowodować odwrócenia biegu zjawiska.

Dwa są zatem warunki odwracalności przemiany: 1) aby układ był w każdej chwili nieskończenie bliski stanu równowagi i 2) aby przemiana ta stanowiła wspólną granicę dla przemian, zachodzących w kierunkach przeciwnych.

Tym warunkom nie czynią nigdy zadość przemiany rzeczywiste. Przemiana odwracalna jest przypadkiem granicznym, do którego przemiany rzeczywiste zbliżają się tym bardziej, im wolniej zachodzą, i im mniejsze są w układzie siły tarcia. Podobnie jednak, jak analogiczne do pewnego stopnia pojęcia ciała doskonale sztywnego, cieczy doskonałej i gazu doskonałego, i to pojęcie, wprowadzone do rozważań fizycznych przez Carnota, oddaje duże usługi, jak o tym zaraz się przekonamy, rozpatrując bardziej szczegółowo warunki, w jakich energia cieplna może przechodzić w mechaniczną.

2. TWIERDZENIE CARNOTA

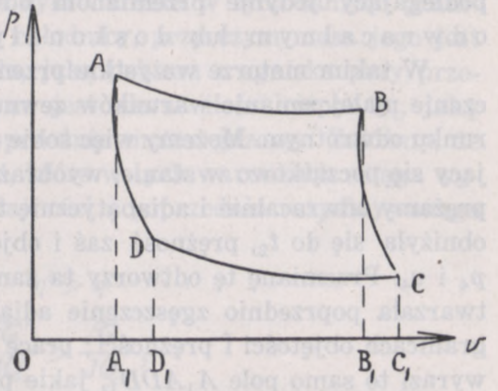
Warunki te będziemy uważali za wyznaczone, gdy, znając je, będziemy mogli w każdym poszczególnym przypadku obliczyć stosunek ciepła przekształconego w pracę do ogólnej ilości ciepła pobranego przez układ. Gdy układ wykonywa pracę jedynie kosztem pobranej energii cieplnej, stosunek pracy wykonanej do pobranego ciepła nazywamy w y d a j n o ś c i ą lub s p ó ł c z y n n i k i e m s k u t k u u ż y t e c z n e g o, układ zaś — m o t o r e m c i e p l n y m. Wydajność η jest w tym przypadku równa

$$\eta = \frac{\mathcal{T}}{JQ} = \frac{Q'}{Q}.$$

Tak jednak jest tylko wtedy, gdy energia wewnętrzna ciał, pobierających ciepło i wykonywających pracę, ma na początku i końcu doświadczenia wartość tę samą, gdy więc ciała te — tzw. c i a ł a c z y n n e — podlegają przemianie zamkniętej.

Przypuśćmy, że ciałem tym jest gaz doskonały o temperaturze t_1, prężności p_1 i objętości v_1, zamknięty w naczyniu o ściankach cienkich, doskonale przewodzących ciepło, i zaopatrzonym w tłok, mogący się przesuwać bez tarcia. Począt-

kowy stan gazu odtwarza na wykresie (rys. 222) punkt A. Zanurzmy naczynie z gazem do zbiornika o niezmieniającej się podczas doświadczenia temperaturze t_1, równej temperaturze gazu, i rozprężajmy go odwracalnie do ciśnienia p_2 i objętości v_2. Podczas tej przemiany izotermicznej, odtworzonej na wykresie przez izotermę AB, gaz pobiera ze zbiornika, który nazwiemy o g n i s k i e m, ilość ciepła Q_1 i wykonywa pracę, równą polu A_1ABB_1. Następnie wyjmujemy ze zbiornika naczynie z gazem, nakładamy na nie płaszcz ochronny, nieprzewodzący ciepła, i poddajemy gaz odwracalnemu rozprężaniu adiabatycznemu, w którego wyniku



rys. 222

prężność gazu spada do wartości p_3, objętość zwiększa się do v_3, temperatura zaś obniża się do t_2. Podczas tej przemiany, którą odtwarza adiabata BC (na rysunku adiabata opada bardziej stromo niż w rzeczywistości), gaz nie oddaje ani nie pobiera ciepła, wykonywa zaś kosztem swej energii wewnętrznej pracę, wyrażoną polem B_1BCC_1. Gdy gaz dojdzie do wymaganej temperatury, zdejmujemy z niego płaszcz ochronny, i zanurzamy naczynie do c h ł o d n i c y, zbiornika o niezmieniającej się podczas doświadczenia temperaturze t_2, niższej od t_1, następnie zaś zgęszczamy go odwracalnie do prężności p_4 i objętości v_4. Ta izotermiczna odwracalna przemiana, podczas której gaz oddaje chłodnicy ilość ciepła Q_2, zachodzi kosztem pracy zewnętrznej, wyrażonej polem D_1DCC_1. Dobierając odpowiednio końcowe wartości p_4 i v_4, możemy odwracalnym zgęszczeniem adiabatycznym (a więc, zabezpieczając od wymiany ciepła z otoczeniem) doprowadzić gaz do stanu początkowego, tzn. do objętości v_1, prężności p_1 i temperatury t_1. W tej przemianie gaz nie pobiera ani nie oddaje ciepła, zgęszczenie zachodzi kosztem pracy zewnętrznej, wyrażonej polem D_1DAA_1. Nadwyżka pracy, wykonanej przez motor, nad pracą pobraną wyraża się polem czwo-

roboku $ABCD$; jest ona równoważna różnicy $Q_1 - Q_2$, energia bowiem wewnętrzna gazu wróciła do wartości poprzedniej. Tego rodzaju przemianę zamkniętą, składającą się z dwu odwracalnych przemian izotermicznych i dwu odwracalnych przemian adiabatycznych, nazywamy cyklem Carnota; motor zaś, podlegający jedynie przemianom odwracalnym, — motorem odwracalnym lub doskonałym.

W takim motorze wszystkie przemiany mogą przy nieskończenie małej zmianie warunków zewnętrznych zachodzić w kierunku odwrotnym. Możemy więc sobie wyobrazić, że gaz, znajdujący się początkowo w stanie, wyobrażonym przez punkt A, rozprężamy odwracalnie i adiabatycznie tak, aby temperatura jego obniżyła się do t_2, prężność zaś i objętość przybrały wartości p_4 i v_4. Przemianę tę odtworzy ta sama adiabata AD, jaka odtwarzała poprzednio zgęszczenie adiabatyczne w tych samych granicach objętości i prężności; pracę więc przez gaz wykonaną wyrazi to samo pole A_1ADD_1, jakie poprzednio wyrażało pracę pobraną przy zgęszczaniu. Następnie umieszczamy gaz w chłodnicy i poddajemy go odwracalnemu rozprężaniu izotermicznemu, w ciągu którego gaz wykonywa pracę D_1DCC_1 i pobiera z chłodnicy ilość ciepła Q_2, równą tej, jaką oddał przy przemianie poprzedniej, zachodzącej w kierunku prostym, przemiana bowiem, w myśl założenia, jest całkowicie odwracalna. Gdy gaz dojdzie do stanu, wyobrażonego przez punkt C, zgęszczamy go odwracalnie i adiabatycznie do temperatury t_1, prężności p_2 i objętości v_2, co będzie wymagało pracy zewnętrznej C_1CBB_1. Wreszcie, zanurzając naczynie z gazem do ogniska, poddajemy go odwracalnemu zgęszczaniu izotermicznemu kosztem pracy B_1BAA_1. Gaz odda wtedy ognisku ilość ciepła Q_1. Ciepło to możemy uważać za sumę ciepła Q_2, odebranego ciału chłodniejszemu (chłodnicy) i przeniesionemu w skutku tej przemiany wstecznej do ciała gorętszego (ogniska), oraz ilości ciepła $Q_1 - Q_2$, równoważnej nadwyżce pracy pobranej nad wykonaną, nadwyżce, którą wyraża pole $ADCB$.

Jeżeli więc puścimy motor raz w kierunku prostym, następnie zaś w kierunku wstecznym, układ, złożony z gazu i obydwu zbiorników ciepła, wróci dokładnie do stanu początkowego, praca bowiem wykonana przez motor w pierwszej przemianie zostanie w przemianie wstecznej zużyta na odebranie chłodnicy

tej ilości ciepła, jaką poprzednio otrzymała, i oddanie ognisku tego ciepła, jakie poprzednio utraciło. Dwie te przemiany tworzyć będą zatem przemianę kołową (zamkniętą) zupełną.

Przypuśćmy teraz, że ciałem czynnym jest nie gaz doskonały, lecz jakiekolwiek inne ciało, np. gaz rzeczywisty, ciecz lub nawet ciało stałe, które przebiega cykl Carnota w tych samych granicach temperatur ogniska i chłodnicy, przy czym masa jego jest tak dobrana, że ilość ciepła, jaką pobiera z ogniska przy przemianie w kierunku prostym, jest równa ilości ciepła Q_1, jaką pobierał rozpatrywany poprzednio motor gazowy. Załóżmy, że udało się nam znaleźć ciało, które w tych warunkach osiąga wydajność η' większą od wydajności η poprzednio rozpatrywanego motoru. Mamy zatem

$$\eta' > \eta$$

lub

$$\frac{\mathfrak{T}'}{JQ_1'} > \frac{\mathfrak{T}}{JQ_1},$$

co, z uwagi, że $Q_1' = Q_1$, oraz, że $\mathfrak{T}' = J(Q_1' - Q_2') = J(Q_1 - Q_2')$ i $\mathfrak{T} = J(Q_1 - Q_2)$, przechodzi w nierówność

$$\frac{J(Q_1 - Q_2')}{JQ_1} = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1} > \frac{J(Q_1 - Q_2)}{JQ_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

i ostatecznie

$$Q_2' < Q_2 .$$

Sprzęgnijmy obydwa motory tak, aby motor nowy pracował w kierunku prostym, dawny zaś w kierunku wstecznym. Motor nowy wykona pracę $\mathfrak{T}'$, pobierając z ogniska ciepło Q_1 i oddając chłodnicy ciepło Q_2', motor poprzedni pobierze pracę $\mathfrak{T}$ chłodnica odda mu ciepło Q_2, ognisko zaś otrzyma od niego ciepło Q_1. W wyniku ostatecznym otrzymamy pewną nadwyżkę pracy $\mathfrak{T}' - \mathfrak{T}$, równoważną ciepłu $Q_2 - Q_2'$, pobranemu z chłodnicy; ognisko i ciało czynne wrócą do poprzedniego stanu. Powtarzając ten zabieg dowolną ilość razy, otrzymamy dowolnie wielką pracę, wykonaną kosztem ciepła pobieranego z chłodnicy, przy czym pozostałe ciała układu odgrywałyby jedynie rolę pomocniczą. Taki przebieg zjawiska jest w oczywistej sprzeczności z drugą zasadą termodynamiki (ust. 1), musimy go przeto uznać za niemożliwy. Spółczynnik η' nie może więc być większy od η. Nie może być również i mniejszy od η. Aby tego dowieść, wy-

starczy układ motorów sprzężonych puścić w kierunku odwrotnym. Motor dawny wykona pracę $\mathcal{T}$, pobierze z ogniska ciepło Q_1, odda chłodnicy ilość ciepła Q_2; motor nowy pobierze pracę $\mathcal{T}'$ (mniejszą tym razem od $\mathcal{T}$), z chłodnicy zaczerpnie ciepło $Q'_2 > Q_2$ i ognisku odda ciepło Q_1. Wynik więc ostateczny będzie i tym razem sprzeczny z drugą zasadą. Spółczynnik η' jest zatem równy η.

We wszystkich więc tego rodzaju motorach odwracalnych, pracujących w tych samych granicach temperatur, η ma tę samą wartość. Stąd wynika, że wydajność takiego motoru nie zależy od rodzaju ciała czynnego. Dochodzimy w ten sposób do twierdzenia Carnota: w motorach odwracalnych przebiegających cykl Carnota, spółczynnik skutku użytecznego jest funkcją jedynie temperatur ogniska i chłodnicy

$$\eta = f\,(t_1, t_2)\,. \tag{1}$$

Stosując analogiczne rozumowanie do motorów, pobierających ciepło z tego samego ogniska, co motory rozpatrywane poprzednio, i oddających ciepło tej samej chłodnicy, lecz podlegających przemianom nieodwracalnym, stwierdzimy z łatwością, że spółczynnik ich skutku użytecznego η_n nie może być większy od spółczynnika motorów odwracalnych η_0. Dowodzenia poprzedniego nie będziemy mogli jednak przeprowadzić do końca. Motor bowiem nieodwracalny, poruszając się w kierunku wstecznym, zużyje na ogół ilość pracy różną od tej, jaką wykonał przy obiegu prostym, pobierze z chłodnicy nie to samo, co poprzednio, ciepło i odda ognisku również nie tę samą ilość ciepła. Różnica tych wartości zależeć będzie od warunków, w jakich układ podlegał danym przemianom. Możemy więc jedynie stwierdzić, że

$$\eta_n \leqslant \eta_0 .$$

Za Clausiusem zakładamy

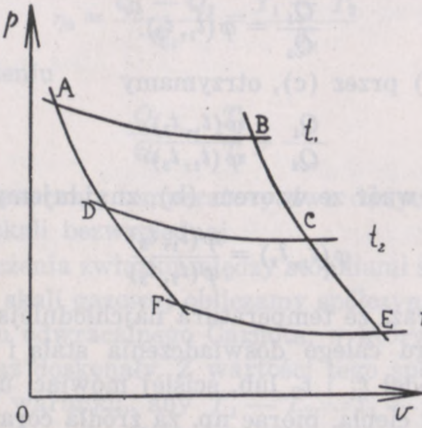
$$\eta_n < \eta_0 . \tag{2}$$

Spółczynnik skutku użytecznego motoru nieodwracalnego jest zawsze mniejszy od spółczynnika skutku użytecznego motoru odwracalnego, pobierającego ciepło z tego samego ogniska i oddającego ciepło tej samej chłodnicy.

3. SKALA TEMPERATUR BEZWZGLĘDNYCH

We wzorze (1) kształt funkcji $f(t_1, t_2)$, wyrażającej spółczynnik skutku użytecznego motoru odwracalnego, pracującego w granicach temperatur t_1 i t_2, pozostał nieoznaczony. Funkcję tę możemy, jak to stwierdził Thomson (1847 r.), łatwo wyznaczyć, biorąc zmianę wielkości η za miarę zmiany temperatury jednego ze źródeł ciepła (ogniska lub chłodnicy), gdy temperatura drugiego pozostaje w czasie doświadczenia stałą. Skala termometryczna, w ten sposób zbudowana, niezależna, w myśl twierdzenia Carnota, od rodzaju ciała czynnego, jest tzw. s k a l ą t e r m o d y n a m i c z n ą lub b e z w z g l ę d n ą, o której była mowa w rozdz. VIII, ust. 1.

Połączmy, idąc drogą rozumowania, wskazaną przez Poincaré'go (1908 r.), dwa motory odwracalne Carnota w ten sposób, aby chłodnica jednego z nich była ogniskiem drugiego i aby



rys. 223

rozprężania i zgęszczania adiabatyczne zachodziły w obydwu motorach wzdłuż tych samych krzywych. Tym warunkom czynią zadość motory, przebiegające cykle *ABCD* i *DCEF* (rys. 223). Spółczynniki skutku użytecznego tych dwu motorów wyrażą się odpowiednio wzorami

$$\eta'_0 = \frac{\mathcal{T}_1}{JQ_1} = f(t_1, t_2) \quad \text{i} \quad \eta''_0 = \frac{\mathcal{T}_2}{JQ_2} = f(t_2, t_3), \tag{a}$$

gdzie Q_1 i Q_2 oznaczają ilości ciepła, pobrane przez każdy z tych motorów ze swego ogniska, przy czym ilość ciepła Q_2, pobrana

ze źródła o temperaturze t_2 przez motor drugi, jest równa, jak to wynika bezpośrednio z wyżej postawionych założeń, ilości ciepła, oddanej temu samemu zródłu przez motor pierwszy. Kładąc $\mathcal{T}_1 = J\,(Q_1 - Q_2)$, otrzymujemy z pierwszego wzoru (a)

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = f(t_1, t_2),$$

skąd

$$\frac{Q_2}{Q_1} = 1 - f(t_1, t_2)$$

i wreszcie

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{1 - f(t_1, t_2)} = \varphi(t_1, t_2). \tag{b}$$

Podobnie znajdziemy dla drugiego motoru

$$\frac{Q_2}{Q_3} = \frac{1}{1 - f(t_2, t_3)} = \varphi(t_2, t_3). \tag{c}$$

Zastępując te dwa motory jednym, przebiegającym cykl $ABEF$, będziemy mieli

$$\frac{Q_1}{Q_3} = \varphi(t_1, t_3). \tag{d}$$

Dzieląc wzór (d) przez (c), otrzymamy

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\varphi(t_1, t_3)}{\varphi(t_2, t_3)}.$$

Zestawiając ten wzór ze wzorem (b), znajdujemy

$$\varphi(t_1, t_2) = \frac{\varphi(t_1, t_3)}{\varphi(t_2, t_3)}. \tag{e}$$

Załóżmy teraz, że temperatura najchłodniejszego źródła t_3 pozostaje w ciągu całego doświadczenia stałą i że zmieniamy temperatury źródeł t_1 i t_2 lub, ściślej mówiąc, używamy coraz to innych źródeł ciepła, biorąc np. za źródła coraz to inne ciała skali podstawowej (rozdz. VIII, ust. 1) o temperaturach wyższych od t_3. Wtedy każda z funkcyj $\varphi\,(t_1, t_3)$ i $\varphi\,(t_2, t_3)$ będzie funkcją jednej tylko zmiennej t_1 lub t_2. Wzór (e) możemy zatem przepisać w postaci

$$\varphi(t_1, t_2) = \frac{\varphi(t_1)}{\varphi(t_2)} \tag{f}$$

lub, podstawiając zamiast $\varphi\,(t_1, t_2)$ wartość tej funkcji ze wzoru (b)

$$\frac{1}{1 - f(t_1, t_2)} = \frac{\varphi(t_1)}{\varphi(t_2)},$$

skąd ostatecznie otrzymamy

$$\eta_0 = f(t_1, t_2) = \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_2)}{\varphi(t_1)}. \tag{3}$$

Ponieważ $\eta_0 = f(t_1, t_2)$ ma, z natury rzeczy, zawsze wartość dodatnią, różnica $\varphi(t_1) - \varphi(t_2)$ również będzie zawsze dodatnia; $\varphi(t)$ jest zatem wielkością, stale wzrastającą ze wzrostem temperatury i mającą w każdej temperaturze wartość ściśle oznaczoną. Czyni więc ona zadość warunkom, jakim, według ust. 1, rozdz. VIII, powinna odpowiadać wielkość termometryczna. Możemy przeto zmiany jej wartości przyjąć za miarę zmian temperatury; i założyć, że zmianie wartości $\varphi(t)$ o jednostkę będzie odpowiadała w tej nowej skali zmiana temperatury ciała o jeden stopień.

Oznaczmy wartość funkcji φ w temperaturze t przez T, tak że $\varphi(t) = T$. Wzór (3) przybierze wtedy postać

$$\eta_0 = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \tag{4}$$

lub po uproszczeniu

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}, \tag{4 a}$$

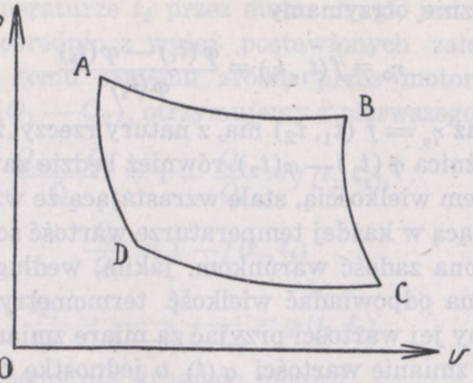
gdzie T_1 i T_2 oznaczają temperatury dwu danych źródeł ciepła, odniesione do skali bezwzględnej.

Dla wyznaczenia związku między stopniami skali bezwzględnej i stopniami skali gazowej obliczamy spółczynnik skutku użytecznego motoru odwracalnego Carnota, w którym ciałem czynnym jest np. gaz doskonały. Z wartości tego spółczynnika oraz z dodatkowego warunku, aby $T_1 - T_2 = t_1 - t_2$, znajdujemy znany już z ust. 1 rozdz. VIII związek

$$T = t + 273{,}16 \tag{5}$$

Praca gazu podczas rozprężania izotermicznego AB (rys. 224) w temperaturze t_1, równa sumie prac elementarnych pdv, jest wykonana całkowicie kosztem ciepła Q_1, pobranego z ogniska, energia bowiem wewnętrzna gazu doskonałego w stałej temperaturze zachowuje jak wiemy (rozdz. IX, ust. 9), wartość niezmienną, niezależną od objętości i prężności gazu. Mamy zatem

$$JQ_1 = \int_{v_1}^{v_2} pdv. \tag{g}$$



rys. 224

W ciągu tej przemiany izotermicznej związek między prężnością i objętością gazu wyraża prawo Boyle'a-Mariotte'a. W każdym zatem punkcie krzywej mamy

$$pv = p_1 v_1 = p_2 v_2$$

lub

$$p = \frac{p_1 v_1}{v}.$$

Podstawiając do wzoru (g), otrzymujemy

$$JQ_1 = \int_{v_1}^{v_2} \frac{p_1 v_1}{v} dv = p_1 v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = p_1 v_1 \, lg \frac{v_2}{v_1} = p_0 v_0 (1 + \alpha t_1) \, lg \frac{v_2}{v_1} \quad \text{(h)}$$

gdzie znak *lg* oznacza logarytmy naturalne.

Podobnie ilość ciepła Q_2, oddana chłodnicy podczas przemiany izotermicznej w temperaturze t_2, jest równoważna pracy zewnętrznej, pobranej przez gaz. Biorąc wartości bezwzględne ciepła i pracy, będziemy mieli analogicznie do (h)

$$JQ_2 = p_3 v_3 \, lg \frac{v_3}{v_4} = p_0 v_0 (1 + \alpha t_2) \, lg \frac{v_3}{v_4}. \quad \text{(i)}$$

Poza tymi przemianami izotermicznymi gaz podlega również odwracalnym przemianom adiabatycznym, w których związek między prężnością i objętością wyznacza wzór Poissona. Mamy więc

$$p_2 v_2^k = p_3 v_3^k \quad \text{i} \quad p_4 v_4^k = p_1 v_1^k, \quad \text{(k)}$$

skąd z uwagi, że $p = \frac{p_0 v_0}{v}(1 + \alpha t)$, otrzymujemy

$$\left(\frac{v_2}{v_3}\right)^k = \frac{p_3}{p_2} = \frac{p_0 v_0 (1 + \alpha t_2)}{v_3} \cdot \frac{v_2}{p_0 v_0 (1 + \alpha t_1)} = \frac{v_2}{v_3} \cdot \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1}$$

i $$\left(\frac{v_1}{v_4}\right)^k = \frac{p_4}{p_1} = \frac{v_1}{v_4} \cdot \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1}$$

albo po skróceniu

$$\left(\frac{v_2}{v_3}\right)^{k-1} = \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1} \text{ i } \left(\frac{v_1}{v_4}\right)^{k-1} = \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1}$$

i ostatecznie $\frac{v_2}{v_3} = \frac{v_1}{v_4}$ lub $\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_4}$.

Stosunek zatem $\frac{Q_1}{Q_2}$ wyrazi się wzorem

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{p_0 v_0 (1 + \alpha t_1) \lg \frac{v_2}{v_1}}{p_0 v_0 (1 + \alpha t_2) \lg \frac{v_3}{v_4}} = \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}. \qquad \text{(l)}$$

Ze wzorów (b) i (f) wynika, że stosunek ten równy jest stosunkowi $\frac{\varphi(t_1)}{\varphi(t_2)}$. A więc

$$\frac{\varphi(t_1)}{\varphi(t_2)} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2} = \frac{\frac{1}{\alpha} + t_1}{\frac{1}{\alpha} + t_2}. \qquad \text{(m)}$$

Jest to możliwe tylko wtedy, gdy

$$\varphi(t) = T = C \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + t\right),$$

gdzie C jest stałym, niezależnym od temperatury czynnikiem proporcjonalności; kładąc dodatkowo, że $C = 1$, że więc $T_1 - T_2 = t_1 - t_2$, i podstawiając zamiast $\frac{1}{\alpha}$ jego wartość, równą 273,16, otrzymujemy wzór (5).

Ze wzoru (m) otrzymujemy

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q}{T},$$

gdzie Q ilość ciepła pobrana lub oddana przez ciało czynne w dowolnej przemianie izotermicznej o temperaturze T między dwiema adiabatami, tymi samymi, między jakimi są zawarte przemiany izotermiczne o temperaturze T_1 i T_2. Z drugiej jednak strony z równania (4) mamy, przyjmując że ognisko ma temperaturę wrzącej wody pod ciśnieniem 1 Atm, chłodnica zaś temperaturę topniejącego lodu i kładąc $T_1 - T_2 = 100$

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_{100} - Q_0}{100},$$

stąd

$$\frac{Q}{T} = \frac{Q_{100} - Q_0}{100}$$

i

$$T = \frac{Q}{Q_{100} - Q_0} \cdot 100. \qquad \text{(5 a)}$$

Wzór (5a) wyznacza, według orzeczenia międzynarodowej komisji przy Międzynarodowym Instytucie zimna (Int. institut du froid), temperaturę bezwzględną (1924 r.).

Gdy $T = 0$, $t = -273{,}16$; temperatura zera skali bezwzględnej jest niższa od temperatury topniejącego lodu o —273,16° C. Zero bezwzględne nie ma charakteru umownego, jak zero skali gazowej, wybrane, jakeśmy widzieli, całkowicie dowolnie. Oznacza ono najniższą temperaturę, jaką możemy sobie wyobrazić. Istotnie, załóżmy, że istnieje ciało o temperaturze niższej od zera bezwzględnego i użyjmy tego ciała, jako chłodnicy w motorze odwracalnym Carnota. Zgodnie ze wzorem (4) otrzymalibyśmy wtedy

$$\eta = \frac{T_1 - (-T_2)}{T_1} = \frac{T_1 + T_2}{T_1} > 1.$$

Ilość ciepła przekształconego w pracę byłaby zatem większa od ciepła pobranego z ogniska; ciało czynne pobierałoby w tym przypadku również ciepło z chłodnicy. W wyniku zatem obiegu w kierunku prostym otrzymalibyśmy pewną pracę i oziębienie zbiorników ciepła, co jest sprzeczne z drugą zasadą termodynamiki. Wielkość T ma więc zawsze wartość dodatnią.

Ze wzoru (4a) wynika jeszcze jeden ważny wniosek. Przypuśćmy, że używamy motoru Carnota nie do wykonywania pracy, lecz do oziębiania chłodnicy. W tym celu wystarczy, jak wiemy, puścić motor w kierunku wstecznym. Praca zewnętrzna wyniesie wtedy $J(Q_1 - Q_2)$, gdzie Q_1 oznacza ilość ciepła, oddaną ognisku, Q_2 — ciepło, pobrane z chłodnicy. Stosunek tych dwu ilości ciepła

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

będzie tym większy, im niższa będzie temperatura chłodnicy. W miarę zatem obniżania się jej temperatury wzrastać będzie coraz bardziej ilość pracy, potrzebnej do odebrania chłodnicy jednostki ciepła. Mamy bowiem

$$Q_1 = Q_2 \cdot \frac{T_1}{T_2}$$

i

$$\mathcal{T} = JQ_2\left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right) = JQ_2\,\frac{T_1 - T_2}{T_2},$$

skąd $$\frac{\mathcal{T}}{JQ_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_2},$$

gdy T_2 dążyć będzie do zera, stosunek $\frac{\mathcal{T}}{JQ_2}$ dążyć będzie do nieskończoności. Oziębiając w ten sposób chłodnicę, odbieramy jej w miarę zbliżania się do zera bezwzględnego te same ilości ciepła kosztem coraz to większej pracy (por. ust. 5b).

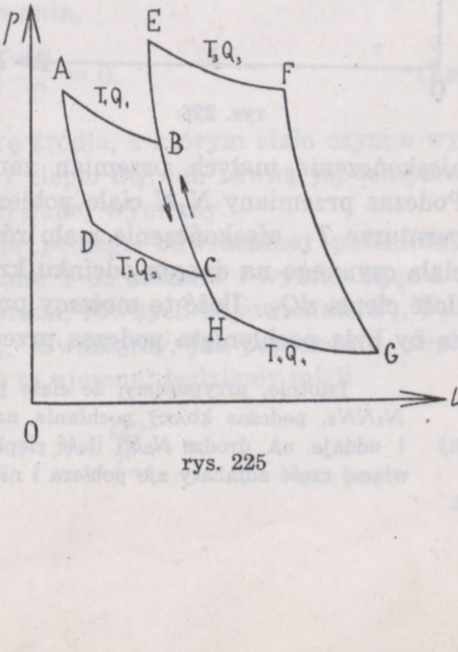
4. UOGÓLNIENIE NA DOWOLNE PRZEMIANY ODWRACALNE ENTROPIA

Umówmy się uważać ciepło pobrane przez ciało czynne za dodatnie, ciepło zaś oddane za ujemne. Otrzymamy wtedy wzór (4a) w postaci

$$\frac{Q_1}{-Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

lub $$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \tag{6}$$

Wzór ten możemy zastosować również i do przypadku, gdy ciało czynne wymienia ciepło nie z dwoma, lecz z większą ilością źródeł ciepła. Niech np. ciało czynne przebiega drogę *ABEFGHCD*, pobierając ciepło ze zbiorników o temperaturach T_1 i T_3, oddając zaś ciepło zbiornikom o temperaturach T_4 i T_2 (rys. 225). Przypuśćmy, że po dojściu ciała do stanu, wyobrażonego przez punkt *C*, zachodzi dalsze zgęszczenie adiabatyczne od *C* do *B*, następnie zaś przemiana odwrotna od *B* do *C*. Wprowadzenie tych dwu dodatkowych przemian, zachodzących wzdłuż tego samego odcinka krzywej, lecz w kierunkach odwrotnych, nie wpływa, rzecz prosta, w niczym na ostateczny wynik przemiany, suma bowiem prac wykonanej i pobranej, i suma pobranego



rys. 225

i oddanego ciepła, równe są zeru, ciało zaś czynne wraca do stanu, jaki miało poprzednio. W ten sposób jednak uzupełniamy daną przemianę do dwu całkowitych cyklów Carnota: *ABCDA* i *EFGHE*. Dla pierwszego z nich mamy

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

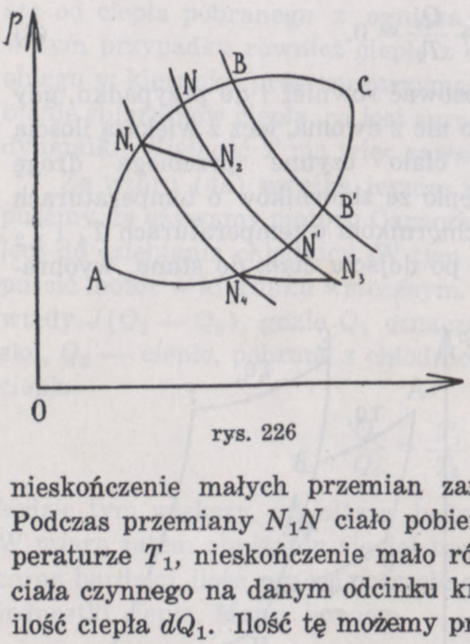
dla drugiego

$$\frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_4}{T_4} = 0.$$

Stąd dla danej przemiany, równoważnej sumie tych dwu cyklów

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_4}{T_4} = 0.$$

Podobnie rzecz się będzie miała i z każdą inną, byle odwracalną, przemianą zamkniętą. Jedyna różnica polegać będzie na tym, że na ogół ilość źródeł, z którymi ciało czynne wymienia ciepło, będzie wówczas nieograniczenie wielka. Niech np. *ABCA* odtwarza w płaszczyźnie *pv* daną odwracalną przemianę zamkniętą (rys. 226). Przeprowadźmy szereg nieskończenie bliskich adiabat N_1N_4, NN', BB' itd:, które podzielą daną przemianę zamkniętą na nieskończenie wiele nieskończenie małych przemian zamkniętych $N_1NN'N_4N_1$ itd. Podczas przemiany N_1N ciało pobiera z jakiegoś źródła o temperaturze T_1, nieskończenie mało różniącej się od temperatury ciała czynnego na danym odcinku krzywej, nieskończenie małą ilość ciepła dQ_1. Ilość tę możemy przyjąć za równą ilości, która by byłą pochłonięta podczas przemiany izotermicznej N_1N_2.



rys. 226

Istotnie, przypuśćmy, że ciało podlega przemianie zamkniętej N_1NN_2, podczas której pochłania na drodze N_1N ilość ciepła dQ_1 i oddaje na drodze N_2N_1 ilość ciepła dQ'_1 (na drodze NN_2, stanowiącej część adiabaty nie pobiera i nie oddaje ciepła). Z zasady rów-

noważności ciepła i pracy wynika, że różnica $dQ_1 - dQ'_1$ jest równoważna pracy, wykonanej podczas tej przemiany, a którą wyraża pole N_1NN_2. Pole to ograniczone nieskończenie małymi odcinkami krzywych jest wielkością nieskończenie małą drugiego rzędu, różnica zatem $dQ_1 - dQ'_1$ jest również nieskończenie mała w porównaniu z każdą z wielkości dQ.

Podobnie przyjmiemy ilość ciepła dQ_2, oddaną podczas przemiany $N'N_4$ źródłu o temperaturze T_2, nieskończenie mało różniącej się od temperatury ciała czynnego na danym odcinku krzywej, za równą ilością ciepła, które by ciało oddało podczas przemiany izotermicznej N_3N_4. Ilości ciepła pobrane w temperaturze T_1 i oddane w temperaturze T_2 podczas przemiany elementarnej $N_1NN'N_4N_1$ (w przemianach adiabatycznych NN' i N_4N_1 nie zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem) są zatem odpowiednio równe ilościom ciepła, pobranym i oddanym w tych samych temperaturach podczas elementarnej przemiany Carnota. Mamy więc

$$\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0.$$

Stosując to samo rozumowanie do pozostałych przemian elementarnych, na jakie rozbiliśmy badaną przemianę zamkniętą, otrzymamy

$$\Sigma \left(\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} \right) = 0 \tag{7}$$

lub, używając innego znakowania,

$$\int \frac{dQ}{T} = 0, \tag{7 a}$$

gdzie T oznacza temperaturę źródła, z którym ciało czynne wymienia (pobiera lub oddaje) ciepło dQ, lub równą jej temperaturę ciała czynnego w chwili danej wymiany.

Załóżmy, że ciało czynne podlega odwracalnej przemianie otwartej, przechodząc ze stanu 1 do stanu 2 i wymieniając z n źródłami ciepła o temperaturach, równych odpowiednio T_1, T_2... T_n ilości ciepła Q_1, Q_2... Q_n. Uważajmy, jak poprzednio, ciepło pobrane za dodatnie, oddane za ujemne; będziemy mieli

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \ldots + \frac{Q_n}{T_n} = a. \tag{a}$$

Przeprowadźmy w jakikolwiek, byle odwracalny sposób ciało z powrotem do stanu 1. Niech podczas tej przemiany ciało wymienia ciepło z m źródłami o temperaturze $T'_1, \dots T'_m$; otrzymamy wtedy

$$\frac{Q'_1}{T'_1} + \frac{Q'_2}{T'_2} + \ldots + \frac{Q'_m}{T'_m} = a'. \tag{b}$$

Obydwie te przemiany stanowią razem odwracalną przemianę zamkniętą, dla której, według wzoru (7)

$$\frac{Q_1}{T_1} + \ldots + \frac{Q_n}{T_n} + \frac{Q'_1}{T'_1} + \ldots + \frac{Q'_m}{T'_m} = a + a' = 0$$

skąd $$a = -a'.$$

Wartość zatem bezwzględna sumy wyrazów $\frac{Q}{T}$ jest niezależna od rodzaju przemiany, w której skutku ciało przechodzi odwracalnie ze stanu 1 do stanu 2, lecz jest całkowicie wyznaczona przez końcowy i początkowy stan ciała. Wybierzmy sobie raz na zawsze pewien początkowy stan ciała i przypuśćmy, żeśmy w sposób odwracalny przeprowadzili ciało z tego stanu do stanu 1; wartość sumy $\frac{Q}{T}$, którą oznaczymy przez S_1, jest wtedy zależna jedynie od końcowego stanu ciała, jest więc funkcją stanu ciała. Niech S_2 będzie tą funkcją dla stanu 2, do którego możemy ciało doprowadzić ze stanu początkowego albo, omijając stan 1, albo, przeciwnie, przeprowadzając ciało przez ten stan; w obydwu przypadkach wartość S_2 jest ta sama.

Przypuśćmy, że badanym ciałem jest pewna masa wody, za której stan początkowy przyjmiemy stan jej w temperaturze 0° pod ciśnieniem, równym ciśnieniu jej pary nasyconej w tej temperaturze. Niech stanem 1 będzie stan, w którym woda o temperaturze 100° znajduje się pod ciśnieniem 1 Atm, stanem 2 stan pary o tej samej temperaturze pod tym samym ciśnieniem. Możemy wodę przeprowadzić ze stanu 0 do stanu 2 albo, wyparowywując ją w temperaturze 0° i następnie doprowadzając parę do żądanej temperatury i prężności, tak że podczas tej przemiany woda nie będzie przechodziła przez stan 1, albo też, ogrzewając wodę pod odpowiednio zmienianym ciśnieniem zewnętrznym do temperatury 100° i doprowadzając ciśnienie do 1 Atm (a więc do stanu 1) i wtedy dopiero wyparowywując ją pod stałym ciśnieniem.

W przypadku drugim mamy

$$S_2 = S_1 + a,$$

gdzie a ma to samo znaczenie, co we wzorze (a).

Możemy zatem napisać

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \ldots + \frac{Q_n}{T_n} = S_2 - S_1. \quad (8)$$

Wielkość S Clausius nazwał entropią (grec. entropejn — przekształcać).

Zastosujmy te określenia do przemian, zachodzących w cyklu Carnota. Ciało czynne, przechodząc ze stanu A do stanu B (rys. 224), pobiera z ogniska o temperaturze T_1 ilość ciepła Q_1; różnica zatem entropii w początkowym i końcowym stanie ciała wynosi, zgodnie z podanym wyżej określeniem

$$\frac{Q_1}{T_1} = S_B - S_A. \quad (c)$$

W przemianie adiabatycznej BC ciało nie wymienia ciepła z otoczeniem. Zmiana jego entropii równa jest zeru. Odwracalna przemiana adiabatyczna jest zatem przemianą izentropową (o stałej entropii). W przemianie izotermicznej CD ciało oddaje chłodnicy ilość ciepła Q_2. Pamiętając, że Q_2 jest ujemne, piszemy

$$\frac{Q_2}{T_2} = S_D - S_C$$

lub z uwagi, że $S_C = S_B$

$$\frac{Q_2}{T_2} = S_D - S_B. \quad (d)$$

I wreszcie w odwracalnej przemianie adiabatycznej DA entropia się nie zmienia, tak że $S_D = S_A$. Otrzymujemy więc ostatecznie

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = S_B - S_A + S_A - S_B = 0$$

zgodnie, oczywiście, ze wzorem (6).

Włączmy do naszych rozważań obydwa źródła ciepła, które utworzą wtedy razem z badanym ciałem układ odosobniony i nazwijmy entropią układu sumę entropij poszczególnych jego części. Podczas odwracalnej przemiany AB oprócz entropii ciała czynnego zmienia się jedynie entropia ogniska, które oddaje w temperaturze T_1 ciepło Q_1. Entropia ogniska zmniejszy się za-

tem o tę samą wartość $\frac{Q_1}{T_1}$, o jaką wzrośnie w tej przemianie entropia ciała czynnego, tak że entropia układu pozostanie bez zmiany. Podczas przemiany BC entropie wszystkich ciał układu zachowają wartości poprzednie; w przemianie CD entropia chłodnicy, która, mając tę samą temperaturę, co ciało czynne, pobierze od niego ciepło Q_2, zwiększy się o tę samą wartość $\frac{Q_2}{T_2}$, o jaką zmniejszy się entropia ciała czynnego, tak że i tym razem entropia układu pozostanie bez zmiany. Wreszcie przemiana DA nie wprowadzi żadnych zmian do entropii układu.

Przypuśćmy teraz, że w dowolnym układzie odosobnionym jedno z ciał przechodzi odwracalnie ze stanu 1 do stanu 2. Zmianę jego entropii, wyrażoną wzorem (8), możemy uważać za sumę zmian, jakich doznaje entropia ciała podczas wymiany ciepła ze źródłami o temperaturach T_1, T_2,... T_n, należącymi do tego samego układu. Każdorazowej zmianie entropii ciała odpowiada równa, lecz przeciwnego znaku, zmiana entropii źródła, wobec czego entropia układu posiada w każdej chwili tę samą wartość, jaką posiadała początkowo. Dochodzimy tym sposobem do twierdzeń następujących:

1. zamknięta przemiana odwracalna nie zmienia entropii układu, podlegającego przemianie;

2. entropia układu odosobnionego, w którym zachodzą jedynie przemiany odwracalne, zachowuje wartość niezmienną.

Załóżmy, że jednostka masy gazu doskonałego przechodzi w sposób odwracalny od temperatury T_1, w której zajmowała objętość v_1, do temperatury T_2 i objętości v_2. Ilość ciepła, którą gaz pobiera w każdej z przemian elementarnych, wyraża wzór (a) ust. 9 rozdz. IX, gdzie zamiast $T'—T$ bierzemy dT i $c_p\, dT$ oznaczamy przez dQ (podczas przemiany elementarnej ciśnienie zachowuje wartość stałą):

$$dQ = c_v\, dT + \frac{1}{J} p dv,$$

skąd na elementarną zmianę entropii otrzymujemy

$$dS = \frac{dQ}{T} = c_v \frac{dT}{T} + \frac{1}{J} p \frac{dv}{T}$$

lub z uwagi, że $pv = \frac{R}{m} T$, gdzie m — masa drobiny gramowej danego gazu

$$dS = c_v \frac{dT}{T} + \frac{1}{J} \frac{R}{m} \frac{dv}{v}. \tag{e}$$

Całkowitą zmianę entropii otrzymamy, całkując wzór (e) w granicach od T_1 do T_2 i od v_1 do v_2.

$$S_2 - S_1 = c_v \lg T_2 - c_v \lg T_1 + \frac{1}{J}\frac{R}{m}\lg v_2 - \frac{1}{J}\frac{R}{m}\lg v_1 =$$

$$= \left(c_v \lg T_2 + \frac{1}{J}\frac{R}{m}\lg v_2\right) - \left(c_v \lg T_1 + \frac{1}{J}\frac{R}{m}\lg v_1\right)$$

Oznaczając przez S_0 entropię gazu w stanie, który przyjmiemy za początkowy, będziemy mogli napisać

$$S = S_0 + c_v \lg T + \frac{1}{J}\frac{R}{m}\lg v. \qquad (9)$$

Entropia m_g razy większej masy gazu będzie, oczywiście, m_g razy większa.

5. PRZEMIANY NIEODWRACALNE

W motorach nieodwracalnych, w których ciało czynne, przebiegając zamknięty cykl przemian, wymienia ciepło, podobnie, jak w cyklu Carnota, z dwoma jedynie źródłami o temperaturach T_1 i T_2, spółczynnik skutku użytecznego jest, zgodnie z założeniem Clausiusa

$$\eta_n < \eta_0 = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

skąd, kładąc $\eta_n = \dfrac{\mathcal{T}}{JQ} = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$, otrzymujemy po dokonaniu łatwych przeróbek i wprowadzeniu takiego znakowania, jak w ust. 4

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0, \qquad (10)$$

gdzie T_1 i T_2 oznaczają temperatury źródeł, tym razem nie równe temperaturom ciała czynnego w chwili wymiany ciepła.

W przypadku, gdy ciało czynne, podlegając przemianie zamkniętej wymienia ciepło nie z dwoma, lecz z większą ilością źródeł, nierówność Clausiusa przybiera postać

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \ldots + \frac{Q_n}{T_n} < 0 \qquad (10\,a)$$

albo, ogólniej,

$$\int \frac{dQ}{T} < 0 \qquad (10\,b)$$

gdzie przez T oznaczamy temperaturę źródła, z którym ciało wymienia ciepło, przy czym zakładamy, że temperatura ta podczas wymiany ciepła zachowuje wartość stałą.

Gdy mamy do czynienia nie z pojedynczym ciałem, lecz z układem ciał, podlegającym przemianie zamkniętej, sumując wielkości $\int \frac{dQ}{T}$, wyznaczone dla każdego z ciał układu, otrzymamy analogiczną nierówność dla całego układu.

Nierówność Clausiusa możemy wyjaśnić (nie udowodnić) na następujących przykładach:

1. Przypuśćmy, że nieodwracalność zjawiska spowodowana jest tym, że temperatury źródła i ciała różnią się w chwili wymiany ciepła o pewną wartość skończoną, niech np. temperatura źródła, z którego ciało pobiera ciepło, będzie T_1, wyższa, oczywiście, od T'_1 temperatury ciała w chwili wymiany, temperatura zaś źródła, któremu ciało oddaje ciepło, — T_2, niższa od temperatury T'_2 ciała w chwili oddawania ciepła. Wtedy dodatni składnik sumy $\frac{Q_1}{T_1}$ jest mniejszy od składnika $\frac{Q_1}{T'_1}$, który byśmy mieli, gdyby przemiana była odwracalna, składnik zaś ujemny $\frac{Q_2}{T_2}$ większy od $\frac{Q_2}{T'_2}$.

2. Gdy nieodwracalność spowodowana jest istnieniem w układzie sił tarcia, część pracy, zużyta na pokonanie tych oporów biernych, przechodzi z powrotem w ciepło; ciepło oddane podczas przemiany jest większe od tego, jakie by układ oddał w przemianie odwracalnej; składniki ujemne sumy są i tym razem większe.

3. Gdy ciśnienie zewnętrzne nie jest równe ciśnieniu, wywieranemu przez ciało, praca wykonana jest mniejsza od tej, jaką by ciało, pobierając tę samą ilość ciepła, wykonało w przemianie odwracalnej; praca zaś zewnętrzna, wykonana przy zgęszczaniu ciała, jest większa. W pierwszym przypadku zmniejsza się składnik dodatni sumy, w drugim zwiększa ujemny.

Przypuśćmy dalej, że układ, podlegając przemianie nieodwracalnej, przechodzi ze stanu 1 do stanu 2. Oznaczmy ilości ciepła, jakie ciała układu wymieniają podczas tej przemiany ze źródłami o temperaturach $T_1, T_2, \ldots T_n$, przez $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$. Niech dla doprowadzenia układu w sposób odwracalny z powrotem do stanu 1 okaże się konieczną wymiana ciepła z innymi na ogół źródłami, o innych temperaturach. Te ilości ciepła i te temperatury oznaczmy przez $Q'_1, Q'_2 \ldots Q'_m$ i $T'_1, T'_2 \ldots T'_m$.

Otrzymamy wtedy zamkniętą przemianę nieodwracalną (tylko bowiem jej część jest odwracalna). Wobec tego

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}+\cdots+\frac{Q_n}{T_n}+\frac{Q'_1}{T'_1}+\cdots+\frac{Q_m}{T_m}<0. \qquad \text{(a)}$$

Suma jednak składników $\frac{Q'}{T'}$, odpowiadających przemianie odwracalnej, jest, zgodnie ze wzorem (8), równa $S_1 - S_2$. Podstawiając do wzoru (a), otrzymujemy

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}+\ldots+\frac{Q_n}{T_n}+S_1-S_2<0$$

i

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}+\ldots+\frac{Q_n}{T_n}<S_2-S_1 \qquad (11)$$

lub ogólniej

$$\int\frac{dQ}{T}<S_2-S_1 \qquad (11\,\text{a})$$

W przypadku układu odosobnionego, gdy nie ma wymiany ciepła z otoczeniem

$$S_2-S_1>0$$

lub

$$S_2>S_1 \qquad (12)$$

W układzie odosobnionym każdej przemianie nieodwracalnej towarzyszy wzrost entropii układu.

Jak o tym wyżej już była mowa (ust. 1), przemiany rzeczywiste są zawsze przemianami nieodwracalnymi, nierówność zatem (12), wyrażająca twierdzenie Clausiusa, dotyczy wszystkich zjawisk, zachodzących w układach, które z mniejszym lub większym przybliżeniem możemy uważać za odosobnione (rozdz. II, ust. 11). Wyraża ona w ściślejszym sformułowaniu to, o czym mówiliśmy już w ust. 1, a mianowicie, że układy rzeczywiste odosobnione nie mogą nigdy podlegać przemianie zamkniętej (lub, innymi słowy, że nieodosobnione układy rzeczywiste nie mogą podlegać przemianie zamkniętej zupełnej), każdej bowiem przemianie, bez względu na jej kierunek, towarzyszy wzrost entropii układu, wobec czego żadną przemianą nie możemy spowodować przywrócenia entropii jej wartości początkowej (lub w przypadku układu nieodosobnionego przywrócenia entropii wartości początkowej bez zwiększenia entropii ciał otaczających).

Ten stały wzrost entropii, który, zgodnie z określeniem tej wielkości, zachodzi tylko wtedy, gdy ciało pobiera więcej ciepła, niż oddaje w danej temperaturze, spowodowany jest przez stopniowe przekształcanie się wszystkich rodzajów energii w energię cieplną, jak również przez przechodzenie energii cieplnej z ciał o temperaturze wyższej do ciał o temperaturze niższej (wtedy bowiem entropia ciała, oddającego ciepło, zmniejsza się o wartość mniejszą od wzrostu entropii ciała, ciepło pobierającego, tak że entropia układu wzrasta). Proces ten można zwolnić, nadając zjawiskom w układzie bieg taki, aby możliwie mało odbiegały od warunków odwracalności, powstrzymać go jednak ani tym bardziej zmienić jego kierunku nie można.

Rozpatrzmy układ, znajdujący się stale w tej samej temperaturze, którego części posiadają pewną energię ruchu. W przemianie zamkniętej układ taki wywiąże zawsze więcej ciepła, niż pobierze, jak to wynika z nierówności Clausiusa, gdzie $T =$ stałej wyprowadzamy przed znak sumy $\frac{1}{T} \Sigma Q < 0$. Praca zewnętrzna będzie zatem wykonana kosztem energii ruchu układu (energia wewnętrzna przybiera ostatecznie tę samą wartość, jaką miała na początku), przy czym zmniejszenie się energii ruchu będzie większe od wykonanej pracy. Zgodnie bowiem z zasadą równoważności ciepła i pracy mamy

$$JQ = \mathcal{T} + L_1 - L_0 < 0$$

lub

$$L_0 - L_1 > \mathcal{T}.$$

Gdy układ jest mechanicznie odosobniony, $\mathcal{T} = 0$

$$L_0 > L_1 \qquad (13)$$

Energia ruchu układu stopniowo się zmniejsza. Wytrąćmy wahadło grawitacyjne z jego pionowego położenia równowagi, udzielając mu pewnej energii ruchu. Za każdym wahnięciem wahadło, wracając do swego położenia początkowego, będzie przez nie przechodziło z coraz to mniejszą prędkością, aż wreszcie się zatrzyma. Utrzymanie go stale w tej samej prędkości wymagałoby pracy, równoważnej wywiązywanemu przez nie ciepłu. Twierdzenie, wyrażone nierównością (13), często jest nazywane zasadą rozpraszania energii ruchu.

5 a. PRZYPADKI SZCZEGÓLNE

Niech badany układ podlega nieskończenie małej przemianie otwartej (odwracalnej lub nieodwracalnej). Pierwsza zasada termodynamiki ustala między zmianą energii wewnętrznej, ciepłem pobra-

nym lub wywiązanym i pracą wykonaną lub pobraną następujący znany nam związek

$$dU = dQ + \frac{1}{J} d\mathcal{T}_z. \qquad \text{(a)}$$

Zmiana entropii dS, jakiej doznaje układ na skutek tej przemiany, jest albo równa $\frac{dQ}{T}$, gdy przemiana jest odwracalna i gdy T jest temperaturą zarówno układu, jak i źródła, lub też większa od $\frac{dQ}{T}$, gdy przemiana jest nieodwracalna; wtedy T oznacza, jak o tym była wyżej mowa, temperaturę źródła. Możemy zatem ogólnie napisać

$$TdS \geqslant dQ$$

Wzór (a) przybierze wtedy postać

$$dU - TdS \leqslant \frac{1}{J} d\mathcal{T}_z, \qquad \text{(b)}$$

gdzie znak nierówności obowiązuje w przypadku przemian nieodwracalnych, równości — w przypadku przemian odwracalnych.

a) Załóżmy, że przemiana zachodzi bez wymiany ciepła z otoczeniem (układ cieplnie odosobniony — przemiana adiabatyczna). Wtedy, jak wynika ze wzoru (a) i z rozważań ust. 3, rozdz. IX, praca wykonywana jest kosztem energii wewnętrznej i, zarówno w przemianach odwracalnych, jak i nieodwracalnych wyraża się równością

$$dU = \frac{1}{J} d\mathcal{T}_z, \qquad (14)$$

skąd po podstawieniu do (b) otrzymujemy

$$dS \geqslant 0$$

W układzie cieplnie odosobnionym entropia albo wzrasta albo pozostaje stałą.

b) Niech teraz przemiany układu (nieodosobnionego) zachodzą w stałej temperaturze T. Ze wzoru (b) otrzymujemy

$$d(U - TS) \leqslant \frac{1}{J} \mathcal{T}_z.$$

Oznaczmy wielkość $U - TS$ przez F i nazwijmy ją za Helmholtzem e n e r g i ą s w o b o d n ą układu.

$$dF \leqslant \frac{1}{J} d\mathcal{T}_z$$

i, uważając daną przemianę skończoną za sumę tego rodzaju przemian elementarnych, otrzymamy

$$F_2 - F_1 \leqslant \frac{1}{J} d\mathcal{T}_z.$$

W przemianach izotermicznych nieodwracalnych wzrost energii swobodnej jest mniejszy od pracy, pobranej przez układ, zmniejszenie się zaś tej energii jest większe od pracy przez układ wykonanej.

Wielkość $U-F=TS=G$ Helmholtz nazwał e n e r g i ą z w i ą z a n ą. W przypadku odwracalnej przemiany izotermicznej zmianę energii wewnętrznej

$$U_2 - U_1 = Q + \frac{1}{J}\mathcal{T}_z$$

możemy przedstawić w postaci sumy dwu wielkości

$$U_2 - U_1 = F_2 - F_1 + G_2 - G_1 = Q + \frac{1}{J}\mathcal{T}_z,$$

gdzie $F_2 - F_1 = \frac{1}{J}\mathcal{T}_z$ i $G_2 - G_1 = Q$. Zmiana energii swobodnej jest wtedy równa pracy pobranej lub wykonanej przez układ, zmiana energii związanej — ciepłu pobranemu lub wywiązanemu. Gdy $\mathcal{T}_z = 0$ (układ mechanicznie odosobniony), energia swobodna układu, zmniejsza się w każdej izotermicznej przemianie nieodwracalnej, jakiej podlega układ

$$dF < 0. \tag{15}$$

Stopniowo zatem zmniejsza się możność wykonywania pracy przez tego rodzaju układ.

c) Gdy wreszcie przemiany zachodzą nie tylko w stałej temperaturze, lecz również i pod stałym ciśnieniem, wtedy, podstawiając $-pdv$ zamiast $d\mathcal{T}_z$ (praca zewnętrzna dodatnia zmniejsza objętość układu), przepiszemy wzór (b) w postaci

$$d\left(U - TS + \frac{1}{J}pv\right) \leqslant 0 \tag{16}$$

gdzie wielkość $\Phi = U - TS + \frac{1}{J}pv$ nosi nazwę p o t e n c j a ł u t e r m o d y n a m i c z n e g o p o d s t a ł y m c i ś n i e n i e m.

Teorię tych różnych funkcyj termodynamicznych, uogólniając ją na przypadki przez nas nie rozpatrywane, dali między innymi Gibbs (1876 r.), Duhem (1893 r.) i W. Natanson (1892 r.).

Nazwijmy, rozszerzając termin, użyty początkowo przez Maxwella dla oznaczenia energii swobodnej, e n e r g i ą p r z y d a t n ą tę część energii, którą w danych warunkach możemy przekształcić w pracę. W przemianie adiabatycznej energią przydatną jest energia wewnętrzna układu, w odwracalnej przemianie izotermicznej — jego energia swobodna.

5 b. TWIERDZENIE NERNSTA

Na podstawie badań reakcyj chemicznych, zachodzących izotermicznie w niskich temperaturach, Nernst założył (1906 r.), że w miarę obniżania się temperatury różnica między zmianami energii wewnętrznej układu chemicznie jednorodnego o skończonej gęstości i zmianami

jego energii swobodnej lub, co na jedno wychodzi, największą wartością pracy, jaką można otrzymać, poddając układ przemianie izotermicznej, stopniowo się zmniejsza i w pobliżu zera bezwzględnego staje się równa zeru, co w związku z innymi równaniami termodynamiki prowadzi do wzoru

$$\lim_{T\to 0}\left(\frac{dF}{dT}\right)=\lim_{T\to 0}\left(\frac{dU}{dT}\right)=0.$$

Z tego założenia wynika, że entropia układu nie zmienia się podczas przemian, jakim układ podlega w temperaturach bliskich zera bezwzględnego

$$\lim_{T\to 0}\Delta S=0. \qquad (17)$$

Twierdzenie Nernsta uzupełnił (1910 r.) Planck założeniem dodatkowym, że entropia układu dąży w miarę obniżania się temperatury do wartości zero.

Z tych dwu połączonych założeń wynika, czego tu dowodzić nie będziemy, 1) że zarówno spółczynnik rozszerzalności, jak i ciepło właściwe ciał stałych i ciekłych w miarę obniżania się temperatury dążą do wartości zero, co, jak wiemy (rozdz. VIII, ust. 2 i rozdz. IX, ust. 4), jest na ogół potwierdzone przez doświadczenie; i 2) że jest rzeczą niemożliwą oziębienie ciała do temperatury zera bezwzględnego.

ROZDZIAŁ XI

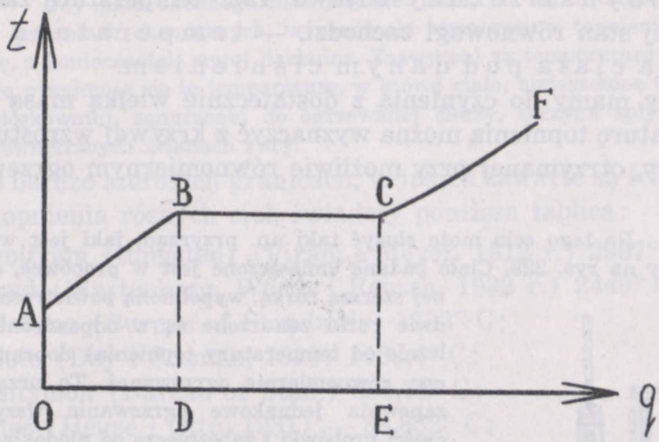
TOPNIENIE I PAROWANIE

1. TEMPERATURA TOPNIENIA

Mówiąc w rozdziale V o podziale ciał na stałe, ciekłe i gazowe, zaznaczyliśmy, że jedno i to samo ciało może w pewnych warunkach mieć własności ciała stałego, w innych zaś — cieczy. To przechodzenie z jednego stanu w drugi zachodzi, między innymi, przy ogrzewaniu ciała.

Przypuśćmy, że badanym ciałem jest ciało krystaliczne, umieszczone w odpowiednim naczyniu i razem z nim stopniowo ogrzewane pod stałym ciśnieniem. Początkowo dopływ ciepła z zewnątrz powodować będzie wzrost temperatury ciała i, co za tym idzie, zmianę jego stanu fizycznego, zachodzącą, podobnie, jak wzrost temperatury, w sposób ciągły, tak że wyznaczające ten stan parametry będą w dwu nieograniczenie bliskich temperaturach różniły się nieograniczenie mało. Odkładajmy na osi odciętych ilości dostarczonego ciepła, na osi rzędnych chwilowe temperatury ciała (rys. 227), przebieg zjawiska odtworzy krzywa *AB*, dla wielu ciał, których ciepło właściwe mało zmienia się z temperaturą, nie wiele różniąca się od linii prostej. Ten wzrost temperatury nie będzie jednak nieograniczony. Gdy ciało dojdzie do temperatury *DB,* której wartość zależy od rodzaju ciała i od ciśnienia, pod jakim się znajduje, temperatura ciała przestanie się podnosić; jednocześnie stwierdzimy, że ciało przestało być jednorodne: część ciała pozostała w stanie stałym, część zaś przeszła w stan ciekły, tak że w objętości, jaką ciało zajmuje w naczyniu, będzie można wyodrębnić dwa obszary, w których własności fizyczne ciała (takie np., jak gęstość, spółczynniki

sprężystości itp.) różnią się o wartość skończoną. Nazywając, zgodnie z terminologią, wprowadzoną przez Gibbsa, f a z ą obszar, w którym ciało jest jednorodne, powiemy, że poniżej



rys. 227

temperatury *DB* badane ciało znajduje się w jednej tylko fazie — fazie ciała stałego, w temperaturze zaś *DB* w dwu fazach — ciała stałego i cieczy.

To określenie fazy pozostaje w mocy, gdy obszary, w których ciało posiada te same własności fizyczne, są od siebie oddzielone obszarami, w których ciało posiada inne własności; tak np. gdy badanym ciałem jest lód, który w temperaturze *DB* topi się i rozpadając się na części, wypływa na powierzchnię wody, — wszystkie kawałki lodu, zajmujące obszar, w którym dane ciało posiada te same własności, tworzą jedną fazę.

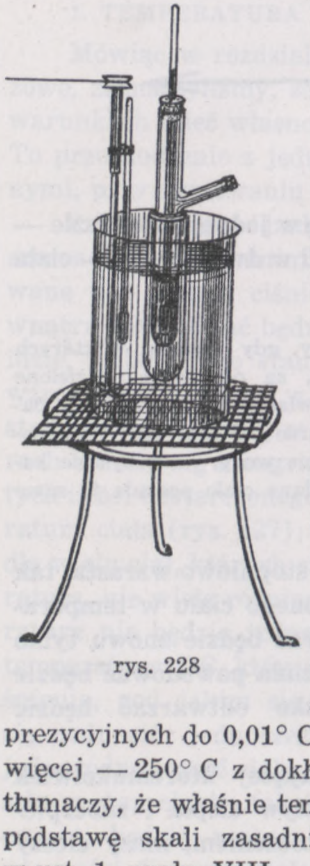
Masa cieczy w miarę dopływu ciepła stopniowo wzrasta, tak że ostatecznie, gdy ilość ciepła, dostarczonego ciału w temperaturze *DB,* wyniesie *DE,* naczynie zawierać będzie znowu tylko jedną fazę — cieczy. Dalsze ogrzewanie ciała powodować będzie ponowny wzrost temperatury; zjawisko odtwarzać będzie krzywa *CF*.

Jeżeli jednak w chwili, odpowiadającej któremukolwiek z punktów prostej *BC,* przerwiemy dopływ ciepła i zabezpieczymy naczynie od wymiany ciepła z otoczeniem, masy cieczy i ciała stałego pozostawać będą w stosunku niezmiennym pod

tym samym ciśnieniem nieograniczenie długo: faza ciała stałego nie będzie przechodziła w fazę cieczy, ani faza cieczy w fazę ciała stałego. Taki stan nazywamy stanem równowagi termodynamicznej obydwu faz, temperaturę zaś *DB*, w której stan równowagi zachodzi, — temperaturą topnienia ciała pod danym ciśnieniem.

Gdy mamy do czynienia z dostatecznie wielką masą ciała, temperaturę topnienia można wyznaczyć z krzywej wzrostu temperatury, otrzymanej przy możliwie równomiernym ogrzewaniu ciała.

Do tego celu może służyć taki np. przyrząd, jaki jest wyobrażony na rys. 228. Ciało badane umieszczone jest w probówce, otoczonej szerszą rurką, wypełnioną powietrzem. Obydwie rurki zanurzone są w odpowiednio (zależnie od temperatury topnienia) dobranej cieczy, równomiernie ogrzewanej. To urządzenie zapewnia jednakowe ogrzewanie wszystkich części probówki i zabezpiecza od niedokładności, związanych z niejednostajnością dopływu ciepła. Wyznaczając w pewnych oznaczonych odstępach czasu temperaturę ciała i zakładając, że ilości dostarczonego ciepła są proporcjonalne do czasu ogrzewania, z krzywej, takiej, jak na rys. 227, wyznaczamy bezpośrednio temperaturę topnienia.



rys. 228

Jest rzeczą oczywistą, że ta prosta metoda nie może być stosowana wtedy, gdy ciało topi się w wysokiej temperaturze. Wtedy ciało bywa zazwyczaj bezpośrednio ogrzewane przez źródło (np. przez piec elektryczny), krzywą zaś temperatury wyznacza się ze wskazań ogniwa termoelektrycznego, termometru gazowego lub przy użyciu metody optycznej.

Ta metoda pozwala wyznaczać temperatury topnienia, leżące w granicach temperatur normalnych, z bardzo wielką dokładnością, dochodzącą w pomiarach prezycyjnych do 0,01° C, leżące zaś w granicach od 0° do mniej więcej — 250° C z dokładnością niewiele co mniejszą. Tym się tłumaczy, że właśnie temperatury topnienia służą najczęściej za podstawę skali zasadniczej temperatur, o której była mowa w ust. 1, rozdz. VIII.

W temperaturach wysokich, przekraczających 1500° C, dokładność jest o wiele mniejsza: błąd może dochodzić do 10° C, a nawet (w temperaturach bliskich 3000° C) do 100° C.

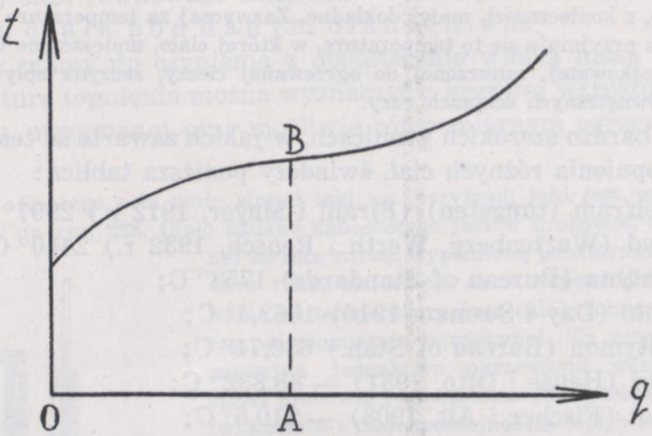
Gdy masa badanego ciała jest niewielka, jak się to często zdarza w badaniach chemicznych, wyznaczenie temperatury topnienia staje się, z konieczności, mniej dokładne. Zazwyczaj za temperaturę topnienia przyjmuje się tę temperaturę, w której ciało, umieszczone w rurce włoskowatej, zanurzonej do ogrzewanej cieczy, zaczyna spływać po wewnętrznych ściankach rury.

O bardzo szerokich granicach, w jakich zawarte są temperatury topnienia różnych ciał, świadczy poniższa tablica:

wolfram (tungsten) (Pirani i Meyer, 1912 r.) 2997° C;
iryd (Wartenberg, Werth i Reusch, 1932 r.) 2440° C;
platyna (Bureau of Standards) 1753° C;
złoto (Day i Sosman, 1910) 1062,4° C;
antymon (Bureau of Stan.) 630,71° C;
rtęć (Heuse i Otto, 1931) —38,832° C;
azot (Fischer i Alt, 1903) —210,5° C;
tlen (Kamerlingh Onnes i Crommelin, 1911) — 218,4° C;
wodór (pod ciśnieniem 49 mm rt.) (Travers i Jaquerod, 1904) —258,9° C;
hel (pod ciśnieniem 25,3 Atm) (Keesom, 1926 r.)—271,97° C.

W przypadku, gdy badane ciało jest bezpostaciowe, jak np. wosk, szkło, przebieg zjawiska jest na ogół odmienny. Temperatura ciała stale się podnosi, tak że krzywa wzrostu temperatury nie posiada gałęzi, równoległej do osi *q* (rys. 229). Wzrost ten nie jest równomierny, w pobliżu pewnej temperatury *AB* jest on najwolniejszy. Przez analogię nazywamy tę temperaturę temperaturą topnienia danego ciała, jakkolwiek nie czyni ona zadość podanemu wyżej określeniu, w tej bowiem temperaturze, jak i we wszystkich niższych i wyższych temperaturach ciało znajduje się stale w jednej fazie, którą można nazwać fazą stanu stałego, gdy własności ciała bardziej odpowiadają własnościom ciała stałego, lub stanu ciekłego, gdy własności te bardziej zbliżają się do własności, charakteryzujących ciecze. Tego rodzaju ciała stopniowo przechodzą ze stanu stałego w ciekły, tak że stany ich, odpowiadające dwu nieograniczenie bliskim temperaturom, różnią się nieograniczenie mało nawet wtedy, gdy temperaturą ciała jest temperatura *AB*.

Ochładzając stopniowo otrzymaną z ciała stałego ciecz, otrzymuje się pospolicie, zarówno w przypadku ciała krystalicznego, jak i bezpostaciowego, krzywą obniżania się temperatury identyczną z krzywą jej wzrostu, tak że temperatura równowagi



rys. 229

faz ciała stałego i cieczy oraz temperatura najmniejszej prędkości zmiany temperatury mają te same wartości, co przy ogrzewaniu. Nazywając te temperatury t e m p e r a t u r a m i k r z e p n i ę c i a, możemy powiedzieć, że w rozpatrywanych przez nas przypadkach temperatura topnienia ciała równa jest jego temperaturze krzepnięcia.

To wszystko, co było wyżej powiedziane, nie dotyczy ani roztworów ani stopów, gdzie przebieg zjawisk przy zmianie stanu skupienia jest o wiele bardziej złożony. Zjawisk tych, których badaniem zajmuje się chemia fizyczna i jej działy specjalne, rozpatrywać tu nie będziemy.

Może się jednak zdarzyć, że oziębione ciało pozostaje w stanie ciekłym i poniżej temperatury krzepnięcia. Zazwyczaj stan taki jest stanem równowagi niestałej: wystarczy wrzucić do cieczy p r z e c h ł o d z o n e j drobny kryształek tego samego ciała (wystarczy nieraz, jak to wykazał Ostwald (1897 r.) jedna milionowa miligrama), aby ciecz zaczęła krzepnąć, wywiązując jednocześnie ciepło, które, w przypadku cieczy cieplnie odosobnionej, ogrzewa ją do temperatury topnienia. To przechłodzenie

jest dla znacznej większości ciał niewielkie, niekiedy jednak można otrzymać ciało w stanie ciekłym w temperaturach o wiele niższych od temperatury topnienia; tak np. wodę można przechłodzić do — 20° C.

Wyjaśnienie tego zjawiska, zaobserwowanego już przez Fahrenheita (1724 r.), a następnie badanego przez Gay-Lussaca (1836 r.), Despretza (1836 r.), a zwłaszcza Gerneza (1883 r.), dał Tammann w pracach, ogłaszanych od 1898 r. Według Tammanna krzepnięcie początkowo nie obejmuje od razu większych obszarów cieczy, lecz skupia się dookoła pewnych jąder krystalizacyjnych, powstających nagle przy dojściu cieczy do temperatury krzepnięcia i rozsianych bezładnie w całej jej masie. Jądra te narastają stopniowo z pewną skończoną prędkością krystalizacji (oczywiście, różną w różnych kierunkach), która wzrasta w miarę obniżania temperatury poniżej temperatury krzepnięcia, przechodzi przez maximum w pewnej temperaturze i następnie maleje. Nierównolegle do niej zmienia się ilość powstających w cieczy jąder krystalizacyjnych, która dla wielu ciał (z wyjątkiem metali) również, co prawda, przechodzi przez maximum, ale, na ogół, w temperaturze niższej od temperatury, odpowiadającej największej prędkości krystalizacji. Oziębiając więc nagle daną ciecz do temperatury, w której prędkość krystalizacji jest praktycznie równa zeru, otrzymujemy ciecz przechłodzoną z rozsianymi w niej jądrami krystalizacji, których objętość zwiększa się nieograniczenie wolno. W tej niskiej temperaturze ciało, które przez cały czas oziębiania pozostawało w jednej fazie (znikomo małą fazę jąder krystalizacji pomijamy), zmieniając w sposób ciągły swe własności fizyczne, może mieć wszystkie cechy bezpostaciowego ciała stałego, które z tego powodu Tammann uważa za ciecz przechłodzoną. Tym tłumaczyłyby się własności takich ciał, jak szkło, którego przechłodzenie jest tak znaczne, że w warunkach zwykłych nie powstają w nim jądra krystalizacyjne, a te, które istnieją, narastają bardzo powoli. Z biegiem czasu jednak szkło może się „zestarzeć", gdy jądra zdołają w znaczniejszej mierze zwiększyć swoją objętość; podobnie w pewnych przypadkach (szkło ołowiowe) może powstać krystalizacja szkła przy ogrzewaniu, gdy w pewnej temperaturze ilość jąder się znacznie zwiększy, w innej zaś — wyższej — prędkość ich krystalizacji będzie dostatecznie wielka, aby objętość ich znacznie powiększyć. Tammann wyznaczał prędkość powstawania jąder krystalizacyjnych, oziębiając nagle ciecz do temperatury niższej od temperatury krzepnięcia i pozostawiając ją przez pewien czas w tej temperaturze. Jądra w tej temperaturze nie były na ogół widoczne, dopiero po ogrzaniu cieczy do temperatury największej prędkości krystalizacji i po pozostawieniu jej w tej temperaturze znów przez pewien czas, krótszy od poprzedniego, ujawniały się one, jako miejsca zestalania się cieczy, i mogły być zliczone. Można bez większego błędu przyjąć, że zliczone w ten sposób jądra

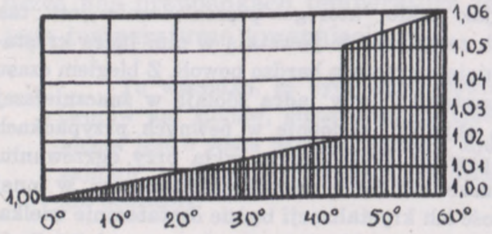
powstały w temperaturze początkowej, temperaturze bowiem największej prędkości krystalizacji odpowiada zazwyczaj niewielka prędkość powstawania jąder. Prędkość krystalizacji wyznaczana była w sposób następujący: do rurki włoskowatej, wypełnionej badaną cieczą przechłodzoną i utrzymywaną w stałej temperaturze, wrzucano kryształ danego ciała, aby wywołać zestalanie i mierzono prędkość wzrostu kryształu w kierunku osi rurki.

Jak można jednak sądzić na podstawie prac późniejszych ilość powstających jąder zależy również od temperatury, do jakiej ciecz była ogrzana przed oziębieniem, i od czasu, w ciągu którego pozostawała w tej temperaturze.

Zjawiska odwrotnego, a mianowicie, pozostawania ciała w stanie stałym w temperaturze wyższej od temperatury topnienia nie można było, jak dotychczas, stwierdzić.

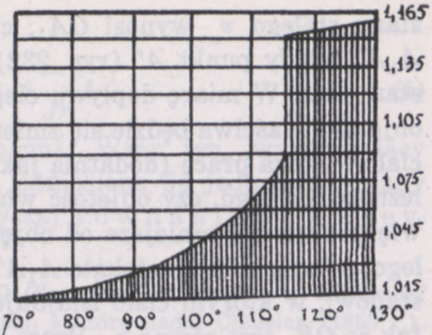
2. ZALEŻNOŚĆ TEMPERATURY TOPNIENIA OD CIŚNIENIA ZEWNĘTRZNEGO. CIEPŁO UTAJONE TOPNIENIA

Jedną z oznak przejścia ciała ze stanu stałego w stan ciekły jest zmiana, zazwyczaj dość znaczna, jego gęstości. Najprostszą stosunkowo metodą jej wyznaczenia jest metoda Koppa (1855 r.); badane ciało umieszcza się w dilatometrze, wypełnionym odpowiednią cieczą (w temperaturach nie wysokich — wodą, terpentyną, oliwą, w temperaturach wyższych — parafiną) o znanym spółczynniku rozszerzalności. Krzywe, wyrażające zależność objętości danej masy ciała od temperatury, wykazują nagły skok w temperaturze topnienia. Tak np. fosfor (rys. 230) rozszerza się do temperatury topnienia zupełnie równomiernie (spółczynnik jego rozszerzalności jest stały); w temperaturze topnienia objętość jego nagle wzrasta, aby po przejściu w fazę cieczy znów wzrastać równomiernie. Siarka (rys. 231) wykazuje znaczny wzrost spółczynnika rozszerzalności już poniżej temperatury topnienia, w której objętość jej wzrasta nagle o pewną wartość skończoną. Podobnie zachowują się przy topnieniu prawie wszystkie ciała. Znane dotychczas wyjątki



rys. 230

stanowią woda, bizmut i żelazo, które w fazie cieczy posiadają gęstość większą, niż w fazie ciała stałego.

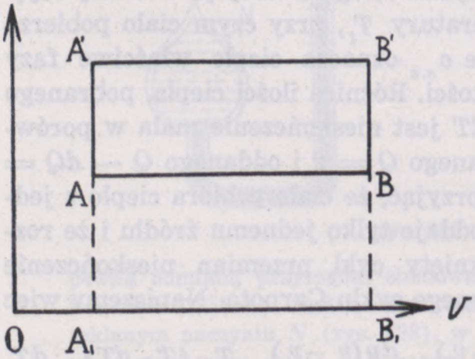


rys. 231

Bunsen do wyznaczenia zmian gęstości, zachodzących przy zestalaniu wody, używał (1870 r.) przyrządu, podobnego do kalorymetru lodowego (rozdz. IX, ust. 5), w którym obserwował przesuwania się słupka rtęci w rurce poziomej przy topnieniu oznaczonej masy lodu. Na gęstość lodu w temperaturze 0° otrzymał on 0,91674 g/cm³, liczbę, różniącą się o przeszło 1% od poprzednio otrzymanej przez Koppa. I. Zakrzewski, używając tej samej metody, otrzymał (1892 r.) wartość 0,91666, a więc, w granicach błędu doświadczenia, identyczną z otrzymaną przez Bunsena. Objętość właściwa lodu w temperaturze 0° wynosi zatem $\frac{1}{0,91666}$ cm³/g = 1,0909, a ponieważ objętość właściwa wody w tej samej temperaturze równa jest $\frac{1}{0,999867}$ cm³/g = 1,0002, objętość właściwa zmniejsza się przy topnieniu o 0,0907 (por. rozdz. IX, ust. 5).

Zmniejszenie się objętości 1 g stopionego ciała wynosi dla bizmutu, według Toeplera (1894 r.), 0,0034 cm³, dla żelaza, według Wrightsona i Robertsa (1881 r.), — 0,0085 cm³.

Zmiana objętości właściwej przy przejściu ciała ze stanu stałego w stan ciekły sprawia, jak to wykazał J. Thomson (1849 r.), że temperatura topnienia ciał zależy od ciśnienia zewnętrznego. Przypuśćmy, że w naczyniu, zamkniętym tłokiem, umieściliśmy 1 g danego ciała, poddając je ciśnieniu zewnętrznemu p. Wprowadźmy to naczynie w zetknięcie ze źródłem ciepła o temperaturze równej temperaturze topnienia danego ciała pod ciśnieniem p. Niech objętość właściwa fazy



rys. 232

stanu stałego v_s wynosi OA_1, ciśnienie p niech będzie równe A_1A', wtedy punkt A' (rys. 232) będzie odtwarzał początkowy stan ciała. W miarę dopływu ciepła ciało będzie się topiło, jego objętość właściwa będzie się zmieniała, tłok będzie się przesuwał, ciało wykona pracę (dodatnią jak na rysunku, lub ujemną, w zależności od tego, czy objętość właściwa fazy stanu ciekłego jest większa czy też mniejsza od objętości właściwej fazy stanu stałego), równą polu prostokąta $A_1A'B'B_1$, gdzie punkt B' odpowiada stanowi, w którym ciało znajduje się całkowicie w fazie cieczy, tak że OB_1 jest równe v_c. Praca wykonana wyniesie $p(v_c - v_s)$. Podczas tej odwracalnej przemiany izotermicznej ciało pobierze ilość ciepła $Q = r$, którą nazwiemy c i e p ł e m u t a j o n y m t o p n i e n i a p o d c i ś n i e n i e m p. Gdy ciało zostanie stopione, oziębiamy je w stałej objętości o dT, stykając je ze źródłem ciepła o temperaturze o dT niższej od początkowej temperatury topnienia T_t. Ponieważ różnica temperatur ciała i źródła jest znikomo mała, możemy i tę przemianę uważać za odwracalną. Dla utrzymania jednak, mimo oziębiania, stałej objętości ciała trzeba ciśnienie zewnętrzne zmniejszyć o $dp = BB'$. Ciało, przechodząc ze stanu B' do B, pochłonie ilość ciepła $dQ' = c_{c,v}\,dT$, gdzie $c_{c,v}$ oznacza ciepło właściwe cieczy w stałej objętości. Po oziębieniu ciała zgęszczamy je (w założeniu, że $v_c > v_s$) odwracalnie i izotermicznie w temperaturze $T - dT$ pod stałym ciśnieniem $p - dp$ tak, aby ciało przeszło z powrotem w fazę stanu stałego; ciało odda wtedy ciepło $r - dr = Q - dQ$, praca zaś zewnętrzna wyniesie $(p - dp)(v_c - v_s)$. Gdy całe ciało skrzepnie, co odtworzy punkt A wykresu, ogrzewamy je w stałej objętości z powrotem do temperatury T_t, przy czym ciało pobierze ciepło $dQ'' = c_{s,v}\,dT$, gdzie $c_{s,v}$ oznacza ciepło właściwe fazy stanu stałego w stałej objętości. Różnica ilości ciepła, pobranego i oddanego, $(c_{s,v} - c_{c,v})\,dT$ jest nieskończenie mała w porównaniu z ilością ciepła pobranego $Q = r$ i oddanego $Q - dQ = r - dr$, możemy zatem przyjąć, że ciało pobiera ciepło z jednego tylko źródła ciepła i oddaje tylko jednemu źródłu i że rozpatrywany przez nas zamknięty cykl przemian nieskończenie mało się różni od elementarnego cyklu Carnota. Napiszemy więc

$$\frac{\mathcal{T}}{JQ} = \frac{p(v_c - v_s) - (p - dp)(v_c - v_s)}{Jr} = \frac{dp\,(v_c - v_s)}{Jr} = \frac{T - (T - dT)}{T} = \frac{dT}{T},$$

stąd otrzymujemy

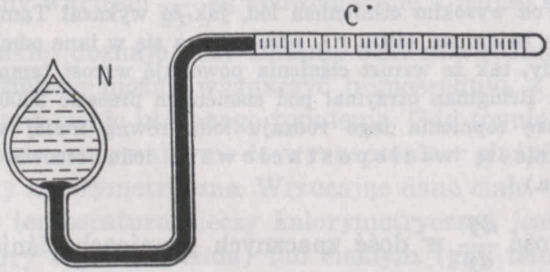
$$\frac{dT}{dp} = T \frac{v_c - v_s}{Jr}, \tag{1}$$

gdzie p jest wyrażone w dyn/cm². Wzór ten, wyznaczający zmianę temperatury topnienia, odniesioną do jednostki zmiany ciśnienia, nazywany jest zazwyczaj równaniem Clapeyrona — Clausiusa.

Równanie to wyprowadził Clapeyron w 1834 r. w odmiennej jednak postaci, niż podana wyżej, a którą nadał Clausius (1850 r.).

Z równania (1) wynika, że, gdy, jak to jest w większości przypadków, ciało w fazie cieczy posiada objętość właściwą większą, niż w fazie stanu stałego, zwiększenie ciśnienia powoduje wzrost temperatury topnienia, tak że ciało już stopione może ze wzrostem ciśnienia przejść w niezmienionej temperaturze w stan stały. Gdy zaś objętość fazy cieczy jest, jak w przypadku wody, mniejsza od objętości właściwej fazy stanu stałego, wzrostowi ciśnienia towarzyszy obniżenie temperatury topnienia; tego rodzaju ciało może na skutek wzrostu ciśnienia przejść w fazę cieczy w temperaturze niższej od temperatury topnienia pod ciśnieniem normalnym.

Do doświadczalnego wyznaczenia ciśnienia, pod którym w danej temperaturze faza cieczy i ciała stałego znajdują się w równowadze termodynamicznej, może służyć, o ile chodzi o ciśnienia niewielkie (mniej więcej do 50 Atm), przyrząd de Vissera (1892 r.), będący



rys. 233

pewną odmianą przyrządu, zbudowanego w tym samym celu przez Bunsena (1857 r.). Badane ciało umieszczone jest w grubościennym szklanym naczyniu N (rys. 233), w którego podstawę wtopiona jest rurka, trzy razy zgięta pod kątem prostym i wypełniona częściowo rtęcią. Pozostałą część rurki wypełnia gaz obojętny, mający prężność

1 Atm, gdy ciało w naczyniu N znajduje się w temperaturze topnienia, odpowiadającej danemu ciśnieniu. Przy zmianie temperatury naczynia N ciśnienie równowagi, ustalające się w naczyniu, można wyznaczyć z przesunięcia słupka rtęci w rurce C, zakładając, że gaz, stale utrzymywany w niezmiennej temperaturze, podlega prawu Boyle'a—Mariotte'a.

Gdy chodzi o ciśnienia wysokie, temperaturę topnienia pod danym ciśnieniem wyznacza się albo z krzywej wzrostu temperatury przy ogrzewaniu ciała pod niezmiennym ciśnieniem albo też, gdy ciało jest stale w tej samej temperaturze, lecz pod zmiennym ciśnieniem, z nagłej zmiany objętości przy powstawaniu drugiej fazy ciała. Tę zmianę objętości stwierdza się, notując przesunięcia tłoka, odpowiadające zwiększaniu ciśnienia; w temperaturze topnienia następuje nagły skok na krzywej, wyrażającej związek między położeniem tłoka i ciśnieniem w naczyniu, zawierającym badane ciało.

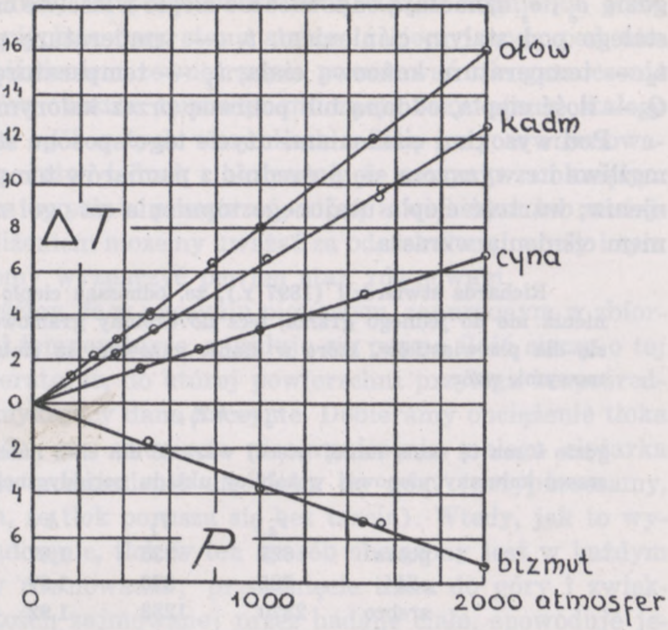
Znając v_c i v_s oraz ciepło utajone topnienia, możemy ze wzoru (1) obliczyć zmianę temperatury topnienia, odniesioną do przyrostu ciśnienia o 1 Atm. Dla wody mamy $v_c - v_s = -0{,}0907$ (rozdz. IX, ust. 5), $r = 79{,}7$ (rozdz. IX, ust. 1). Mierząc ciśnienie nie w dyn/cm², lecz w atmosferach, musimy prawą stronę wzoru (1) pomnożyć przez 1013260, będziemy więc mieli

$$\frac{dT}{dp} = -273 \cdot \frac{0{,}0907 \, . \, 1013260}{4{,}19 \, . \, 10^7 \, . \, 79{,}7} = -0{,}0075 \text{ st./Atm.}$$

Taką też mniej więcej wartość otrzymał Tammann (1900 r.), zmieniając ciśnienie od 1 Atm do 336 Atm.

Pod wysokim ciśnieniem lód, jak to wykazał Tammann, a następnie Bridgman (1912 r.), przekształca się w inne odmiany, gęstsze od wody, tak że wzrost ciśnienia powoduje wzrost temperatury topnienia. Bridgman otrzymał pod ciśnieniem przeszło 20000 Atm temperaturę topnienia tego rodzaju lodu równą mniej więcej 76° C. Obszernie tę wielopostaciowość lodu omówił Dobrowolski (1923 r.).

Wielkość $\frac{dT}{dp}$ w dość znacznych granicach ciśnień posiada dla danego ciała wartość prawie stałą; zależność zatem temperatury topnienia od ciśnienia wyraża się prawie dokładnie linią prostą, jak na wykresie rys. 234, opartym na pomiarach Johnstona i Adamsa (1911 r.), a który podajemy za Jellinekiem; punkt zero na osi rzędnych odpowiada temperaturze topnienia (różnej, oczywiście, dla każdego z badanych ciał) pod ciśnieniem



rys. 234

1 Atm. Na ogół jednak zależność temperatury topnienia od ciśnienia wyraża się linią krzywą, zwróconą zazwyczaj wklęsłą stroną ku osi p.

Zmiany wartości $\frac{dT}{dp}$ są spowodowane z jednej strony przez zmianę, jakiej doznaje przy zmianie ciśnienia różnica $v_c - v_s$, którą to zmianę można wyznaczyć bezpośrednio, z drugiej zaś przez zmianę ciepła utajonego topnienia. Gdy topnienie zachodzi pod ciśnieniem normalnym, do wyznaczenia r służyć mogą zwykłe metody kalorymetryczne. Wrzucając dane ciało w stanie stałym (gdy temperatura cieczy kalorymetrycznej jest wyższa od temperatury topnienia ciała) lub ciekłym (gdy temperatura ta jest niższa od temperatury topnienia) i wyznaczając temperaturę ostateczną, otrzymamy w pierwszym przypadku

$$c_s m (t_t - t_1) + mr + c_c m (t_2 - t_t) = Q, \qquad \text{(a)}$$

w drugim zaś

$$c_c m (t_1 - t_t) + mr + c_s m (t_t - t_2) = Q, \qquad \text{(b)}$$

gdzie c_c i c_s oznaczają odpowiednio ciepło właściwe cieczy i ciała stałego pod stałym ciśnieniem, t_1 — temperaturę początkową, t_2 — temperaturę końcową ciała, t_t — temperaturę topnienia, Q — ilość ciepła, oddaną lub pobraną przez kalorymetr.

Pod wysokimi ciśnieniami użycie tego sposobu staje się niemożliwe i r wyznacza się pośrednio z pomiarów temperatur, topnienia; wartość ciepła utajonego topnienia na ogół ze zwiększeniem ciśnienia wzrasta.

Richards stwierdził (1897 r.), że, odnosząc ciepło utajone topnienia nie do jednego grama, lecz do drobiny gramowej, otrzymuje się dla pierwiastków, które w stanie gazowym są ciałami jednoatomowymi, wzór

$$r_a = k T_t,$$

gdzie k ma tę samą mniej więcej wartość dla ciał, należących do tej samej kolumny pionowej w tablicy układu periodycznego.

	r_a	T_t	k
potas	625	335	1,87
sód	730	370	1,97
srebro	2370	1233	1,92
miedź	2730	1356	2,02

Dla glinu, należącego do kolumny trzeciej i posiadającego ciepło utajone topnienia 80 kal., wyższe od ciepła utajonego topnienia lodu, otrzymujemy na $k = \frac{2168}{T_t}$, gdzie $T_t = 930°\ K$, wartość 2,3.

3. PAROWANIE. PARA NASYCONA

W przeciwieństwie do topnienia, zachodzącego pod danym ciśnieniem tylko w pewnej oznaczonej temperaturze, parowanie tzn. przechodzenie ciała w stan gazowy zachodzi w każdej temperaturze bez względu na wielkość ciśnienia zewnętrznego i na stan skupienia ciała; parują bowiem zarówno ciała stałe, jak i ciekłe. Ciało cieplnie odosobnione lub też otrzymujące z zewnątrz niedostateczną ilość ciepła może mimo to parować kosztem swego własnego ciepła, co nieraz powoduje znaczne obniżenie jego temperatury. W przypadku topnienia jest to niemożliwe: obniżenie choćby nieznaczne temperatury topniejącego ciała nie tylko zatrzymuje proces topnienia, lecz powoduje zestalanie się przynajmniej części fazy cieczy; uwolnione zaś ciepło utajone krzepnięcia wywołuje wzrost temperatury do war-

tości poprzedniej. W przeciwstawieniu więc do topnienia, gdzie odsobnione cieplnie fazy stanu stałego i cieczy mogą pod niezmiennym ciśnieniem zewnętrznym pozostawać nieograniczenie długo w równowadze termodynamicznej, fazy stanu stałego i ciekłego na ogół w tych warunkach z fazą pary w równowadze nie będą. Jeżeli jednak ciało paruje w naczyniu zamkniętym lub gdy para wypełnia przestrzeń, którą z większym lub mniejszym przybliżeniem możemy uważać za odosobnioną, wtedy i tym razem możemy wyznaczyć pewien stan równowagi.

Przypuśćmy, że w naczyniu pionowym, zanurzonym w zbiorniku o stałej temperaturze, znajduje się pewna ilość cieczy o tej samej temperaturze, do której powierzchni przylega bezpośrednio tłok, zamykający dane naczynie. Dobieramy obciążenie tłoka w ten sposób, aby usunięcie nieograniczenie małego ciężarka spowodowało podniesienie się tłoka do góry (przypuszczamy, rzecz prosta, że tłok porusza się bez tarcia). Wtedy, jak to wykaże doświadczenie, tłok w ten sposób obciążony jest w każdym położeniu w równowadze; przesunięcie tłoka do góry i zwiększenie objętości, zajmowanej przez badane ciało, spowoduje jedynie zmniejszanie się masy cieczy i zwiększanie masy pary, której prężność równa ciśnieniu, wywieranemu przez tłok, pozostaje przy wszystkich położeniach tłoka ta sama, dopóki ciecz całkowicie nie wyparuje. Jeżeli tłok w pewnym położeniu zatrzymamy, masy cieczy i pary pozostaną niezmienne, będą więc, zgodnie z podanym w ust. 1 określeniem, w równowadze termodynamicznej. Parę, znajdującą się w równowadze z cieczą, z której powstała, nazywamy p a r ą n a s y c o n ą; prężność jej, jak widzieliśmy, jest niezależna od objętości. Zmniejszanie w stałej temperaturze objętości, zajmowanej przez ciecz i jej parę nasyconą, powoduje skraplanie pary, zwiększanie — wyparowywanie cieczy. Gdy naczynie nie zawiera wcale cieczy, lecz jedynie parę nasyconą, parę nazywamy parą nasyconą s u c h ą. Para ta przy dalszym zwiększaniu objętości zmniejsza swoją prężność, przechodząc w parę n i e n a s y c o n ą lub p r z e g r z a n ą o własnościach tym bardziej zbliżonych do własności gazów, im bardziej prężność jej różni się od prężności pary nasyconej w danej temperaturze.

Para nasycona jest zatem w danej temperaturze parą o największej prężności, której wartość zależy wyłącznie od rodzaju

badanej cieczy i od temperatury równowagi, tak że dla danej cieczy możemy napisać

$$p_r = f(t), \tag{2}$$

gdzie p_r oznacza prężność równowagi. Dla wszystkich bez wyjątku cieczy p_r wzrasta ze wzrostem temperatury.

Do tych samych wniosków dojdziemy, rozpatrując warunki równowagi faz pary i ciała stałego. Na podstawie analogicznie wykonanych doświadczeń, wymagających jednak tym razem znacznie większej dokładności z uwagi na bardzo zazwyczaj niewielką prężność wywiązywanej pary, można stwierdzić, że stanowi równowagi odpowiada oznaczona prężność pary, będąca dla danego ciała funkcją jedynie temperatury, że zmniejszenie w stałej temperaturze objętości, zajmowanej przez ciało stałe i jego parę nasyconą, powodować będzie zestalanie się pary, zwiększanie zaś — wyparowywanie ciała stałego. To zjawisko tzw. sublimacji (łac. sublimare — podnosić), podlegające tym samym prawom, co parowanie cieczy, będzie jednak zawsze zjawiskiem powierzchniowym i pod tym względem różni się od parowania cieczy, która w pewnych warunkach paruje nie tylko na powierzchni, ale również w całej swej objętości.

W pozornej sprzeczności z wypowiedzianym wyżej twierdzeniem stoi zjawisko, zaobserwowane przez H. Kohnównę (1920 r.), że temperatura dodatniego krateru łuku węglowego jest pod danym ciśnieniem otaczającego gazu niezależna od natężenia prądu elektrycznego, że więc zachowuje podobnie, jak temperatura wrzenia cieczy (p. niżej, ust. 4), wartość stałą, bez względu na dopływ ciepła z zewnątrz. Na podstawie jednak doświadczeń Lummera (1914 r.), Fajansa (1925 r.) oraz Egertona i Milforda (1933 r.) można przypuszczać, że mamy tu do czynienia z wrzeniem cienkiej warstewki ciekłego węgla, którego temperatura topnienia wynosi, według Fajansa, około 3500° C. Według Wertensteina i Jędrzejewskiego (1923 r.) temperatura ta jest o przeszło 1500° C wyższa.

4. WRZENIE

Tego rodzaju parowanie nazywamy wrzeniem. Zachodzi ono, jak to wykazał Regnault (patrz. ust. 5), wtedy, gdy prężność pary nasyconej jest równa ciśnieniu zewnętrznemu. Temperatura wrzenia nie posiada przeto dla danej cieczy wartości stałej; ciecz może wrzeć w każdej temperaturze zależnie od ciśnienia, jakiemu podlega.

Ogrzewając ciecz pod stałym ciśnieniem w ten sposób, aby dopływ ciepła był większy od ilości ciepła, zużytego na powierzchniowe parowanie cieczy, otrzymujemy krzywą wzrostu temperatury, podobną do krzywej rys. 227. W pewnej temperaturze (*BD* na rysunku) temperatura cieczy przestaje wzrastać i mimo dopływu ciepła pozostaje stałą, dopóki cała ciecz nie zamieni się w parę. Ta stała temperatura jest temperaturą wrzenia pod danym ciśnieniem.

Jest rzeczą oczywistą, że warunek, aby ciecz przez cały czas doświadczenia pozostawała pod stałym ciśnieniem, spełniony jest tylko wtedy, gdy parowanie zachodzi w naczyniu otwartym, o ile chodzi o wrzenie pod ciśnieniem atmosferycznym, lub też, gdy tworząca się para jest usuwana z przestrzeni, znajdującej się ponad cieczą (np. skraplana w odpowiednio urządzonej chłodnicy), inaczej bowiem ciśnienie, wywierane na ciecz, stopniowo by wzrastało.

Pomiary wykazują, że temperatury wrzenia pod ciśnieniem 1 Atm są dla różnych cieczy różne. Oto temperatury wrzenia kilkunastu ciał:

żelazo (Greenwood, 1909 r.)	2450° C
glin (Greenwood, 1909 r.)	1800° C
cynk (Berthelot, 1902 r.)	918° C
siarka (Chappuis, 1902 r.)	444,5° C
rtęć (Regnault)	357° C
chlor (Knietsch, 1890 r.)	— 37,6° C
ozon (Olszewski, 1885 r.)	— 106° C
tlen (Olszewski, 1885 r.)	— 181,4° C
tlen (Heuse i Otto, 1931 r.)	— 182,963° C
powietrze (Wróblewski, 1885 r.)	— 192° C
azot (Heuse i Otto, 1931 r.)	— 195,814° C
wodór (Heuse i Otto, 1931 r.)	— 252,78° C
hel (Mathias, Kamerlingh Onnes, Crommelin i Swallow, 1925 r.)	— 268,94° C

Często jednak spotykamy się z odstępstwami od tego normalnego przebiegu zjawiska: temperatura cieczy podnosi się powyżej temperatury wrzenia, odpowiadającej danemu ciśnieniu, tak że wrzenie, zazwyczaj nagłe i wybuchowe, rozpoczyna się dopiero w temperaturze o wiele wyższej. W tym przypadku ciecz ma na ogół temperaturę wyższą, niż znajdująca się nad

nią para. To przegrzanie cieczy zachodzi przede wszystkim wtedy, gdy, jak to pierwszy stwierdził de Luc (1772 r.), ciecz nie zawiera w sobie powietrza lub jakiegokolwiek innego gazu; tak np. woda, przez dłuższy czas gotowana, z której w ten sposób zostało usunięte rozpuszczone w niej powietrze, przy powtórnym ogrzewaniu wre dopiero w temperaturze wyższej od 130° C. Późniejsze badania pogląd de Luca potwierdziły: Krebsowi udało się (1866 r.) ogrzać w otwartym naczyniu wodę, nie zawierającą zupełnie powietrza, do 200° C; Dufour wykazał (1863 r.), że woda, ogrzewana pod zmniejszonym ciśnieniem, wre, po usunięciu z niej powietrza, w temperaturze znacznie wyższej (o 20° i więcej) od tej, jaka odpowiada danemu ciśnieniu. Wprowadzenie do przegrzanej cieczy małego pęcherzyka powietrza natychmiast powoduje wrzenie, któremu towarzyszy nagłe obniżenie się temperatury. Pęcherzyk powietrza, w którego pobliżu tworzą się pęcherzyki powstającej wewnątrz cieczy pary, stopniowo, ale bardzo powoli się zmniejsza: Gernez (1875 r.) stwierdził, że 1 mm^3 powietrza podtrzymuje wrzenie w ciągu 24 godzin. Wystarczy więc wrzucić do ogrzewanej cieczy ciało, o znacznej w stosunku do swej objętości powierzchni (piasek, opiłki, kulki szklane), aby przylegająca do niej cieniutka warstwa powietrza usunęła możliwość tego rodzaju przegrzania.

Przegrzanie jednak może być wywołane również przez przyleganie cieczy do ścian naczynia: w naczyniu szklanym, o ścianach dokładnie wyczyszczonych, woda wre, według Marceta (1842 r.) w temperaturze o 6° wyższej, niż w naczyniu metalowym. Podobnie pokrycie powierzchni cieczy dostatecznie grubą warstwą innej cieczy (np. wody oliwą) powoduje, jak to stwierdził Dufour, przegrzanie cieczy.

Szczególnym przypadkiem opóźnienia wrzenia jest tzw. zjawisko Leidenfrosta (1756 r.). Niewielka ilość cieczy, wylana na powierzchnię ciała, ogrzanego do temperatury o wiele wyższej od temperatury wrzenia cieczy, nie wyparowywuje od razu, lecz rozpada się na pojedyncze krople, poruszające się bezładnie po ogrzanej powierzchni. Dopiero znaczniejsze obniżenie temperatury tej powierzchni wywołuje wybuchowe wrzenie cieczy. W tym jednak przypadku nie mamy do czynienia z przegrzaniem cieczy: pojedyncze krople, otoczone, jakby pła-

szczem ochronnym, warstewką wytworzonej na ich powierzchni pary i zabezpieczone w ten sposób od dopływu ciepła z zewnątrz, posiadają temperaturę niższą od temperatury wrzenia.

Temperatura wrzenia cieczy wzrasta również i wtedy, gdy ciecz nie jest chemicznie czysta. Tego zjawiska, stojącego w ścisłym związku z wrzeniem roztworów, rozpatrywać tu nie będziemy.

Zjawisku przegrzania cieczy odpowiada opóźnienie skraplania pary nasyconej suchej, która poddawana w stałej temperaturze ciśnieniu, większemu od prężności równowagi, pozostaje w fazie pary. To przesycenie pary zachodzi wtedy, gdy przestrzeń przez parę zajmowana nie zawiera wcale tzw. jąder kondensacyjnych, którymi mogą być cząstki pyłu, małe kropelki cieczy lub jony gazowe.

5. PRĘŻNOŚĆ PARY NASYCONEJ

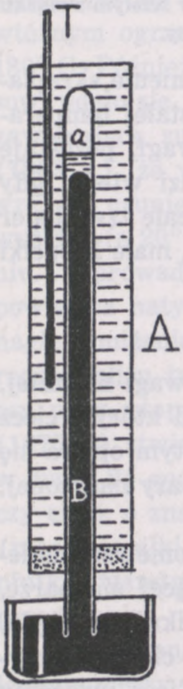
O ile jednak pominiemy te przypadki równowagi niestałej, możemy zawsze uważać ciśnienie zewnętrzne, pod którym ciecz wre, za równe ciśnieniu jej pary nasyconej. Na tym opiera się tzw. dynamiczna metoda wyznaczania prężności pary nasyconej, użyta po raz pierwszy przez Regnaulta.

Temperaturę wrzenia odczytuje się na termometrze, umieszczonym pospolicie nie w cieczy, lecz w tworzącej się parze, dość daleko od powierzchni cieczy, a to dla uniknięcia błędu, spowodowanego zawsze możliwym przegrzaniem cieczy i przylegającej do niej bezpośrednio warstwy pary. Ciecz uważamy za wrzącą, gdy wskazania termometru przez dłuższy czas mimo dopływu ciepła pozostają bez zmiany lub też gdy prędkość parowania nagle znacznie wzrasta.

Metoda ta najczęściej służy do pomiaru prężności w wysokich temperaturach. Do pomiaru w niskich temperaturach używali jej między innymi Olszewski (1887 r. i nast.) i Estreicher (1893 r.).

Podstawową jednak metodą, jakkolwiek dzisiaj rzadziej stosowaną, jest historycznie wcześniejsza metoda statyczna, używana jeszcze przez Daltona (1803) i następnie doprowadzona do możliwej doskonałości w słynnych pracach Regnaulta (1862 r.), a którą podamy tutaj w jej najprostszej postaci. Do próżni Toricelli'ego rurki barometrycznej B (rys. 235), umieszczonej w zbiorniku A o stałej temperaturze, wprowadza się

taką ilość cieczy, aby część jej pozostała w stanie ciekłym. Z różnicy poziomów rtęci w rurce i w szerszym naczyniu można po wprowadzeniu odpowiednich poprawek (na ciśnienie słupka pozostałej cieczy i prężność pary nasyconej rtęci) wyznaczyć bezpośrednio prężność pary nasyconej w danej temperaturze.



rys. 235

Ten sposób, podany przez nas w postaci, nie nadającej się do pomiaru ciśnień, przekraczających 1 Atm, wymaga utrzymania w tej samej temperaturze całej zajmowanej przez parę przestrzeni. Istotnie, przypuśćmy, że jedna ze ścian naczynia posiada temperaturę t_1, niższą od temperatury ścian pozostałych. Para, powstająca w temperaturze $t > t_1$, przy zetknięciu ze ścianą chłodniejszą i przybierając jej temperaturę, skrapla się, wskutek czego para w naczyniu przestaje być nasycona; to znów powoduje dalsze parowanie cieczy i dalsze skraplanie się pary w chłodniejszej części naczynia. Równowaga ustali się dopiero wtedy, gdy cała ciecz przejdzie z gorętszej części naczynia do chłodniejszej i gdy prężność pary nasyconej przybierze wartość, odpowiadającą temperaturze niższej.

Przy użyciu takiej właśnie metody statycznej Regnault udowodnił, że prężność pary nasyconej w danej temperaturze równa jest ciśnieniu zewnętrznemu, pod którym ciecz w tej temperaturze wre.

Wzory empiryczne, w które próbowano ująć wyniki pomiarów, jedynie w przybliżeniu i to najczęściej w zastosowaniu do jednej wybranej cieczy odtwarzają istotny przebieg zjawiska; we wzorach zaś, wyprowadzonych z rozważań teoretycznych, nie udało się dotychczas zastąpić spółczynników stałych, różnych dla różnych cieczy i wyznaczonych na drodze doświadczalnej, wielkościami, które by były w wyraźnym związku z podlegającymi pomiarom własnościami fizycznymi i chemicznymi danej cieczy.

Założenie Daltona (1803 r.), że prężności par nasyconych wszystkich cieczy posiadają tę samą wartość w temperaturach jednakowo odległych od temperatury wrzenia pod ciśnieniem 1 Atm, sprawdza się, jak wykazały pomiary późniejsze, dla niewielu jedynie cieczy. Dühring (1878. r.) ograniczył założenie Daltona, przyjmując,

że stosunek różnic temperatur wrzenia pod danym ciśnieniem i pod ciśnieniem 1 Atm jest dla danych dwu cieczy wielkością stałą.

$$\frac{t_{760} - t_p}{t'_{760} - t'_p} = k, \tag{3}$$

gdzie k jest wielkością, zależną od rodzaju porównywanych cieczy.

Kładąc $k = \frac{T_{760}}{T'_{760}}$ i wprowadzając do wzoru Dühringa stopnie skali bezwzględnej, otrzymamy wzór Ramsaya i Younga (1885 r.)

$$\frac{T_{760}}{T'_{760}} = \frac{T_p}{T'_p}, \tag{3 a}$$

który, istotnie, dobrze się sprawdza w zastosowaniu do ciał chemicznie pokrewnych. Dla różnych chemicznie cieczy Ramsay i Young dają wzór inny

$$\frac{T_{760}}{T'_{760}} = \frac{T_p}{T'_p} - c(T'_{760} - T'_p), \tag{3 b}$$

gdzie c dla różnych cieczy posiada różne wartości, które wyznacza się doświadczalnie.

Można jedynie stwierdzić, że prężności par nasyconych wszystkich bez wyjątku cieczy zwiększają się ze wzrostem temperatury o wiele prędzej, niż prężności gazu o tym samym początkowym ciśnieniu, ogrzewanego w stałej objętości. Tak np. prężność pary nasyconej wody w temperaturze 0° wynosi 4,57 mm rtęci, w temperaturze 50° C — 92 mm rt. i w temperaturze 100° — 760 mm rt.; prężność gazu, wziętego w 0° C pod tym samym ciśnieniem, wynosiłaby w temperaturze 50° C — 5,41 mm rt., w temperaturze 100° C — 6,26 mm rt. Prężność pary nasyconej tlenu wynosi, według Olszewskiego i Estreichera, w temperaturze — 221° C, 7,5 mm rt., w temperaturze — 181,4° C, 1 Atm, podczas gdy prężność gazu, znajdującego się w tych samych warunkach początkowych, wzrosłaby do 13,3 mm rt.

Na tej podstawie Dalton przyjął, że p_r wzrasta w postępie geometrycznym, gdy t wzrasta w postępie arytmetycznym, mamy przeto

$$\log p_r = a + bt \tag{4}$$

Wzór ten nie odtwarza jednak dokładnie wyników pomiarów, tak że Biot zastąpił go (1844 r.) innym, doprowadzonym ostatecznie przez Regnaulta do postaci

$$\log p_r = a + b\,(0{,}9932)^t, \tag{4 a}$$

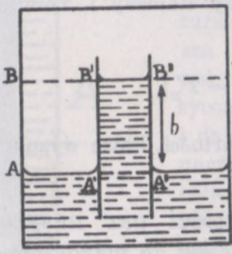
najlepiej, jak się zdaje, odpowiadającej danym doświadczenia.

Stosując zasady termodynamiki, a zwłaszcza twierdzenie Clapeyrona-Clausiusa (ust. 2 i ust. 6), do pary nasyconej i cieczy, Rankine (1866 r.) i niezależnie od niego Dupré wyprowadzili wzór, nazywany często **wzorem Rankine'a-Duprégo**

$$\log p_r = -\frac{a}{T} - b \log T + c, \tag{5}$$

gdzie spółczynniki a i b są dla każdej cieczy inne.

Przytoczone wyżej wzory stosują się do przypadku, gdy powierzchnia cieczy jest płaska, zakrzywienie bowiem powierzchni powoduje zmianę prężności pary nasyconej. Przypuśćmy, że do cieczy, znajdującej się w naczyniu zamkniętym, zawierającym jedynie ciecz i jej parę nasyconą, wstawiliśmy rurkę włoskowatą AB (rys. 236; rurka ta dla jasności rysunku jest nieproporcjonalnie szeroka). Niech prężność pary nasyconej nad powierzchnią $AA'A''$ wynosi p, na poziomie BB''' jest ona mniejsza o ciężar słupa pary o wysokości h, tak, że będziemy mieli



rys. 236

$$p_B = p - h\,\varrho_p\,g, \tag{a}$$

gdzie ϱ_p — gęstość pary. Taką samą prężność musi mieć para i nad meniskiem BB'', gdyby bowiem prężność była tam większa, para poruszałaby się w kierunku prężności mniejszej i skraplała się na płaskiej powierzchni cieczy, w rurce zaś ciecz stale by parowała; równowaga w tych warunkach byłaby niemożliwa, układ stanowiłby wieczny motor, gdyż ruchu pary możnaby było użyć do wykonywania pracy. Z tych samych powodów prężność nad meniskiem nie może być mniejsza od p_B, jest ona przeto równa p_B. Na poziomie $A'A'$ w rurce ciśnienie jest takie samo, jak bezpośrednio pod powierzchnią AA' i $A'A''$, równe więc $\Pi + p$ (por. wzór (c) ust. 6, rozdz. VI). Z drugiej strony, ciśnienie w $A'A'$ równe jest

$$\Pi + p_B + h\,\varrho_c + \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

gdzie ϱ_c gęstość cieczy. Mamy zatem

$$p_B = p - h\,\varrho_c\,g - \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right). \tag{b}$$

Wyznaczając h ze wzoru (a) i podstawiając do (b), otrzymujemy

$$p_B = p + \frac{\varrho_p}{\varrho_c - \varrho_p}\,\sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{6}$$

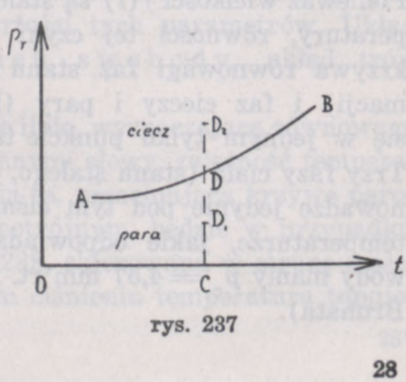
gdzie r_1 i r_2 są dodatnie, gdy są skierowane do wewnątrz cieczy, w przypadku więc przedstawionym na rys. 236, gdzie ciecz zwilża rurkę, $p_B < p$. Prężność pracy nasyconej cieczy, mającej kształt kro-

pli, jest tym większa w porównaniu z prężnością nad powierzchnią płaską, im mniejszy jest promień kropli; wobec czego w danej temperaturze małe krople pochłaniane są przez większe. Ta wielka prężność pary kropel tworzących się, a więc o bardzo małym promieniu, jest jedną z przyczyn, może najważniejszą, wspomnianego wyżej przesycenia pary.

Ciśnienie równowagi jest, jak to wykazał Dalton, na ogół niezależne od ciśnienia zewnętrznego, pod jakim ciecz się znajduje, posiada zatem wartość tę samą wtedy, gdy ciecz paruje do próżni, jak i wtedy, gdy paruje do przestrzeni, wypełnionej przez gazy obojętne. Obecność tych gazów wpływa jedynie na prędkość parowania, zmniejszającą się w miarę wzrostu ciśnienia, wywieranego przez gazy. Gdy jednak ciśnienie to jest znaczne, prężność równowagi ma wartość większą, niż normalnie, jak to stwierdzili Le Châtelier (1892 r.), J. J. Thomson i Sziller (1896 r.), a jak to ostatnio potwierdzili Pollitzer i Strebel (1924 r.), mierząc prężność pary nasyconej wody w atmosferze powietrza, wodoru i bezwodnika węglowego, przy czym ciśnienie gazów dochodziło do 200 kg/cm².

Zjawisko parowania w atmosferze gazu obojętnego jest zjawiskiem bardzo złożonym. Przy parowaniu w niewielkim naczyniu zamkniętym pod niewysokim ciśnieniem zewnętrznym prężność pary nasyconej bywa często mniejsza od prężności w próżni. Regnault, który pierwszy (1845 r.) stwierdził ten fakt, objaśnił go skraplaniem się pary na ścianach naczynia w ilości większej od powstającej jednocześnie z cieczy. Doświadczenia Golicyna (1890 r.) potwierdziły to objaśnienie, z drugiej jednak strony wykazały, zgodnie z wynikami wcześniejszych doświadczeń Brauna (1888 r.), że prężność pary w gazie obojętnym może być czasami większa od prężności w próżni. Na podstawie doświadczeń, zwłaszcza Wüllnera i Grotriana (1888 r.), należy przypuszczać, że mamy tu do czynienia z przesyceniem pary.

Przypuśćmy, że w rozpatrywanym przez nas przypadku prężność równowagi jest dokładnie oznaczoną funkcją temperatury; odkładajmy prężność tę na osi rzędnych, odpowiednie zaś temperatury na osi odciętych. Otrzymamy krzywą *AB* (rys. 237), oddzielającą dziedziny cieczy i gazu. Załóżmy,



rys. 237

że udało nam się w jakiś sposób zwiększyć prężność pary nasyconej do wartości CD_2. Para o tej prężności nie może być w równowadze z cieczą, będzie się ona przeto skraplała dopóty, dopóki prężność jej nie zmniejszy się do CD. Pod ciśnieniem większym od CD w danej temperaturze może istnieć jedynie faza cieczy. Odwrotnie, gdy prężność pary spadnie do wartości CD_1, para przestanie być nasyconą, ciecz będzie parowała, dopóki prężność nie wzrośnie do wartości CD. Pod ciśnieniem mniejszym od CD ciało posiada jedynie fazę pary. Obiedwie fazy mogą być w równowadze jedynie pod ciśnieniami, odpowiadającymi punktom krzywej AB. Przekroczeniu tej krzywej do góry odpowiada skraplanie pary, na dół — parowanie cieczy.

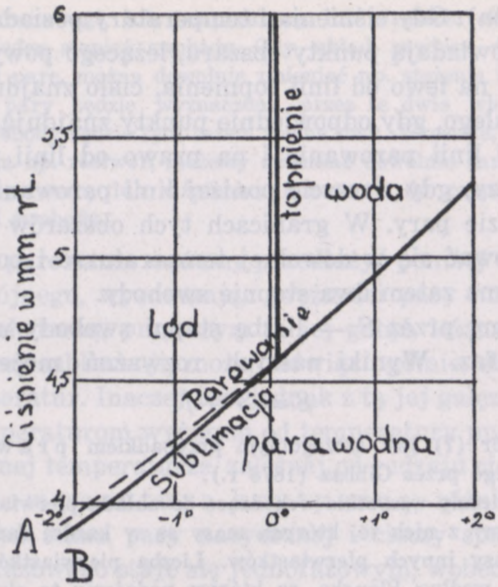
Znając kształt krzywej $p_r = f(t)$, można z pomiaru prężności równowagi wyznaczyć temperaturę równowagi. Jest to najczęściej używany sposób wyznaczania bardzo niskich temperatur (w pobliżu 1° K). Cieczą używaną w tym przypadku jest hel, temperaturę wyznacza się, ekstrapolując funkcję $f(t)$, otrzymaną z pomiarów w temraturach wyższych.

Podobną krzywą moglibyśmy również wykreślić dla stanów równowagi fazy ciała stałego i pary, gdyż i wtedy, jak o tym była mowa wyżej, obowiązuje wzór $p_r = f(t)$. Niech $p_{s,g}$ oznacza prężność równowagi w tym ostatnim przypadku, $p_{c,g}$ — prężność równowagi faz cieczy i pary, punkt przecięcia się krzywych $p_{s,g} = f_{s,g}(t)$ i $p_{c,g} = f_{c,g}(t)$ musi czynić zadość równości

$$p_{s,g} = p_{c,g}$$

lub inaczej $$f_{s,g}(t) = f_{c,g}(t).$$

Ponieważ wielkości $f(t)$ są stale wzrastającymi funkcjami temperatury, równości tej czyni zadość jedna tylko wartość t: krzywa równowagi faz stanu stałego i pary (krzywa sublimacji) i faz cieczy i pary (krzywa parowania) przecinają się w jednym tylko punkcie tzw. p u n k c i e p o t r ó j n y m. Trzy fazy ciała (stanu stałego, cieczy i pary) mogą być w równowadze jedynie pod tym ciśnieniem pary nasyconej i w tej temperaturze, jakie odpowiadają punktowi potrójnemu. Dla wody mamy $p_r = 4{,}57$ mm rt. i $t_p = 0{,}0075$ (rys. 238, według Bruhata).



rys. 238

Jedynym, jak dotychczas, znanym ciałem, nie posiadającym punktu potrójnego jest hel. Keesom, zestalając hel, stwierdził (1926 r.), że hel ciekły, oziębiany pod ciśnieniem swej pary nasyconej, pozostaje aż do najniższych możliwie temperatur w fazie cieczy; krzywa parowania nie przecina się zatem wcale z krzywą sublimacji.

W przeciwstawieniu więc do układu o dwu fazach, gdzie można dla danej wartości ciśnienia zawsze dobrać taką temperaturę, aby układ był w równowadze, lub też odwrotnie, do danej temperatury odpowiednią wartość prężności, gdzie więc jedną z wielkości, wyznaczających stan równowagi, można było wybrać dowolnie, w układzie o trzech fazach stan równowagi jest możliwy przy jednej tylko wartości tych parametrów. Układ dwufazowy ma jeden s t o p i e ń s w o b o d y, układ trójfazowy — żadnego.

Przeprowadźmy na wykresie linię, wyznaczającą równowagę faz stanu stałego i cieczy, lub, innymi słowy, zależność temperatury topnienia od ciśnienia. Linia ta, przecinająca krzywe parowania i sublimacji w punkcie potrójnym, będzie w przypadku wody, przedstawionym na rys. 238, skierowana w stronę malejących temperatur (ze wzrostem ciśnienia temperatura topnie-

nia się obniża). Gdy ciśnienia i temperatury posiadają wartości, którym odpowiadają punkty obszaru, leżącego powyżej krzywej sublimacji i na lewo od linii topnienia, ciało znajduje się w fazie stanu stałego, gdy odpowiednie punkty znajdują się w obszarze powyżej linii parowania i na prawo od linii topnienia — w fazie cieczy, gdy wreszcie poniżej linii parowania i sublimacji — w fazie pary. W granicach tych obszarów każda z faz może znajdować się w dowolnej temperaturze i pod dowolnym ciśnieniem, ma zatem dwa stopnie swobody.

Oznaczmy przez S — liczbę stopni swobody układu, przez f — liczbę faz. Wyniki naszych rozważań możemy wyrazić wzorem

$$S = 3 - f \tag{7}$$

Wzór (7) jest szczególnym przypadkiem p r a w a f a z, udowodnionego przez Gibbsa (1876 r.).

Policzmy wszystkie wchodzące do układu pierwiastki chemiczne i wyłączmy z nich te, których masy są w każdej fazie wyznaczone przez masy innych pierwiastków. Liczba pierwiastków pozostałych da nam, według Plancka, za którym podajemy to określenie, liczbę s k ł a d n i k ó w n i e z a l e ż n y c h. Tak np. wodny roztwór soli kuchennej składa się z czterech pierwiastków: wodoru, tlenu, sodu i chloru. Z nich jednak tylko dwa (np. wodór i sód) są niezależne: masy tlenu znajdują się zarówno w lodzie, jak wodzie lub parze, w oznaczonym stosunku do masy wodoru, podobnie masa chloru do masy sodu.

Prawo faz Gibbsa, które podamy tu bez dowodu, sprowadza się do dwu następujących twierdzeń. 1. Liczba faz w układzie, znajdującym się w równowadze, może co najwyżej o dwa przewyższać liczbę p składników niezależnych

$$f \leqslant p + 2 \tag{7 a}$$

W przypadku więc jednego składnika (woda np.) faz może być co najwyżej trzy: fazy stanu stałego, cieczy i pary danego ciała; w przypadku roztworu soli w wodzie (dwa składniki) faz jest co najwyżej cztery: roztwór, sól, lód i para.

2. Liczba stopni swobody wyraża się wzorem

$$S = p + 2 - f \tag{7 b}$$

Tak np. w przypadku roztworu równowaga między fazami stałymi ciała rozpuszczonego i rozpuszczalnika, fazą ciekłą (roztwór) i fazą pary nasyconej, jest możliwa tylko w oznaczonej temperaturze, pod oznaczonym ciśnieniem pary nasyconej i przy oznaczonym stężeniu; liczba stopni swobody jest równa zeru. Gdy mamy do czynienia z trzema tylko fazami: sól, roztwór nasycony i para nad nim, możemy zmieniać albo stężenie roztworu, które wtedy wyznaczy temperaturę i ci-

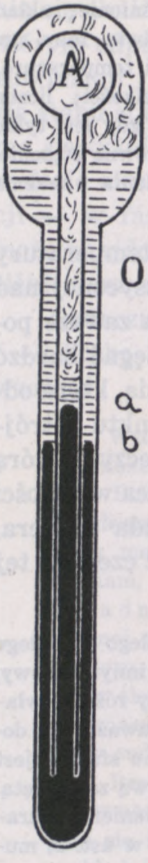
śnienie równowagi, lub temperaturę, lub wreszcie ciśnienie; układ posiada jeden stopień swobody. Gdy układ zawiera dwie fazy, np. roztwór i parę, można dowolnie zmieniać np. stężenie i temperaturę, prężność pary będzie wyznaczona przez te dwie wielkości; liczba stopni swobody będzie tym razem równa dwu. Wreszcie, gdy jest tylko jedna faza np. roztwór, możemy zmieniać dowolnie zarówno stężenie, jak i temperaturę lub ciśnienie; mamy tu do czynienia z trzema stopniami swobody.

Krzywą parowania możemy przedłużyć poniżej temperatury punktu potrójnego, wyznaczając prężności pary nasyconej nad cieczą przechłodzoną, przy czym ta jej gałąź, leżąca zawsze powyżej krzywej sublimacji, może, mówiąc ogólnie, sięgać bardzo niskich temperatur. Inaczej jest jednak z tą jej gałęzią, która odpowiada temperaturom wyższym od temperatury punktu potrójnego: w pewnej temperaturze, zależnej od rodzaju cieczy, a którą nazywamy *temperaturą krytyczną*, różnica własności fizycznych faz stanu pary nasyconej i cieczy spada do zera, układ z dwufazowego staje się jednofazowym, wobec czego w tej temperaturze krzywa się urywa.

Zagadnienie, czy krzywa równowagi faz stanu stałego i ciekłego również się urywa w pewnej temperaturze, czy więc, innymi słowy, istnieje również i taka temperatura, w której zanikałyby różnice własności fizycznych faz stanu stałego i ciekłego, należy uważać za dotychczas nierozwiązane. Według Tammanna obszar stanu stałego jest obszarem zamkniętym, krzywa więc równowagi jest krzywą zamkniętą. Gdyby tak było, temperatura topnienia, ze wzrostem ciśnienia wzrastająca dla wszystkich ciał, z wyjątkiem wymienionych w ust. 2, musiałaby przechodzić pod pewnym ciśnieniem przez maximum i następnie się obniżać. Doświadczenia Brigdmanna, w których ciśnienie dochodziło do 20000 kgc/cm^2, nie wykazały w żadnym przypadku istnienia takiego maximum. Z prac teoretycznych van Laara (1924—1927) wynika, że temperatura topnienia dąży ze wzrostem ciśnienia do pewnej wartości granicznej, w której zarówno ciepło utajone topnienia, jak i zmiana objętości właściwej przy topnieniu miałyby wartość zero.

6. GĘSTOŚĆ PARY NASYCONEJ. CIEPŁO UTAJONE PAROWANIA

Istnienie takiej temperatury krytycznej stwierdzają przede wszystkim pomiary gęstości pary nasyconej. Z licznych metod wyznaczania tej gęstości opiszemy tu tylko metodę Fairbairna i Tate'a (1861 r.). Zasadniczą część przyrządu, używanego przy tym pomiarze, stanowią dwa naczynia A i O (rys. 239); rurka,



rys. 239

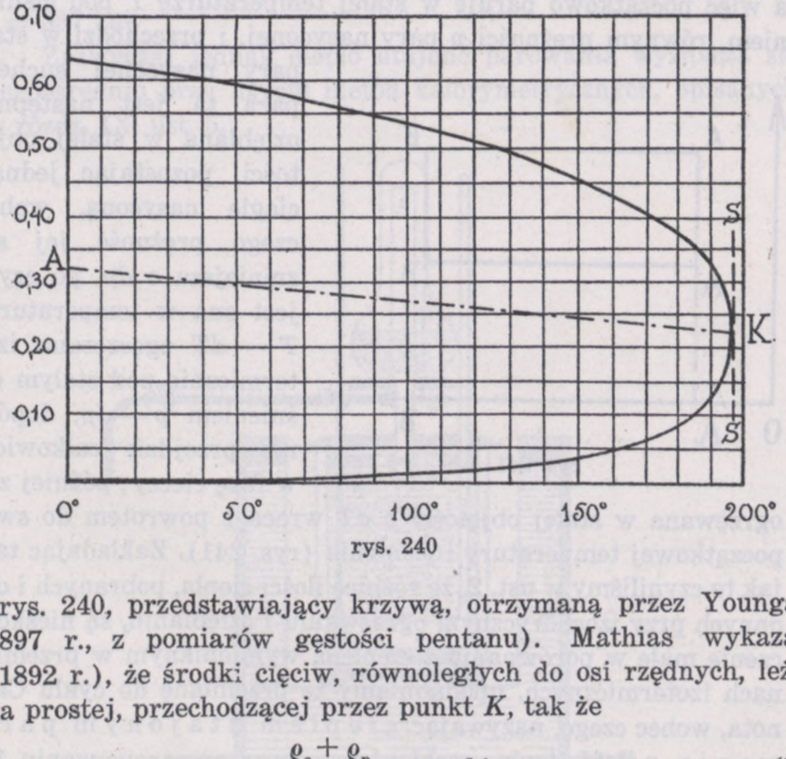
wychodząca z naczynia *A* i otwarta u dołu, zanurzona jest w rtęci, wypełniającej dolną część zamkniętej rurki, połączonej z naczyniem *O*. Naczynie *A* zawiera pewną, niewielką ilość badanej cieczy, naczynie *O* tę samą ciecz w nadmiarze. Dopóki ponad cieczami w obydwu naczyniach znajduje się para nasycona, różnica ciśnień, wyznaczona przez różnicę poziomów rtęci w rurkach jest równa różnicy ciśnień słupów cieczy, znajdujących się ponad poziomami *a* i *b*; wobec niewielkiej masy cieczy w naczyniu wewnętrznym i wielkiej stosunkowo masy w naczyniu zewnętrznym można przyjąć, że jest ona stała i równa ciśnieniu słupa cieczy w *O*. Gdy ciecz w naczyniu *A* wyparuje całkowicie, para w tym naczyniu przy dalszym ogrzewaniu przejdzie w stan pary nienasyconej; prężność jej, wzrastająca mniej więcej tak, jak prężność gazów, będzie stale mniejsza od prężności pary nasyconej, wypełniającej naczynie *O* i ogrzanej do tej samej temperatury; rtęć w rurce wewnętrznej zacznie się od tej chwili stale podnosić. Wyznaczając temperaturę, w której słupek rtęci zaczyna zmieniać swój poziom, i znając objętość, jaką zajmuje para w naczyniu *A* i części rurki wewnętrznej oraz masę wprowadzonej do *A* cieczy, można obliczyć gęstość pary nasyconej suchej w danej temperaturze.

Gęstość pary nasyconej wzrasta wraz z temperaturą, wobec czego przy podwyższaniu temperatury różnica gęstości cieczy i pary nasyconej stopniowo się zmniejsza. Tak np. dla wody otrzymujemy (według Davisa, 1910 r. oraz Cailleteta i Colardeau, 1892 r.)

temperatura	gęstość wody ϱ_c	gęstość pary nasyconej ϱ_p
0°	0,9999	0,000005
50°	0,9881	0,00008
100°	0,9584	0,0006
150°	0,9173	0,0026
200°	0,8628	0,0079

temperatura	gęstość wody ϱ_c	gęstość pary nasyconej ϱ_p
250°	0,794	0,020
300°	0,7	0,046
365°	0,329	

Odkładajmy na osi odciętych temperatury, na osi rzędnych gęstości cieczy i jej pary nasyconej w tej samej temperaturze; otrzymamy, jak to stwierdzili w doświadczeniach, wykonanych z bezwodnikiem siarki, Cailletet i Mathias (1887 r.), dwie krzywe, schodzące się ze sobą w punkcie, w którym styczna do otrzymanej w ten sposób krzywej jest równoległa do osi rzędnych



rys. 240

(rys. 240, przedstawiający krzywą, otrzymaną przez Younga, 1897 r., z pomiarów gęstości pentanu). Mathias wykazał (1892 r.), że środki cięciw, równoległych do osi rzędnych, leżą na prostej, przechodzącej przez punkt K, tak że

$$\frac{\varrho_c + \varrho_p}{2} = a - bt, \tag{8}$$

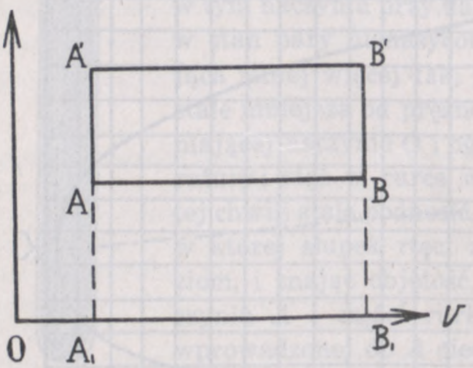
gdzie spółczynniki stałe a i b mają dla różnych cieczy wartości różne. To prawo średnicy prostoliniowej zostało następnie potwierdzone między innymi przez Younga i Tho-

masa (1892 r.) oraz później przez Kamerlingh Onnesa i Crommelina.

Young stwierdził jednak wyraźne odstępstwa od tego prawa w przypadku pewnych alkoholów, Mathias zaś, Kamerlingh Onnes, Crommelin i Swallow (1925 r.) pewne niewielkie odchylenia w pobliżu temperatury krytycznej w przypadku helu, neonu i argonu oraz Mathias, Crommelin i Watts (1929) — etylenu.

Zmniejszanie się różnicy gęstości cieczy i pary nasyconej jest w związku ze zmianą wartości, jakiej doznaje ciepło utajone parowania przy wzroście temperatury.

Przypuśćmy, że 1 g badanej cieczy podlega odwracalnej przemianie zamkniętej, analogicznej do rozpatrywanej w ust. 2, a więc początkowo paruje w stałej temperaturze T pod ciśnieniem, równym prężności p pary nasyconej, i przechodzi w stan pary nasyconej suchej; para ta jest następnie oziębiana w stałej objętości, pozostając jednak ciągle nasyconą, wobec czego prężność jej się zmniejsza o dp, po czym jest ona w temperaturze $T - dT$ zgęszczana izotermicznie pod stałym ciśnieniem $p - dp$, dopóki nie przejdzie całkowicie w fazę cieczy; później zaś ogrzewana w stałej objętości o dT wraca z powrotem do swej początkowej temperatury i ciśnienia (rys. 241).



rys. 241

Zakładając tak, jak to czyniliśmy w ust. 2, że różnice ilości ciepła, pobranych i oddanych przy izochorycznym ogrzewaniu i oziębianiu, są nieskończenie małe w porównaniu z ciepłem, wymienianym w przemianach izotermicznych, upodabniamy tę przemianę do cyklu Carnota, wobec czego, nazywając c i e p ł e m u t a j o n y m p a r o w a n i a r ilość ciepła, pochłoniętego przy wyparowywaniu 1 g cieczy pod ciśnieniem, równym prężności jej pary nasyconej w danej temperaturze, otrzymujemy wzór Clapeyrona-Clausiusa

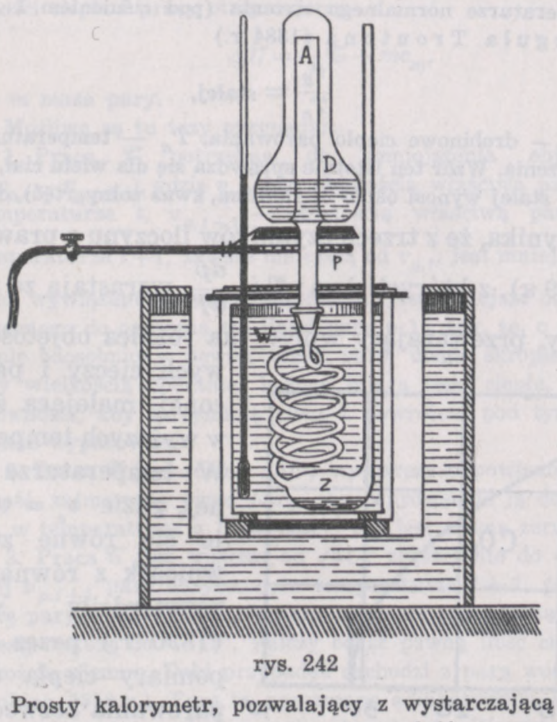
$$\frac{dp(v_p - v_c)}{Jr} = \frac{dT}{T}, \tag{9}$$

w którym v_p oznacza objętość właściwą pary nasyconej, v_c — objętość właściwą cieczy. Stąd otrzymujemy

$$r = \frac{1}{J} T (v_p - v_c) \frac{dp}{dT}. \tag{9 a}$$

Znając wartości $\frac{dp}{dT}$, które wyznacza się z krzywych równowagi cieczy i pary nasyconej, i różnice objętości właściwych, można ze wzoru (9 a) obliczyć r w danej temperaturze T. Tak np. dla wody w temperaturze 100°, przyjmując $\frac{dp}{dT}$ za równe w tej temperaturze 27,189 mm rt. na stopień (Zeuner), $v_p - v_c$ około 1665 cm^3/g, otrzymujemy (wyrażając ciśnienie w dyn/cm^2) $r = 537$ kal.

Zazwyczaj jednak ciepło utajone parowania wyznacza się bezpośrednio przy użyciu metod kalorymetrycznych, opisanych w rozdz. IX, ust. 5.



rys. 242

Prosty kalorymetr, pozwalający z wystarczającą dokładnością wyznaczyć ciepło utajone parowania w dość znacznych granicach temperatur, zbudował (1877 r.) M. Berthelot. Para powstająca w kol-

bie D, częściowo wypełnionej badaną cieczą i ogrzewana palnikiem P w kształcie pierścienia, przechodzi przez otwartą na końcu rurkę A do wężownicy W i zbiornika Z, połączonego rurką z otaczającym powietrzem. Kahlenberg zastąpił (1901 r.) palnik drutem platynowym, przez który przechodzi prąd elektryczny, drut ten umieszczony jest wewnątrz cieczy.

Pomiary te stwierdziły, że ciepło utajone parowania zmniejsza się ze wzrostem temperatury.

Z licznych wzorów empirycznych, przy których pomocy próbowano ustalić związek między wartością r i temperaturą parowania przytoczymy jedynie wzór Regnaulta dla wody, jako mający pewne znaczenie historyczne

$$r = 606{,}5 - 0{,}695\, t. \qquad (10)$$

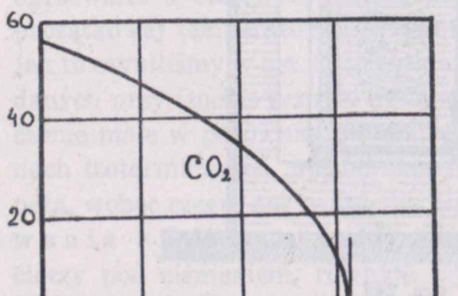
Wzór ten daje na r w temperaturze 0° C wartość 606,5, większą od tej, którą dzisiaj uważamy za najprawdopodobniejszą, a mianowicie 596,8 kal (Dieterici, 1889 r.), w temperaturze zaś 100° C wartość 537 kal, niewiele się różniącą od wartości 538,1, otrzymanej przez Richardsa i Mathewsa (1911 r.).

Wartość ciepła utajonego, odniesionego do 1 drobiny gramowej, w temperaturze normalnego wrzenia (pod ciśnieniem 1 Atm) daje tzw. reguła Troutona (1884 r.)

$$\frac{r_d}{T_n} = \text{stałej}, \qquad (11)$$

gdzie r_d — drobinowe ciepło parowania, T_n — temperatura normalnego wrzenia. Wzór ten istotnie sprawdza się dla wielu ciał, przy czym wartość stałej wynosi około 21 (anilina, kwas solny, rtęć), dla wody 26.

Stąd wynika, że z trzech czynników iloczynu z prawej strony równania (9 a), z których dwa: T i $\frac{dp}{dT}$ wzrastają ze wzrostem temperatury, przeważający wpływ ma różnica objętości właściwych cieczy i pary nasyconej, malejąca stopniowo w wyższych temperaturach. W temperaturze krytycznej, gdzie $v_c = v_p$, r staje się równe zeru. Ten wniosek z równania (9 a) potwierdziły wykonane (1890 r.) przez Mathiasa pomiary ciepła utajonego parowania bezwodnika węglowego. Wyniki jego po-



rys. 243

miarów odtwarza wykres rys. 243; w temperaturze krytycznej, równej dla tego ciała 31,5° C, krzywa przecina oś odciętych, przy czym zmniejszanie się ciepła utajonego,odniesione do jednego stopnia wzrostu temperatury, $\frac{dr}{dT}$ staje się w miarę przybliżania się do temperatury krytycznej coraz to większe, tak, że w tej temperaturze styczna do krzywej przecina oś odciętych pod kątem prostym.

6a. CIEPŁO WŁAŚCIWE PARY NASYCONEJ.

Nazwijmy za Clausiusem **ciepłem właściwym pary nasyconej** c_m (ciepło właściwe stałej masy pary) ilość ciepła, potrzebną do ogrzania 1 g pary nasyconej o 1° C, tak, aby para podczas i po ogrzewaniu pozostawała nasyconą. Możemy to osiągnąć, zwiększając odpowiednio ciśnienie zewnętrzne i zmniejszając objętość, zajmowaną przez parę. Oznaczmy przez $\mathcal{T}$ pracę zewnętrzną, wykonaną w tych warunkach, przez ΔU różnicę energii wewnętrznej pary nasyconej w temperaturze t i temperaturze $t+1$. Z zasady równoważności ciepła i pracy otrzymujemy

$$\Delta U = \frac{1}{J}\mathcal{T} + mc_m, \tag{12}$$

gdzie m masa pary.

Możliwe są tu trzy przypadki:

1. Praca $\mathcal{T}$ potrzebna do zmniejszenia objętości pary o $m(v_{p,t} - v_{p,t+1})$, gdzie $v_{p,t}$ jest objętością właściwą pary nasyconej w temperaturze t, $v_{p,t+1}$ — objętością właściwą pary nasyconej w temperaturze $t+1$, zawsze mniejszą od $v_{p,t}$, jest mniejsza od $\frac{1}{J}\Delta U$. Ciepło, wywiązane podczas zgęszczania, jest mniejsze od ilości ciepła potrzebnego do ogrzania tej ilości pary o 1°, tak, że, o ile układ jest cieplnie odosobniony, pewna część pary ulega skropleniu; c_m jest wtedy wielkością dodatnią, będącą miarą tego ciepła, które należy doprowadzić, aby otrzymaną ciecz z powrotem pod tym samym ciśnieniem wyparować.

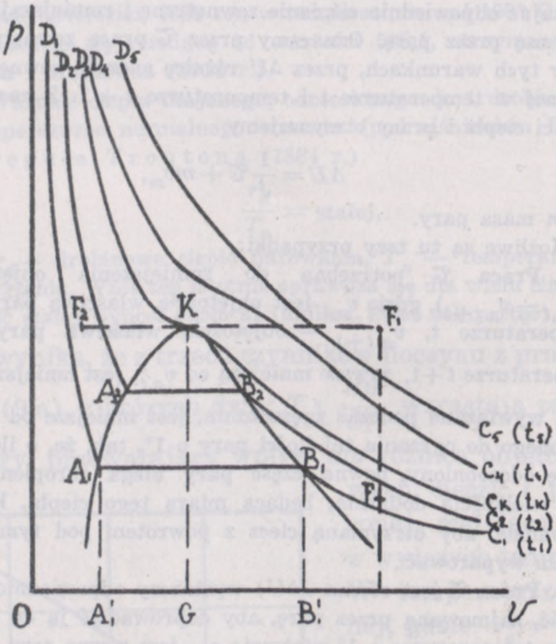
2. Praca $\mathcal{T}$ jest równa $J\Delta U$; wystarczy odpowiednio zmniejszyć objętość, zajmowaną przez parę, aby doprowadzić ją do stanu nasycenia w temperaturze o 1° wyższej; c_m jest równe zeru.

3. Praca $\mathcal{T}$ jest większa od $J\Delta U$; zgęszczenie do objętości właściwej $v_{p.t+1}$ pary nasyconej, w temperaturze $t+1$, podnosi temperaturę pary o więcej, niż 1°; para staje się przegrzaną; aby obniżyć jej temperaturę do $t+1°$, należy odjąć pewną ilość ciepła; c_m jest wielkością ujemną. Taki przypadek zachodzi z parą wodną (Clausius i Rankine, 1850 r.). Para ta, zgęszczana adiabatycznie, staje się przegrzaną, rozprężana adiabatycznie, skrapla się. W temperaturze 0° C c_m osiąga niezwykle wysoką wartość bezwzględną: —1,908; w tem-

peraturach wyższych ma bezwzględne wartości niższe. Inaczej zachowuje się eter etylowy (Hirn, 1863 r.), którego c_m jest dodatnie; para nasycona eteru, zgęszczana adiabatycznie, skrapla się, rozprężana adiabatycznie, staje się przegrzaną. Wreszcie ciecze takie, jak chloroform, w niskich temperaturach zachowują się, jak woda, w wyższych, jak eter; tego rodzaju ciała w pewnej temperaturze (chloroform w 125° C, Cazin, 1866 r.) mają c_m równe zeru.

7. WYKREŚLNE PRZEDSTAWIENIE WŁASNOŚCI PAR I GAZÓW. WYZNACZANIE ELEMENTÓW KRYTYCZNYCH

Przypuśćmy, że 1 g cieczy o temperaturze t_1, parując pod ciśnieniem pary nasyconej w tej temperaturze, przechodzi w parę nasyconą suchą. Na wykresie, odniesionym do osi pv (rys. 244), przemianę tę odtworzy prosta A_1B_1, równoległa do



rys. 244

osi v, której długość równa jest różnicy objętości właściwej pary nasyconej i objętości właściwej cieczy pod ciśnieniem pary nasyconej A_1A_1'. Przy dalszym zwiększaniu objętości w tej samej temperaturze para nasycona przejdzie w parę przegrzaną, której prężność będzie się odpowiednio zmniejszała. Krzywa B_1C_1, odtwarzająca tę przemianę, tym bardziej zbliżać się będzie do

krzywej Boyle'a - Mariotte'a, im para będzie dalsza od nasycenia. Gdy teraz weźmiemy 1 g pary nienasyconej o temperaturze t_1 pod ciśnieniem o wiele mniejszym od prężności równowagi, wtedy zgęszczaniem izotermicznym pod coraz to większym ciśnieniem możemy doprowadzić ją do stanu nasycenia (punkt B_1), następnie skroplić pod stałym ciśnieniem i wreszcie, zwiększając coraz bardziej ciśnienie, zmniejszać stopniowo objętość otrzymanej w ten sposób cieczy. Izoterma składa się zatem z trzech części: pierwsza D_1A_1 wyraża związek między ciśnieniem i objętością ciała, znajdującego się w fazie cieczy, druga A_1B_1 odpowiada dwufazowemu stanowi układu, gdy objętość, zajmowana przez układ pod danym ciśnieniem, zależy od stosunku mas fazy cieczy i pary, wreszcie trzecia B_1C_1 odtwarza zmiany objętości, spowodowane zmianami ciśnienia, jakich doznaje układ o jednej fazie — pary.

Podczas wyparowywania cieczy suma mas cieczy i pary nasyconej jest, oczywiście, zawsze równa 1 g. Niech w pewnej chwili objętość układu wynosi v, mamy

$$v = m_c v_c + m_p v_p,$$

co, w związku z równaniem

$$m_c + m_p = 1,$$

pozwala, gdy znane są objętości właściwe cieczy i pary nasyconej oraz objętość układu, wyznaczyć masę cieczy i masę pary.

W temperaturze wyższej t_2 objętość właściwa cieczy, jak również prężność pary nasyconej będą miały wartości większe, niż w temperaturze t_1, wobec czego punkt A_2, odpowiadający fazie cieczy pod ciśnieniem równowagi, będzie na wykresie leżał wyżej i bardziej na prawo od punktu A_1; punkt zaś B_2, odpowiadający stanowi pary nasyconej suchej o objętości właściwej mniejszej, niż w temperaturze t_2, będzie leżał bardziej na lewo, tak że długość odcinka A_2B_2 będzie mniejsza, niż A_1B_1. Poza tym jednak izoterma t_2 będzie miała kształt podobny do izotermy t_1. Przechodząc do coraz to wyższych temperatur, otrzymamy izotermy podobne o coraz to krótszych odcinkach poziomych, znikających ostatecznie w temperaturze krytycznej, gdy $v_c = v_p$, tak że izoterma tej temperatury posiada jedynie punkt przegięcia K. Krzywe $A_1A_2 \dots A$ i $B_1B_2 \dots B_n$ złączą się ze sobą w punkcie K izotermy krytycznej, odpowiadającym punktowi, w którym średnica krzywej Mathiasa przecina krzywe gęstości.

Podobnie, jak różnice objętości właściwych, zmniejszają się ze wzrostem temperatury i znikają całkowicie w temperaturze krytycznej różnice innych własności cieczy i pary nasyconej; powyżej tej temperatury mamy zawsze do czynienia z jedną tylko fazą ciała. Istnienie dwu faz — cieczy i pary — w stanie równowagi możliwe jest tylko w warunkach, którym czynią zadość punkty obszaru, leżącego wewnątrz krzywej $A_1A_2KB_2B_1$; we wszystkich innych przypadkach ciało istnieje tylko w jednej fazie. W tym pozostałym jednofazowym obszarze można jednak wyróżnić trzy odrębne części: pierwszą z nich stanowi obszar, zawarty między osią rzędnych, krzywą A_1A_2K i częścią izotermy krytycznej D_3K. Gdy punkt, wyobrażający stan układu, leży w tym obszarze, możemy nie zmieniając temperatury, lecz jedynie, zmniejszając ciśnienie, spowodować powstanie w układzie drugiej fazy. Zgodnie z przyjętą przez nas terminologią, stan ten nazywamy stanem ciekłym i obszar, którego granice podaliśmy wyżej, — odtwarzającym stan ciekły ciała. Podobnie z obszaru, ograniczonego krzywą KB_2B_1 i częścią izotermy krytycznej KC_K, można przejść, nie zmieniając temperatury, lecz jedynie zwiększając ciśnienie, do obszaru dwufazowego, a więc tak, jak w przypadku poprzednim, wywołać powstanie w układzie drugiej fazy; obszar ten nazywamy obszarem pary. Z obszaru jednak trzeciego, leżącego powyżej izotermy krytycznej, nie możemy bez obniżenia temperatury przejść do obszaru dwufazowego; obszar ten nazywamy obszarem gazu.

Te trzy różne stany: pary nienasyconej, gazu i cieczy nie są jednak dokładnie odgraniczone. Ciało, znajdujące się w jednym z tych stanów, możemy zawsze przeprowadzić w stan inny tak, aby własności jego zmieniały się w sposób ciągły i aby układ zawierał w ciągu całej przemiany tylko jedną fazę. W tym celu wystarczy omijać obszar dwufazowy. Tak np. ogrzewając w stałej objętości parę nienasyconą znajdującą się w stanie F do temperatury wyższej od temperatury krytycznej, zamieniamy ją w gaz F_1, który po oziębieniu pod stałym ciśnieniem przechodzi poniżej temperatury krytycznej w ciecz F_2. W czasie tej przemiany cała masa badanego ciała jest stale jednorodna, układ więc ma stale jedną fazę, którą poniżej temperatury krytycznej pod niskimi ciśnieniami uważamy za fazę pary, pod

wysokimi — za fazę cieczy, powyżej zaś temperatury krytycznej — za fazę gazu.

Na istnienie temperatury, powyżej której pod żadnym ciśnieniem nie mogą istnieć w równowadze fazy cieczy i pary, zwrócił uwagę już w 1824 r. Cagniard de la Tour; do tego samego wniosku doszedł Faraday (1848 r.); Mendelejew nazwał ją (1860 r.) temperaturą bezwzględnego wrzenia; całkowicie jednak wyjaśnił jej znaczenie dopiero Andrews (1869 r.), opierając się na wynikach, otrzymanych z badania ściśliwości dwutlenku węgla w różnych temperaturach.

Wartości temperatury krytycznej t_K, prężności krytycznej p_K, będącej największą możliwie prężnością pary nasyconej, i objętości krytycznej v_K, równej najmniejszej objętości, jaką może zajmować 1 g pary nasyconej, nazywamy e l e m e n t a m i k r y t y c z n y m i. Wyznaczyć je możemy albo pośrednio, badając związek między ciśnieniem i objętością w różnych temperaturach (przy użyciu np. przyrządu, zbudowanego przez Witkowskiego, 1896 r.), wykreślając izotermy i stąd, zazwyczaj przez ekstrapolację, wyznaczając temperaturę t_K, w której znika prostoliniowa część izotermy, a następnie obliczając związane z nią wartości p_K i v_K, lub też bezpośrednio.

Najdawniejszą z metod, służących do bezpośredniego wyznaczania temperatury krytycznej, jest metoda optyczna Cagniard de la Toura. Badane ciało, umieszczone w grubościennym naczyniu szklanym, jest ogrzewane (o ile znajduje się początkowo w temperaturze niższej od krytycznej) lub oziębiane (o ile znajduje się w temperaturze wyższej od krytycznej), dopóki nie zniknie przy ogrzewaniu lub nie powstanie przy oziębianiu menisk, oddzielający ciecz od pary nasyconej. Temperatura, w której zjawisko to zachodzi, jest, o ile menisk znika lub powstaje w środkowej części naczynia, temperaturą krytyczną. Warunek co do miejsca powstawania meniska jest warunkiem koniecznym; wymaga on napełnienia naczynia taką ilością cieczy (lub gazu), aby objętość mv_K była dokładnie równa objętości naczynia. Wtedy przemiana zachodzi wzdłuż prostej *GK* (rys. 244), ciało bowiem jest ogrzewane (lub oziębiane) w stałej objętości.

Przydatność tej metody do wyznaczenia temperatury krytycznej i granice jej stosowalności poddali obszernym rozważaniom, między innymi, Stoletow (1892 r.), który dokładnie rozpatrzył warunki po-

wstawania i zanikania meniska, Wróblewski (1886 r.), Olszewski (1895 r.), W. Natanson (1895 r.) i Centnerszwer (1903 r.), później zaś Kamerlingh Onnes, Dorsman i Holst.

Drugą metodą jest metoda Cailleteta i Colardeau (1891 r.), oparta na niezależności prężności pary nasyconej od objętości, a więc i od masy pary. Jeżeli będziemy ogrzewali w naczyniu zamkniętym dostatecznie wielkie masy cieczy, wtedy dopóki temperatura nie przekroczy temperatury krytycznej, prężność pary, znajdującej się ponad cieczą w stanie nasycenia, będzie niezależna od użytej masy cieczy; krzywa $p = f(t)$ będzie identyczna dla różnych mas cieczy. Powyżej temperatury krytycznej para zamienia się w gaz, którego prężność jest funkcją gęstości, a więc dla różnych mas, zawartych w tej samej objętości, ma wartości różne; każdej masie odpowiada inna krzywa zależności prężności od temperatury. Temperatura, w której krzywe te zaczynają się rozchodzić, jest temperaturą krytyczną.

Prostotą wyróżnia się metoda, użyta (1931 r.) przez Bonda i Williamsa. Rurka, zawierająca ciecz i mogąca się obracać dookoła osi poziomej, zawieszona jest na ramieniu wagi tak, aby oś jej tworzyła kąt 20° z poziomem. Gdy przy oziębianiu temperatura dochodzi do wartości krytycznej, powstająca w dolnej części rurki ciecz narusza ustaloną poprzednio równowagę.

Wyżej podane metody mogą służyć również do wyznaczenia p_K i v_K (z wyjątkiem metody Cailleteta i Colardeau, pozwalającej wyznaczyć jedynie t_K i p_K). Dokładniejsze jednak wyniki daje wyznaczanie objętości krytycznej z krzywej Mathiasa (ust. 6); znając temperaturę krytyczną i przedłużając średnicę krzywej do przecięcia z rzędną, wystawioną w punkcie osi odciętych, odpowiadającym tej temperaturze, znajdujemy gęstość krytyczną ϱ_K i stąd v_K.

Wyczerpujące zestawienie metod, służących do wyznaczania elementów krytycznych dał Klemensiewicz (1913 r.).

8. SKRAPLANIE GAZÓW

Dopóki temperatura krytyczna danego ciała niewiele różni się od temperatury normalnej, przeprowadzenie ciała ze stanu gazu w stan cieczy i pary nasyconej nie nastręcza zbyt wielkich trudności. Wystarczy wtedy łatwe do urzeczywistnienia obniżenie temperatury ciała poniżej temperatury krytycznej i podda-

nie otrzymanej pary nienasyconej zgęszczaniu izotermicznemu, które doprowadzi ją do stanu pary nasyconej i wreszcie do skroplenia. Toteż ciała takie, jak bezwodnik siarki, o temperaturze krytycznej 157° C, chlor, o temperaturze krytycznej 146° C, amoniak, o temperaturze krytycznej 132,3° C, siarkowodór, o temperaturze krytycznej 100,4° C, bezwodnik węgla, o temperaturze krytycznej 31,5° C zostały skroplone stosunkowo łatwo. Trudności rozpoczynają się dopiero wtedy, gdy temperatura krytyczna leży znacznie poniżej 0° C.

Faraday pierwszy wskazał (1845 r.), że wyparowywanie cieczy pod niskim ciśnieniem pozwala w wielu przypadkach otrzymać dostatecznie niskie temperatury. Tę metodę opracował Pictet (1877 r.), nie otrzymując jednak przy jej użyciu żadnych dodatnich wyników.

Metodą tą posługiwali się częściowo Wróblewski i Olszewski (1883 r.) dla otrzymania ciekłego tlenu ($t_K = -118{,}8°$ C, Olszewski 1885 r.), azotu ($t_K = -146{,}0°$ C, Olszewski 1884 r.) i tlenku węgla ($t_K = -139{,}5°$ C, Olszewski 1884 r.). Obecnie używany jest najczęściej cykl następujący: chlorek metylu, skroplony pod ciśnieniem 5 Atm w temperaturze pokojowej, parując pod ciśnieniem paru centymetrów rtęci, oziębia się do —70° C, co wystarcza do skroplenia pod niewielkim ciśnieniem etylenu ($t_K = 9{,}5°$ C, $p_K = 50{,}7$ Atm), który, parując pod zmniejszonym ciśnieniem, obniża swą temperaturę do —150° C. Ta temperatura jest niższa zarówno od temperatury krytycznej tlenu, jak i azotu. Skraplając te gazy i wyparowując je pod małym ciśnieniem, można otrzymać temperaturę —220° C. To jednak nie wystarcza do skroplenia wodoru ($t_K = -240{,}8°$ C, Olszewski, 1905 r.) i helu ($t_K = -267{,}97°$ C, Kamerlingh Onnes i jego współpracownicy, 1925).

Od wartości t_K wodoru, wyznaczonej doświadczalnie przez Olszewskiego, nie wiele się różni wartość, do której prowadzą pomiary ściśliwości wodoru, wykonane przez Wróblewskiego przed samą jego śmiercią (1886 r.) i nie opracowane przez niego ostatecznie; obliczona na podstawie rozważań teoretycznych przez W. Natansona (1895 r.) wartość —234° C jest prawie identyczna z otrzymaną w pierwszych pomiarach (1895 r.) przez Olszewskiego wartością —234,5° C. Dzieje skroplenia gazów, będących składnikami powietrza, ze szczególnym uwzględnieniem prac polskich fizyków opracował K. Zakrzewski (1933 r.).

Metoda stopniowego obniżania temperatur przez wyparowywanie, tzw. „kaskadowa“, wymaga zatem uzupełnienia metodą inną, użytą początkowo przez Cailleteta (1877 r.), który przy jej pomocy otrzymał tlen w postaci pary nasyconej, i polegającą na nieodwracalnym rozprężaniu adiabatycznym gazu. W swej pierwotnej postaci metoda ta na ogół się nie utrzymała, została ona zastąpiona przez inną, w której prężności gazu zarówno przed rozprężeniem, jak i po rozprężeniu zachowują wartości stałe, w której zatem obniżenie temperatury jest spowodowane przez zjawisko Joule'a - Thomsona (rozdz. IX, ust. 10).

Ten sposób oziębiania znalazł zastosowanie w przyrządach Lindego i Hampsona (1896 r.), mogących skraplać znaczne stosunkowo ilości powietrza. Otrzymywanie dostatecznie niskich temperatur zostało ułatwione przez zastosowanie tzw. przeciwprądu (Siemens, 1857 r.), polegającego na ochładzaniu gazu napływającego przez gaz już rozprężony i oziębiony; w ten sposób początkowa temperatura gazu, poddawanego rozprężaniu, stopniowo się obniża.

W przemyśle chłodniczym używany jest obecnie motor Claude'a, w którym powietrze, rozprężając się, wykonywa pracę; i w tym jednak przypadku obniżenie temperatury jest zbyt małe, aby jednorazowym rozprężeniem powietrza o normalnej początkowo temperaturze można było otrzymać je w stanie cieczy, wobec czego i tu stosuje się stopniowe oziębianie przeciwprądem.

Tej metody, opracowanej zresztą, o ile chodzi o wodór, wcześniej przez Olszewskiego, użył Dewar (1898 r.), oziębiając wodór pod ciśnieniem 180 Atm do temperatury —205° C (znacznie niższej od jego temperatury odwrócenia, rozdz. IX, ust. 10) i następnie rozprężając go do 1 Atm. W większych ilościach otrzymał wodór Olszewski, używając zbudowanego przez siebie przyrządu, analogicznego do przyrządu Hampsona. Skroplenie wodoru pozwala otrzymać temperatury, leżące znacznie niżej od temperatury odwrócenia helu (—173° C), wobec czego można i do helu zastosować przemianę Joule'a-Thomsona. Na tej drodze skroplił (1908 r.) hel Kamerlingh Onnes.

Z badań Keesoma i Wolfkego (1928 r.) wynika, że hel w stanie ciekłym może być w dwu różnych stanach, różniących się gęstością, ciepłem utajonym parowania i napięciem powierzchniowym; zamiast więc zwykłego punktu potrójnego (ust. 5) — fazy stanu stałego, cieczy i pary — hel posiada punkt potrójny: ciecz I, ciecz II i para.

Wcześniej jeszcze zostały skroplone: argon ($t_K =$ $= -122,4°$ C) przez Olszewskiego, neon zaś (t_K około $-218°$ C), krypton ($t_K = -62,5$ C) i ksenon ($t_K = 14,7°$ C) przez Ramsaya i Traversa.

9. RÓWNANIE VAN DER WAALSA

Rozważania ustępów poprzednich doprowadziły do wniosku, że przejście ciała ze stanu gazu w stan pary lub cieczy może zachodzić w sposób ciągły, tak że w chwili przejścia własności fizyczne gazu, pary nienasyconej i cieczy mogą się zmieniać nieograniczenie mało. Związek zatem między parametrami p, v, t, wyznaczającymi stan ciała, musi być dla tych stanów skupienia ten sam.

Dla gazu pod niskim ciśnieniem i w wysokiej stosunkowo temperaturze związek ten, jak wiemy, wyznacza równanie gazów doskonałych (rozdz. VIII, ust. 4). Wiemy jednak również, że równanie to obowiązuje jedynie wtedy, gdy można całkowicie pominąć siły spójności oraz gdy objętość, jaką gaz zajmowałby pod nieograniczenie wielkim ciśnieniem zewnętrznym, jest znikomo mała w porównaniu z objętością, jaką gaz zajmuje w danych warunkach. W rzeczywistości poza ciśnieniem zewnętrznym masa gazu poddana jest jeszcze ciśnieniu wewnętrznemu p_w, spowodowanemu przez działające w gazie siły spójności, objętość zaś gazu nigdy nie może być zmniejszona do wartości nieograniczenie małej; pod bardzo wielkimi ciśnieniami dąży ona nie do wartości zero, jakby to wynikało z równania gazów doskonałych, lecz do wartości skończonej b, zależnej zresztą, podobnie, jak p_w, od rodzaju ciała. Należy zatem przypuszczać, że równanie gazów posiada raczej postać następującą

$$(p + p_w)(v - b) = RT. \qquad (13)$$

Van der Waals, który pierwszy taką postać nadał (1881 r.) równaniu gazów, przyjął, opierając się na założeniach teoretycznych, których tu rozpatrywać nie będziemy, $p_w = \frac{a}{v^2}$, gdzie a wielkość stała, zależna od rodzaju gazu. Podstawiając tę wartość do wzoru (13), otrzymujemy **równanie van der Waalsa**

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT, \tag{13 a}$$

na ogół dobrze odtwarzające przebieg zjawisk przy zgęszczaniu i ogrzewaniu gazów.

Przy znacznym rozrzedzeniu, gdy v ma wartość bardzo wielką, tak że $\frac{a}{v^2}$ jest bliskie zeru, b zaś jest w porównaniu z v bardzo małe, otrzymujemy równanie gazów doskonałych

$$pv=RT;$$

R ma zatem w równaniu van der Waalsa wartość taką, jaką podaliśmy na str. 335, gdy masę gazu wyznaczamy w drobinach gramowych m_d, lub równą $\frac{R}{m_d}=R_1$ (por. str. 376), gdy masę gazu wyznaczamy w gramach.

W przypadku, gdy ciśnienie zewnętrzne jest tego samego rzędu wielkością, co wewnętrzne, v zaś jest znacznie większe od b, mamy w stałej temperaturze

$$pv+\frac{a}{v}=\text{stałej}$$

lub

$$pv=C-\frac{a}{v}. \tag{13 b}$$

W miarę wzrostu ciśnienia objętość gazu się zmniejsza, iloraz $\frac{a}{v}$ się zwiększa, wobec czego iloczyn pv maleje.

Gdy v ze wzrostem ciśnienia staje się coraz mniejsze, tak że b nie można już odrzucić, otrzymujemy po otwarciu nawiasów

$$pv+\frac{a}{v}-bp-\frac{ab}{v^2}=\text{stałej}. \tag{13 c}$$

Pod bardzo wielkimi ciśnieniami objętość właściwa gazu ulega niewielkim zmianom przy wzroście ciśnienia; wartość jej coraz bardziej zbliża się do wartości granicznej b. Możemy zatem przyjąć, że

$$-\frac{a}{v}+\frac{ab}{v^2}=K=\text{stałej}$$

i

$$pv=K+bp, \tag{13 d}$$

iloczyn więc pv wzrasta ze wzrostem ciśnienia. Jeżeli więc wzrost ciśnienia powoduje początkowo zmniejszanie się iloczynu pv, następnie zaś nieograniczone jego wzrastanie, musi

istnieć takie ciśnienie p_m, pod którym pv ma wartość najmniejszą. Ten wniosek z równania van der Waalsa znajduje, jak wiemy, całkowite potwierdzenie w doświadczeniu (rozd. VI, ust. 8).

Objętość właściwą gazu v_1 pod ciśnieniem p_m w danej temperaturze T możemy wyznaczyć z warunku, że wtedy pochodna $\frac{d(pv)}{dp}$ równa jest zeru. Z równania (13 c) otrzymujemy

$$\frac{d(pv)}{dp} = b - \frac{2ab}{v^3}\frac{dv}{dp} + \frac{a}{v^2}\frac{dv}{dp};$$

podstawiając $\frac{dv}{dp}$, obliczone z równania (13 a)

$$\frac{dv}{dp} = \frac{v^3(v-b)^2}{2a(v-b)^2 - v^3RT},$$

znajdujemy

$$\frac{d(pv)}{dp} = \frac{av(v-b)^2 - bv^3 . RT}{2a(v-b)^2 - v^3RT} = 0$$

skąd

$$a(v-b)^2 - bv^2RT = 0$$

lub

$$\left(\frac{v-b}{v}\right)^2 = \left(1 - \frac{b}{v}\right)^2 = \frac{RTb}{a}$$

i

$$\frac{b}{v} = 1 \mp \sqrt{\frac{RTb}{a}}.$$

Ponieważ objętość właściwa v_1 pod ciśnieniem p_m musi być większa od b, odrzucamy znak + i piszemy

$$v_1 = \frac{b}{1 - \sqrt{\frac{RTb}{a}}}.$$

Wartość v_1 jest, oczywiście, dodatnia, wobec tego i

$$1 - \sqrt{\frac{RTb}{a}} > 0$$

a więc

$$\frac{RTb}{a} < 1$$

i

$$T < \frac{a}{Rb}.$$

Iloczyn pv przechodzi przez wartość najmniejszą tylko w takich temperaturach, które czynią zadość tej nierówności. Im mniejsze jest a, tym górna granica tych temperatur jest niższa. Dla wodoru leży ona, jak o tym była mowa w ust. 8, rozdz. VI, o wiele niżej od temperatury normalnej; należy więc przypuszczać, że dla wodoru a ma znacznie mniejszą wartość, niż dla innych gazów.

Znając elementy krytyczne danego gazu możemy wyznaczyć stałe spółczynniki równania van der Waalsa: a, b i R, z warunku, że punkt K izotermy krytycznej jest punktem przegięcia. Po wykonaniu odpowiednich rachunków znajdujemy

$$T_K = \frac{8a}{27bR}; \quad p_K = \frac{a}{27b^2}; \quad v_K = 3b \tag{14}$$

skąd

$$a = 3v_K^2 p_K \quad b = \frac{1}{3} v_K \quad R = \frac{8}{3} \frac{v_K p_K}{T_K}. \tag{15}$$

Z równania van der Waalsa, które możemy przepisać w postaci

$$v^3 - \left(\frac{RT}{p} + b\right) v^2 + \frac{a}{p} v - \frac{ab}{p} = 0$$

wynika, że danym wartościom p i T czynią zadość na ogół trzy wartości v. W temperaturach wyższych od temperatury krytycznej tylko jedna z tych wartości jest rzeczywista: izoterma tylko w jednym punkcie przecina prostą równoległą do osi v. Gdyby bowiem przecinała w dwu lub trzech punktach mielibyśmy dla pewnych wartości v pochodną $\frac{dp}{dv} = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} = 0$. Gdy T jest wielkie, pierwszy wyraz jest bardzo wielki w porównaniu z drugim; dla wszystkich wartości v funkcja $\frac{dp}{dv}$ ma znak taki sam, jak wyraz pierwszy, nigdy zatem nie przejdzie przez wartość zero.

W punkcie krytycznym K zarówno $\frac{dp}{dv}$, jak i $\frac{d^2p}{dv^2}$ są równe zeru; wszystkie trzy pierwiastki równania są rzeczywiste i wzajemnie równe. W punkcie tym mamy

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{RT_K}{(v_K - b)^2} + \frac{2a}{v_K^3} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{RT_K}{(v_K - b)^2} = \frac{2a}{v_K^3} \tag{a}$$

oraz

$$\frac{d^2p}{dv^2} = \frac{2RT_K}{(v_K - b)^3} - \frac{6a}{v_K^4} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{RT_K}{(v_K - b)^3} = \frac{3a}{v_K^4}. \tag{b}$$

Dzieląc równanie (a) przez (b), znajdujemy

$$v_K - b = \frac{2}{3} v_K, \quad \text{skąd} \quad v_K = 3b.$$

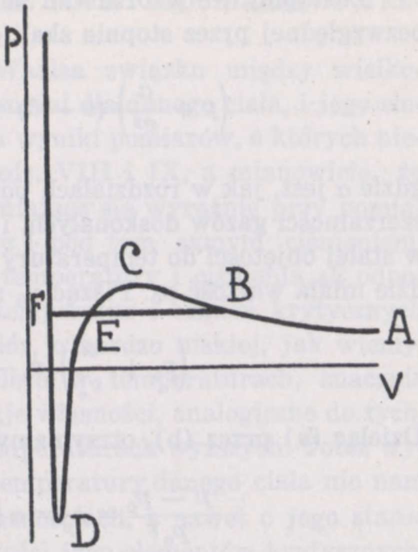
Podstawiając tę wartość do równania (a) i rozwiązując je względem T_K, otrzymujemy

$$T_K = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb}$$

i wreszcie po podstawieniu wartości v_K i T_K do równania (13a) znajdujemy

$$p_K = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2}.$$

Poniżej temperatury krytycznej wszystkie trzy pierwiastki są rzeczywiste i nierówne. Mamy zatem dwie wartości v, dla których $\frac{dp}{dv}$ w stałej temperaturze równe jest zeru. Dwa krańcowe punkty przecięcia izotermy z prostą, równoległą do osi v możemy uważać za odpowiadające objętościom właściwym cieczy i pary nasyconej pod tym samym ciśnieniem równowagi. Wtedy zawarta między nimi część izotermy leży w obszarze dwufazowym: cieczy i pary nasyconej. W tym obszarze izoterma powinna mieć, jak wiemy, kształt linii prostej, równoległej do osi v; izoterma zaś van der Waalsa (rys. 245) wyznacza związek między ciśnieniem i objętością, jaki by zachodził, gdyby w tym obszarze było możliwe przejście w sposób ciągły ze stanu cieczy w stan gazu. Części jej *FD* i *BC* odpowiadają możliwym do urzeczywistnienia stanom fizycznym: cieczy pod ciśnieniem mniejszym od ciśnienia równowagi (*FD*) i pary przesyconej (*BC*); część *DC*, odpowiadająca przemianie, podczas której wzrostowi objętości towarzyszy wzrost ciśnienia, nie może wyrażać stanu równowagi stałej.



rys. 245

Ze wzorów (14) wynika, że wielkość

$$K = \frac{R\,T_K}{v_K p_K}$$

powinna mieć dla wszystkich ciał tę samą wartość, równą $\frac{8}{3} = 2{,}66$. W rzeczywistości tak nie jest: dla wszystkich ciał bez wyjątku K jest większe od 2,66 wahając się od 4,12 dla amoniaku do 3,00 dla kryptonu (według zestawienia Pickeringa, 1927 r.). Wzór zatem van der Waalsa, odtwarzając dokładnie przebieg zjawisk, nie wystarcza jednak do wyznaczenia wartości parametrów gazów rzeczywistych. O granicach, w jakich można go stosować, da nam pewne pojęcie obliczenie spółczynnika rozprężliwości α_p.

Zastąpmy we wzorze van der Waalsa stopnie temperatury bezwzględnej przez stopnie skali gazowej

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \frac{R}{\alpha}(1 + \alpha t), \tag{a}$$

gdzie α jest, jak w rozdziałach poprzednich, spółczynnikiem rozszerzalności gazów doskonałych, i przypuśćmy, że gaz oziębiamy w stałej objętości do temperatury 0°, w której prężność jego będzie miała wartość p_0. Pisząc v_0 zamiast v, mamy

$$\left(p_0 + \frac{a}{v_0^2}\right)(v_0 - b) = \frac{R}{\alpha}. \tag{b}$$

Dzieląc (a) przez (b), otrzymamy po odpowiednich przeróbkach

$$\frac{p - p_0}{p_0 t} = \alpha_p = \alpha\left(1 + \frac{a}{p_0 v_0^2}\right). \tag{c}$$

Spółczynnik rozprężliwości jest zawsze większy od α, co, jak wiemy, jest zgodne z wynikami pomiarów (rozdz. VIII, ust. 4). W miarę jednak, jak ciśnienie p_0 maleje, a więc v_0 staje się tak wielkie, że $\frac{a}{p_0 v_0^2}$ możemy przyjąć za równe zeru, α_p zbliża się asymptotycznie do wartości α. Gdy ciśnienie wzrasta, iloczyn $p_0 v_0^2 = p_0 v_0 . v_0$ początkowo maleje, α_p więc wzrasta (rys. 205); pod bardzo wysokimi ciśnieniami $p_0 v_0$ zaczyna wzrastać, v_0 zaś niewiele się zmniejsza ze wzrostem ciśnienia, wobec czego α_p albo nieco maleje albo też zachowuje wartość stałą.

Ze wzoru (c) wynika, że α_p jest wielkością niezależną od temperatury. Pomiary Witkowskiego (rozdz. VIII, ust. 4) udowodniły jednak, że tak nie jest. Należy zatem przypuszczać, że spółczynnik a nie jest wielkością stałą, lecz funkcją temperatury. Wprowadzając tę poprawkę, Clausius nadał równaniu van der Waalsa postać następującą

$$\left[p + \frac{a}{T(v + c)^2}\right](v - b) = RT, \tag{16}$$

gdzie a, b, c są wielkościami stałymi, charakterystycznymi dla danego ciała.

10. STANY ODPOWIADAJĄCE SOBIE. PODOBIEŃSTWO TERMODYNAMICZNE

Ustalenie przez van der Waalsa związku między wielkościami stałymi, charakterystycznymi dla danego ciała, i jego elementami krytycznymi wyjaśnia wyniki pomiarów, o których niejednokrotnie była mowa w rozdz. VIII i IX, a mianowicie, że różnice własności gazów, ujawniające się wyraźnie przy pomiarach w tej samej temperaturze i pod tym samym ciśnieniem, znacznie się zmniejszają, gdy temperatury i ciśnienia są odpowiednio dobrane do wartości temperatur i ciśnień krytycznych badanych gazów. Tak np. wodór, o bardzo niskiej, jak wiemy, temperaturze krytycznej, dopiero w temperaturach, znacznie niższych od normalnej, wykazuje własności, analogiczne do tych, jakie inne gazy posiadają w temperaturach wyższych. Toteż wyznaczenie ciśnienia, objętości i temperatury danego ciała nic nam w istocie nie powie o jego własnościach, a nawet o jego stanie skupienia, gdy nie znamy wartości jego elementów krytycznych. Gdybyśmy jednak zamiast dotychczas przez nas używanych jednostek wprowadzili inne, związane z wartościami elementów krytycznych danego ciała, możnaby się spodziewać, że parametry stanu, wyrażone w tych nowych jednostkach, odpowiadałyby analogicznym własnościom fizycznym wszystkich ciał, bez względu na ich rodzaj.

Nazwijmy za van der Waalsem j e d n o s t k a m i s p e c y f i c z n y m i wartości elementów krytycznych danego ciała, p a r a m e t r a m i zaś s p e c y f i c z n y m i wartości ciśnienia π, objętości φ i temperatury ϑ, wyrażone w tych jednostkach. Będziemy zatem mieli

$$\vartheta = \frac{T}{T_K}; \quad \pi = \frac{p}{p_K} \quad \text{i} \quad \varphi = \frac{v}{v_K}, \tag{17}$$

gdzie ϑ, π, φ są liczbami o wymiarze równym jedności.

Podstawiając do równania (13 a) zamiast p, v, T parametry specyficzne, otrzymamy

$$\left(p_K \pi + \frac{a}{v_K^2 \varphi^2}\right)(v_K \, . \, \varphi - b) = R T_K \vartheta,$$

skąd, po uwzględnieniu wzorów (15), znajdziemy

$$\left(\pi + \frac{3}{\varphi^2}\right)(3\varphi - 1) = 8\vartheta \tag{18}$$

tzw. **zredukowane równanie** van der Waalsa, nie zawierające stałych a, b, R.

Odkładając na osi odciętych objętości specyficzne, na osi rzędnych ciśnienia specyficzne, otrzymamy identyczne izotermy dla wszystkich gazów o tych samych specyficznych temperaturach, a więc również i tę samą dla wszystkich gazów zależność między temperaturą specyficzną i ciśnieniem specyficznym π_m, przy którym $\pi\varphi$ ma wartość najmniejszą (twierdzenie Wróblewskiego).

Stany ciał, wyrażone tymi samymi wartościami parametrów specyficznych, nazywamy **stanami odpowiadającymi sobie**; równanie zaś zredukowane uważamy za wyraz **podobieństwa termodynamicznego** między tymi stanami.

Proste stosunkowo rozważania, których tu przytaczać nie będziemy, doprowadziłyby nas do wyznaczenia ciśnienia specyficznego pary nasyconej, jej specyficznej objętości właściwej, jak również specyficznej objętości właściwej cieczy, jako funkcji temperatury specyficznej

$$\pi_r = f_1(\vartheta), \quad \varphi_p = f_2(\vartheta); \quad \varphi_c = f_3(\vartheta).$$

Zależności zatem tych trzech wielkości, wyrażonych w jednostkach specyficznych, od temperatury specyficznej są dla wszystkich ciał jednakowe. Rugując ϑ z tych równań, otrzymalibyśmy

$$\pi_r = f(\varphi_p, \varphi_c),$$

a więc tę samą dla wszystkich ciał zależność specyficznej prężności równowagi od specyficznych objętości właściwych pary nasyconej i cieczy.

Należy zaznaczyć, że do analogicznego wyniku doszlibyśmy również i wtedy, gdybyśmy równanie van der Waalsa zastąpili innym, byleby to nowe równanie zawierało tylko trzy stałe spółczynniki. Istotnie, niech równanie to ma kształt

$$f(p, v, T, a, b, R) = 0.$$

Warunek, że w punkcie K, $\frac{dp}{dv}$ i $\frac{d^2p}{dv^2}$ równe są zeru, prowadzi do wyznaczenia stałych a, b, R w funkcji elementów krytycznych, tak że równanie przybierze kształt

$$f\left(\frac{p}{p_K}, \frac{v}{v_K}, \frac{T}{T_K}\right) = f(\pi, \varphi, \vartheta) = 0.$$

Można jednak z góry przewidzieć, że tego rodzaju równania zredukowane jedynie w przybliżeniu będą czyniły zadość danym doświadczenia. Opierają się one bowiem na zbyt uproszczonym założeniu, że różnice własności fizycznych ciał są wynikiem jedynie różnicy mas i objętości ich składników elementarnych (drobin) oraz różnicy wartości ich wzajemnego przyciągania. Tylko przy takim uproszczeniu, pozwalającym na ograniczeniu do trzech liczby spółczynników stałych, charakteryzujących dane ciało, można wyprowadzić powyższe wzory. W rzeczywistości jednak własności fizyczne ciał zależą jeszcze od innych wielkości. Nic też dziwnego, że doświadczalne sprawdzenia tych wzorów wykonane przez Amagata, Olszewskiego, Kamerlingh Onnesa i innych doprowadziły do wniosku, że wzory te, ściśle biorąc, stosują się jedynie do ciał, chemicznie pokrewnych, o niewiele różniących się temperaturach krytycznych. Niemniej jednak znaczenie równań zredukowanych jest bardzo duże; stanowią one jedną z prób ustalenia w tej dziedzinie fizyki praw równie ogólnych, jak prawa mechaniki, obowiązujące wszystkie ciała, bez względu na ich rodzaj.

ROZDZIAŁ XII

PRZEWODZENIE CIEPŁA

1. PRZEWODZENIE CIEPŁA. PRZEWODNICTWO WŁAŚCIWE

W rozważaniach rozdziałów poprzednich braliśmy zazwyczaj pod uwagę te przypadki, w których ciało posiada we wszystkich swoich częściach temperatury jednakowe. Tak jest istotnie między innymi i wtedy, gdy ciało jest w zetknięciu ze źródłami ciepła o jednakowej temperaturze, stanowiąc razem z nimi układ, który można uważać za odosobniony. Wtedy po dłuższym lub krótszym czasie zetknięcia wszystkie części ciała będą posiadały temperaturę tę samą, jaką posiadają źródła. Zanim jednak to nastąpi lub też gdy ciało znajduje się stale w zetknięciu ze źródłami o temperaturach niejednakowych, części ciała posiadają temperaturę niejednakową, co powoduje przechodzenie ciepła z części o wyższej do części o niższej temperaturze. Tę wymianę ciepła między poszczególnymi częściami tego samego ciała uważamy za wywołaną przez p r z e w o d z e n i e ciepła.

Rozpatrzmy najprostszy przypadek, gdy badanym ciałem jest np. cylindryczna sztaba, zabezpieczona na całej swej długości od wymiany ciepła z otoczeniem, a której podstawy znajdują się w zetknięciu ze źródłami ciepła o stałych i niejednakowych temperaturach t_1 i t_2. Przypuśćmy, że zetknięcie z tymi źródłami trwało dostatecznie długo, aby w sztabie ustalił się pewien stan równowagi, w którym temperatury poszczególnych części sztaby (na ogół niejednakowe) zachowują stale tę samą wartość. Tego rodzaju rozmieszczenie temperatur w badanym ciele nazywamy s t a t e c z n y m albo t r w a ł y m.

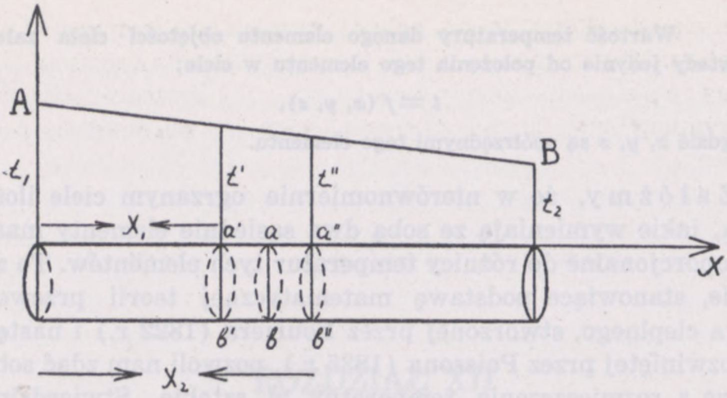
Wartość temperatury danego elementu objętości ciała zależy wtedy jedynie od położenia tego elementu w ciele;

$$t = f(x, y, z),$$

gdzie x, y, z są spółrzędnymi tego elementu.

Załóżmy, że w nierównomiernie ogrzanym ciele ilości ciepła, jakie wymieniają ze sobą dwa sąsiednie elementy masy, są proporcjonalne do różnicy temperatur tych elementów. To założenie, stanowiące podstawę matematycznej teorii przewodnictwa cieplnego, stworzonej przez Fouriera (1822 r.) i następnie rozwiniętej przez Poissona (1835 r.), pozwoli nam zdać sobie sprawę z rozmieszczenia temperatur w sztabie. Stwierdzimy przede wszystkim, że przekroje prostopadłe do osi sztaby są powierzchniami izotermicznymi, tzn. takimi, których wszystkie punkty posiadają temperatury jednakowe. Gdyby bowiem tak nie było, gdyby np. w punktach tego samego przekroju temperatura zmniejszała się w miarę oddalania się od osi, wtedy ciepło przechodziłoby od wewnętrznych części sztaby do zewnętrznych i wobec tego, że, jak to przyjęliśmy wyżej, na bocznych powierzchniach sztaby nie zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem, podnosiłoby ich temperaturę aż do wyrównania jej z temperaturą warstw wewnętrznych. Temperatury zatem tych punktów nie byłyby stałe, lecz zmieniałyby się z czasem, co przeczy założeniu stateczności rozkładu temperatur. Ciepło więc przechodzić może jedynie od elementów masy jednego przekroju do elementów masy przekroju sąsiedniego, w kierunku prostopadłym do powierzchni izotermicznych. Nazwijmy ilość ciepła, oddawaną w jednostce czasu przez elementy masy jednego przekroju elementom masy przekroju sąsiedniego, prądem ciepła. W rozpatrywanym przez nas przypadku prąd ten ma we wszystkich przekrojach tę samą wartość, inaczej bowiem temperatura części sztaby, — zawartej między dwoma przekrojami, z których jeden otrzymywałby od przekroju sąsiedniego w ciągu jednostki czasu inną ilość ciepła, niż ta, którą w tym samym czasie oddawałby dalej położonym częściom sztaby przekrój drugi, — wzrastałaby lub malała, co znów byłoby w niezgodzie z przyjętymi przez nas warunkami doświadczenia.

Weźmy przekrój ab, zawarty między dwoma przekrojami $a'b'$ o temperaturze t' i $a''b''$ o temperaturze t'' (rys. 246). Możemy



rys. 246

napisać, że prąd ciepła, przechodzący przez ten przekrój (lub innymi słowy ilość ciepła, otrzymywana w jednostce czasu przez elementy masy przekroju *ab* od elementów masy przekroju sąsiedniego); jest równy

$$w = \frac{Q}{\tau} = C \cdot \frac{t' - t''}{x_2 - x_1}, \tag{a}$$

gdzie τ oznacza czas, w ciągu którego została oddana ilość ciepła Q, x_1 i x_2 — odległości przekrojów $a'b'$ i $a''b''$ od gorętszego końca.

Gdybyśmy bowiem zwiększyli n razy różnicę temperatur przekrojów $a'b'$ i $a''b''$, w tym samym stosunku zwiększyłaby się różnica temperatur przekrojów, wymieniających między sobą ciepło, a co za tym idzie w tym samym stosunku zwiększyłby się i prąd ciepła, gdyby zaś tej samej różnicy temperatur odpowiadała m razy większa odległość przekrojów $a'b'$ i $a''b''$, różnica temperatur przekrojów bezpośrednio wymieniających ciepło zmniejszyłaby się m razy. Ponieważ, jak o tym była mowa wyżej, prąd ma wartość stałą, stosunek $\frac{t'' - t'}{x_2 - x_1}$ ma również na całej długości pręta wartość jednakową, a więc różnica temperatur w dwu przekrojach, odniesiona do jednostki ich odległości wzajemnej, jest wielkością stałą.

Licząc odległości x od gorętszego końca sztaby, otrzymamy w miarę zwiększania się odległości przekroju coraz to niższe temperatury; wielkość $-\frac{dt}{dx}$, skierowaną w stronę zwiększa-

jących się odległości, prostopadle do powierzchni izotermicznych i będącą miarą zmniejszania się temperatury z odległością, nazwiemy s p a d e m t e m p e r a t u r y. Z poprzednich rozważań wynika, że w danym przypadku spad ten ma wartość stałą

$$-\frac{dt}{dx}=-\frac{t''-t'}{x_2-x_1}=\frac{t_1-t_2}{l},$$

gdzie l — długość sztaby. Podstawiając do wzoru (a), otrzymamy

$$w=\frac{Q}{\tau}=C\frac{t'-t''}{x_2-x_1}=-C\frac{dt}{dx}=C\frac{t_1-t_2}{l}. \quad (1)$$

Jest rzeczą oczywistą, że spółczynnik C zależy od wielkości przekroju; nic by się bowiem w przepływie ciepła nie zmieniło, gdybyśmy daną sztabę o przekroju S cm² zastąpili S sztabami o długości tej samej i o przekroju 1 cm²: ilość ciepła, przepływająca w ciągu 1 sek. przez przekroje wszystkich sztab, byłaby równa sumie ilości ciepła, przepływających przez każdą sztabę oddzielnie, a ponieważ wszystkie te identyczne sztaby znajdowałyby się w tych samych warunkach, ilości ciepła przepływające przez każdą z nich byłyby wzajemnie równe, prąd zatem ciepła, przepływający przez ich zespół, byłby S razy większy od prądu, przepływającego przez każdą z nich, będziemy zatem mieli

$$w=\frac{Q}{\tau}=kS\frac{t_1-t_2}{l}=-kS\frac{dt}{dx}, \quad (2)$$

gdzie, jak wskazuje doświadczenie, spółczynnik k jest wielkością, zależną od rodzaju ciała. Spółczynnik ten nazywamy c i e p l n y m p r z e w o d n i c t w e m w ł a ś c i w y m danego ciała lub s p ó ł c z y n n i k i e m p r z e w o d n i c t w a c i e p l n e g o danego ciała. Wymiar k otrzymujemy ze wzoru (2)

$$[k]=\frac{[Q].[l]}{[S][\tau][t_1-t_2]}=\frac{M\times \text{stop.}\times L}{L^2\,T.\,\text{stop.}}=ML^{-1}T^{-1},$$

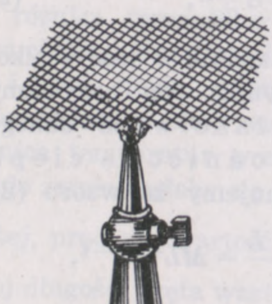
czemu w układzie C. G. S odpowiada $\frac{\text{g}}{\text{cm sek}}$ i w zazwyczaj używanym układzie kal, cm, sek — $\frac{\text{kal}}{\text{cm sek stop.}}$. W technice k wyraża się najczęściej w jednostkach, które otrzymujemy, biorąc za jednostkę masy kg, za jednostkę długości — m, za jed-

nostkę czasu — godz. Ze wzoru (1) ust. 8 wstępu znajdujemy, że jednostka techniczna jest 360 razy mniejsza od jednostki $\frac{\text{kal}}{\text{cm sek stop.}}$.

2. POROWNYWANIE PRZEWODNICTWA WŁAŚCIWEGO CIAŁ STAŁYCH

Zależność prądu ciepła od rodzaju ciała potwierdzi nam następujące proste doświadczenie. Weźmy kilka prętów jednakowej grubości i długości, lecz z różnego materiału, i otoczywszy jeden koniec każdego pręta lodem o temperaturze 0° C, ogrzewajmy przeciwległe końce płomieniem gazowym. Lód w miejscu zetknięcia z prętami zacznie się topić, początkowo powoli, następnie coraz prędzej, aż wreszcie, gdy temperatura wzdłuż prętów się ustali, z pewną stałą prędkością. Okaże się, że masa lodu topniejącego w ciągu jednostki czasu nie będzie przy wszystkich prętach jednakowa. Tam, gdzie lód będzie w zetknięciu z prętem srebrnym lub miedzianym, masa stopionego lodu będzie największa, tam, gdzie styka się z prętem szklanym lub drewnianym, — najmniejsza. W pierwszym przypadku prąd ciepła będzie miał na ogół znaczną wartość, w drugim — niewielką.

Gdy powierzchnia zetknięcia ciała metalicznego z ciałem zimniejszym jest dość duża, prąd ciepła może w pewnych warunkach przybrać tak wielką wartość, że temperatura ciała gorętszego znacznie się obniży. Tak np. gdy będziemy ostrożnie przybliżali z góry siatkę miedzianą o dostatecznie drobnych oczkach do płomienia gazowego, płomień będzie się kurczył i nie będzie przechodził ponad siatkę; prąd ciepła, odprowadzany przez siatkę od płomienia, obniża temperaturę gazu, przechodzącego przez oczka siatki, poniżej temperatury, w której gaz się pali płomieniem. Tymi własnościami metali tłumaczy się fakt, o którym wspominaliśmy w ust. 1 rozdz. VIII, że ciała te, wystawione na działanie mrozu, wydają się nam przy dotknięciu o wiele zimniejsze, niż drzewo o tej samej temperaturze.

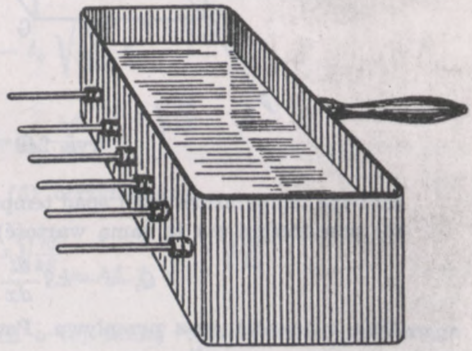


rys. 247

To doświadczenie, wystarczające do wykazania różnic przewodnictwa, nie może jednak bez pomiarów dodatkowych służyć do wyznaczenia spółczynnika k nawet wtedy, gdy uda się nam zmierzyć prąd przewodzenia, dochodzący do lodu. W tym bowiem

przypadku nie jest spełniony zasadniczy warunek, o którym mowa była w ustępie poprzednim, a mianowicie, cieplne odosobnienie (poza miejscami zetknięcia ze źródłami ciepła) danego ciała. Prąd ciepła tym razem nie ma wartości stałej: ilość ciepła, przechodząca przez przekrój $a''b''$ (rys. 246), leżący dalej od gorętszego końca sztaby, jest mniejsza od ilości ciepła, która w tym samym czasie przeszła przez przekrój $a'b'$; część tego ciepła została użyta na ogrzanie warstw ciał (zazwyczaj gazowych), stykających się z danym ciałem, część zaś po przekształceniu się w energię promieniowania została przez sztabę wypromieniowana. W pewnych jednak warunkach, w których przyjęcie pewnych prostych i prawdopodobnych założeń co do tego przewodnictwa zewnętrznego nie będzie w rażącej sprzeczności z rzeczywistym przebiegiem zjawiska, można tego lub analogicznego sposobu użyć do wyznaczenia względnego przewodnictwa właściwego różnych ciał.

Najczęściej są w tym celu używane metody, będące pewną odmianą metody, opracowanej w 1789 r. przez Ingenhoussa. Pręty o jednakowej długości i przekroju, lecz z różnych materiałów, umocowane w bocznej ścianie naczynia, pokryte są na całej swej długości warstwą łatwo topniejącego ciała (np. wosku, parafiny). Gdy do naczynia nalejemy wrzącej wody lub oleju, warstwa ta zacznie się topić, początkowo na częściach pręta, bezpośrednio stykających się z naczyniem, następnie zaś w coraz to dalszych. W chwili, gdy temperatury wzdłuż prętów się ustalą, topnienie zatrzyma się w pewnej odległości od gorętszego końca. Oznaczmy przez x_1 i x_2 te odległości na dwu porównywanych prętach i przyjmijmy, że ciepło, oddawane przez pręty na zewnątrz, jest proporcjonalne do powierzchni, że zatem ilości ciepła, oddawane przez części prętów, zawarte między naczyniem i końcowym punktem topnienia, są proporcjonalne do x_1 i x_2. Te ilości ciepła są doprowa-

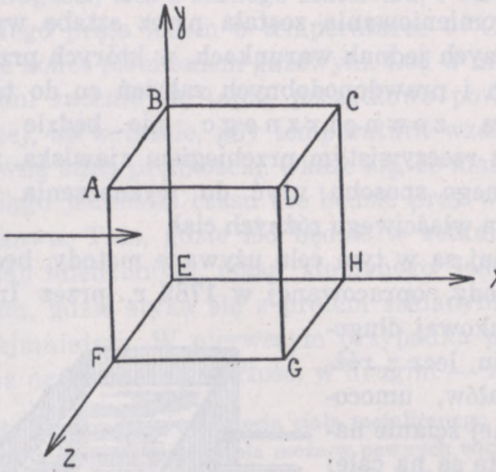


rys. 248

dzane z naczynia przy przeciętnych spadach temperatur, będących do siebie w stosunku takim, jak x_2 do x_1, wobec czego stosunek przewodnictw właściwych prętów będzie ostatecznie równy

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{x_1^2}{x_2^2} \qquad (3)$$

Niech *ABCDEFGH* (rys. 249) będzie elementarnym sześcianem, wyciętym z badanego ciała, i niech prąd ciepła ma kierunek osi x. Przez powierzchnię *ABEF* będzie wpływało ciepło (w założeniu, że



rys. 249

zarówno temperatura jak i spad temperatury we wszystkich punktach tej powierzchni ma tę samą wartość)

$$Q_1 = -kS\frac{dt}{dx}\cdot\tau,$$

gdzie τ oznacza czas przepływu. Powierzchnia przeciwległa posiada temperaturę $t + \frac{dt}{dx}dx$, wobec czego wypływa z niej ilość ciepła

$$Q_2 = -kS\frac{d\left(t+\frac{dt}{dx}dx\right)}{dx}\tau = -kS\left(\frac{dt}{dx}+\frac{d^2t}{dx^2}dx\right)\tau.$$

W przypadku przez nas rozpatrywanym część ciepła wpływającego do danego elementu objętości uchodzi na zewnątrz. Niech S będzie przekrojem pręta, f — obwodem jego przekroju prostopadłego do osi. Oznaczajmy przez t nie temperatury w poszczególnych przekrojach pręta, lecz nadwyżki tych temperatur ponad temperaturę otoczenia, mierzoną w pewnej skończonej odległości od pręta; wartości po-

chodnych $\frac{dt}{dx}$ i $\frac{d^2t}{dx^2}$ nie ulegną przez to żadnej, rzecz prosta, zmianie. Przyjmijmy, że ilość ciepła, oddana na zewnątrz przez warstwę sztaby o długości dx (patrz. ust. 7), jest równa

$$Q_3 = h . f \ dx . t . \tau,$$

gdzie spółczynnik h przyjmujemy za jednakowy dla wszystkich badanych sztab. Gdy rozkład temperatur się ustali, będziemy mieli

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 = - kS \frac{dt}{dx} \tau = - kS \frac{dt}{dx} \cdot \tau - kS \frac{d^2 t}{dx^2} dx . \tau +$$
$$+ hf . dx . t . \tau, \qquad (4)$$

skąd otrzymamy

$$kS \frac{d^2 t}{dx^2} = hf . t. \qquad (5)$$

Temu równaniu czyni zadość

$$t = t_0 \, e^{-x\sqrt{\frac{hf}{kS}}} \qquad (5\,a)$$

gdzie dla $x = 0$, $t = t_0$ nadwyżce temperatury gorętszego końca pręta nad temperaturą otoczenia, e — zasada logarytmów naturalnych. Istotnie, różniczkując, mamy

$$\frac{dt}{dx} = - t_0 \sqrt{\frac{hf}{kS}} \, e^{-x\sqrt{\frac{hf}{kS}}}$$

i

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = t_0 \frac{hf}{kS} \, e^{-x\sqrt{\frac{hf}{kS}}}$$

Po podstawieniu do wzoru (5) otrzymujemy

$$kS \, t_0 \frac{hf}{kS} \, e^{-x\sqrt{\frac{hf}{kS}}} = hf . t_0 \, e^{-x\sqrt{\frac{hf}{kS}}}$$

Jeżeli więc na dwu prętach o tej samej temperaturze gorętszego końca t_0 mamy w odległościach x_1 i x_2 te same temperatury t, wtedy z równania (5 a) otrzymujemy bezpośrednio

$$t_0 \, e^{-x_1\sqrt{\frac{hf}{k_1 S}}} = t_0 \, e^{-x_2\sqrt{\frac{hf}{k_2 S}}}$$

$$- x_1 \sqrt{\frac{hf}{k_1 S}} = - x_2 \sqrt{\frac{hf}{k_2 S}},$$

skąd

$$\frac{x_1^2}{x_2^2} = \frac{k_1}{k_2}$$

W przypadku rozpatrywanym w ust. 1, gdy sztaba jest cieplnie odosobniona, $Q_3 = 0$, wzór (4) przybiera postać

$$Q_1 = Q_2' = -kS\frac{dt}{dx}\tau = -kS\frac{dt}{dx}\tau - kS\frac{d^2t}{dx^2}dx.\tau,$$

skąd

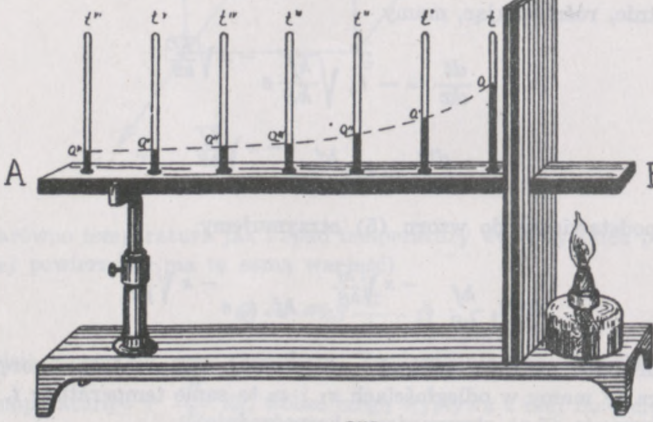
$$kS\frac{d^2t}{dx^2} = 0.$$

Całkując otrzymujemy

$$\frac{dt}{dx} = a.$$

Spad więc temperatury ma wtedy, zgodnie z tym, cośmy ustalili w ust. 1, wartość stałą.

Niedokładności związane z pomiarem odległości od gorętszego końca pręta punktów o jednakowej temperaturze usunął Despretz (1821 r.), wyznaczając przy użyciu termometrów, zanurzonych w wyżłobionych w sztabie otworach, rozkład temperatur na całej długości sztaby (rys. 250). Doświadczenie wyka-

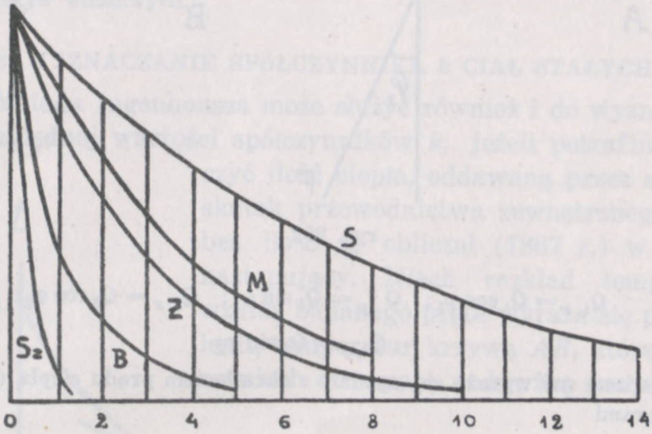


rys. 250

zało, że gdy temperatury wzdłuż sztaby się ustaliły, co w doświadczeniach Despretza następowało dopiero po upływie paru a nawet kilku godzin, końce słupków rtęci w termometrach leżały na krzywej, znacznie odbiegającej od linii prostej. Spad więc temperatury tym razem nie ma wartości stałej; w odległości x od gorętszego końca jest on równy liczbowo tangensowi kąta, jaki z osią sztaby tworzy w danym punkcie styczna do krzywej

temperatur aa^{VI}. Mierząc odległości od ogrzanego końca przekrojów o tej samej temperaturze, ze wzoru (3) można wyznaczyć stosunek przewodnictwa właściwego badanych ciał.

Metodę tę stosowali następnie Wiedemann i Franz (1853 r. i 1854 r.) zastępując sztaby i pręty drutami i wyznaczając rozkład temperatur przy pomocy ogniw termoelektrycznych. Wyniki

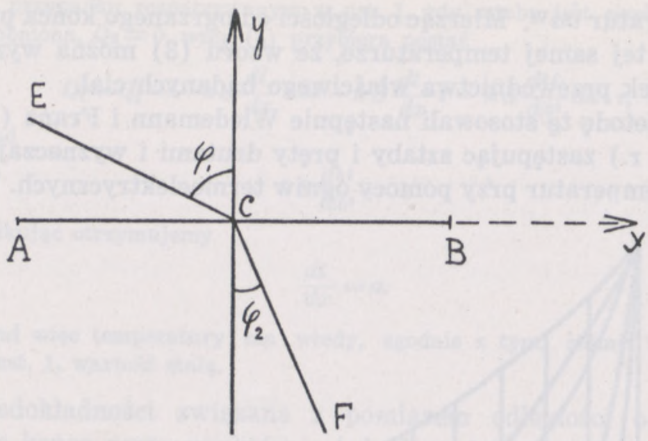


rys. 251

ich rozległych i starannie wykonanych badań omówimy niżej, tu podamy jedynie otrzymane przez nich krzywe rozmieszczenia temperatur w przypadku srebra (*S*), mosiądzu (*M*), żelaza (*Ż*), bizmutu (*B*) i szkła (*Sz*) (rys 251).

Do wyznaczenia względnego przewodnictwa właściwego może również służyć metoda, opracowana przez Voigta (1898 r.) i nazywana często metodą z a ł a m a n i a i z o t e r m. Z dwu badanych ciał wycinamy cienkie płytki (np. w postaci prostokątnych trójkątów) i sklejamy je jednym bokiem (np. wzdłuż przeciwprostokątnej) tak, aby tworzyły jedną całość. Weźmy linię rozdziału dwu danych ciał, o przewodnictwie cieplnym k_1 i k_2 za oś x, prostopadłą do niej CD za oś y i przypuśćmy, że po zetknięciu jednego z boków płytki ze źródłem ciepła i ustaleniu się temperatur, izoterma, przechodząca przez punkt C posiada kształt ECF, tworząc z osią y w pierwszym środowisku kąt φ_1, w drugim kąt φ_2 (rys. 252).

Niech prąd ciepła, przechodzący w bezpośrednim sąsiedztwie C przez element S izotermy, prostopadle do niej, w środowisku pierwszym będzie równy Q_1, w środowisku drugim — Q_2; rozłóżmy go na składowe w kierunku osi x i y:



rys. 252

$$Q_{1,x} = Q_1 \cos \varphi_1 ; \quad Q_{,y} = Q_1 \sin \varphi_1 ; \quad Q_{2,x} = Q_2 \cos \varphi_2 ;$$

$$Q_{2,y} = Q_2 \sin \varphi_2 \tag{a}$$

składowe zaś wyrażą się, zgodnie z określeniem prądu ciepła (ust. 1), wzorami

$$Q_{1,x} = -k_1 S \left(\frac{dt}{dx}\right)_1 ; \quad Q_{1,y} = -k_1 S \left(\frac{dt}{dy}\right)_1 ; \quad Q_{2,x} = -k_2 S \left(\frac{dt}{dx}\right)_2 ;$$

$$Q_{2,y} = -k_2 S \left(\frac{dt}{dy}\right)_2 .$$

Spad temperatury wzdłuż prostej rozdziału AB jest po obydwu jej stronach jednakowy, mamy więc $\left(\frac{dt}{dx}\right)_1 = \left(\frac{dt}{dx}\right)_2$, z drugiej zaś strony, z warunku, że w danym elemencie około punktu C ilości ciepła wchodzącego i wychodzącego muszą być wobec ustalenia się temperatur jednakowe

$$k_1 \left(\frac{dt}{dy}\right)_1 = k_2 \left(\frac{dt}{dy}\right)_2 .$$

Ze wzorów (a) mamy

$$tg\, \varphi_1 = \frac{Q_{1,y}}{Q_{1,x}} = \frac{-k_1 S \left(\frac{dt}{dy}\right)_1}{-k_1 S \left(\frac{dt}{dx}\right)_1} = \frac{\left(\frac{dt}{dy}\right)_1}{\left(\frac{dt}{dx}\right)_1}$$

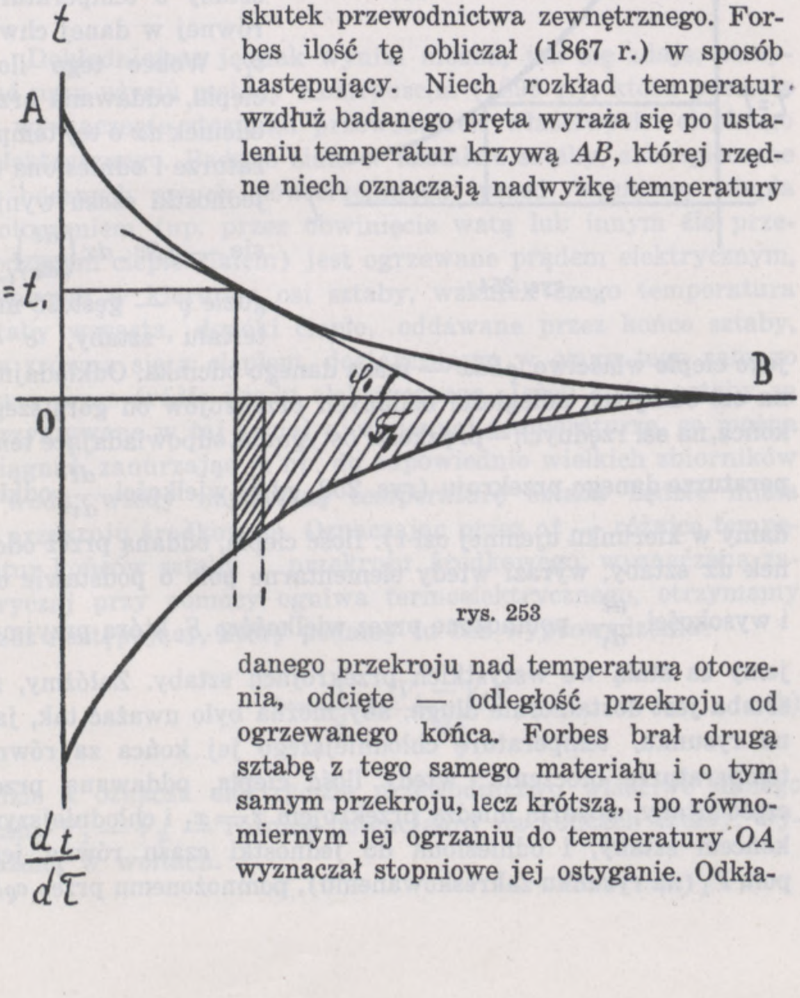
i $$tg\, \varphi_2 = \frac{\left(\frac{dt}{dy}\right)_2}{\left(\frac{dt}{dx}\right)_2} .$$

Wobec czego
$$\frac{tg\ \varphi_1}{tg\ \varphi_2} = \frac{\left(\frac{dt}{dy}\right)_1}{\left(\frac{dt}{dy}\right)_2} = \frac{k_2}{k_1}. \qquad (6)$$

Pokrywając płytkę jakimś łatwo topiącym się ciałem (np. woskiem) i ogrzewając jeden jej bok do temperatury wyższej od temperatury topnienia pokrywającego ją ciała, mierzymy kąty, jakie linia topnienia tworzy z linią rozdziału *AB* i stąd wyznaczamy stosunek przewodnictw właściwych.

3. WYZNACZANIE SPÓŁCZYNNIKA *k* CIAŁ STAŁYCH

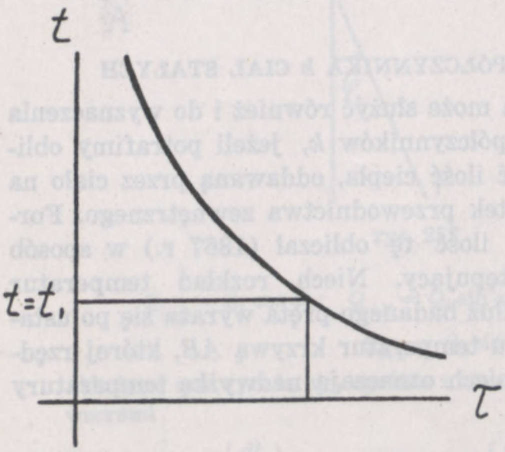
Metoda Ingenhoussa może służyć również i do wyznaczenia bezwzględnej wartości spółczynników *k*, jeżeli potrafimy obliczyć ilość ciepła, oddawaną przez ciało na skutek przewodnictwa zewnętrznego. Forbes ilość tę obliczał (1867 r.) w sposób następujący. Niech rozkład temperatur wzdłuż badanego pręta wyraża się po ustaleniu temperatur krzywą *AB*, której rzędne niech oznaczają nadwyżkę temperatury



rys. 253

danego przekroju nad temperaturą otoczenia, odcięte — odległość przekroju od ogrzewanego końca. Forbes brał drugą sztabę z tego samego materiału i o tym samym przekroju, lecz krótszą, i po równomiernym jej ogrzaniu do temperatury *OA* wyznaczał stopniowe jej ostyganie. Odkła-

dając na osi odciętych czas, na osi rzędnych — odpowiednie temperatury sztaby (jednakowe na całej jej długości), otrzymujemy pewną krzywą (rys. 254). Tangens kąta, jaki z osią τ utworzy w chwili $\tau = \tau_1$ styczna $\frac{dt}{d\tau}$ do krzywej w punkcie $t = t_1$, wyznaczy nam p r ę d k o ś ć o s t y g a n i a, gdy temperatura sztaby jest wyższa o t_1 od temperatury otoczenia. Forbes zakładał, że z tą samą prędkością ostyga również przekrój badanej sztaby o temperaturze równej w danej chwili t_1. Wobec tego ilość ciepła, oddawana przez odcinek dx o tej temperaturze i odniesiona do jednostki czasu wyniesie $-\varrho Sc \,.\, dx \left(\frac{dt}{d\tau}\right)_{t=t_1}$, gdzie ϱ — gęstość materiału sztaby, c — jego ciepło właściwe, ϱSdx — masa danego odcinka. Odkładajmy na osi odciętych odległości badanych przekrojów od gorętszego końca, na osi rzędnych — prędkości ostygania, odpowiadające temperaturze danego przekroju (rys. 253, gdzie wielkości $\frac{dt}{d\tau}$ odkładamy w kierunku ujemnej osi t). Ilość ciepła, oddaną przez odcinek dx sztaby, wyrazi wtedy elementarne pole o podstawie dx i wysokości $\frac{dt}{d\tau}$, pomnożone przez wielkość $c\varrho . S$, którą przyjmujemy za stałą we wszystkich przekrojach sztaby. Załóżmy, że sztaba jest dostatecznie długą, aby można było uważać tak, jak na rysunku, temperaturę chłodniejszego jej końca za równą temperaturze otoczenia; wtedy ilość ciepła, oddawana przez część sztaby, zawartą między przekrojem $x = x_1$ i chłodniejszym końcem sztaby, i odniesiona do jednostki czasu równa jest polu F_1 (na rysunku zakreskowanemu), pomnożonemu przez $c\varrho S$.



rys. 254

Ilość ta musi być równa ilości dopływającej w ciągu tego samego czasu do przekroju $x = x_1$ z gorętszej części sztaby. Mamy zatem

$$-kS\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=x_1} = c\varrho S F_1$$

lub z uwagi, że $-\left(\frac{dt}{dx}\right) = tg\,\varphi_1$ (rys. 253)

$$kS\,tg\,\varphi_1 = c\varrho S F_1$$

i ostatecznie
$$k = \frac{\varrho c F_1}{tg\varphi_1}. \tag{a}$$

Dokładniejsze jednak wyniki można, jak się zdaje, otrzymać przy użyciu metody Kohlrauscha (1899 r.), która pozwala na wyznaczenie stosunku przewodnictw właściwych: cieplnego i elektrycznego. Badane ciało w kształcie sztaby, zabezpieczone na bocznych swych powierzchniach przed wymianą ciepła z otoczeniem (np. przez obwinięcie watą lub innym źle przewodzącym ciepło ciałem) jest ogrzewane prądem elektrycznym, płynącym w kierunku osi sztaby, wskutek czego temperatura sztaby wzrasta, dopóki ciepło, oddawane przez końce sztaby, nie zrówna się z ciepłem, dostarczanym w ciągu tego samego czasu przez źródło prądu elektrycznego. Jeżeli końce sztaby są utrzymywane w tej samej niezmiennej temperaturze, co można osiągnąć, zanurzając je np. do odpowiednio wielkich zbiorników z wodą, wtedy najwyższą temperaturę sztaba będzie miała w przekroju środkowym. Oznaczając przez Δt — różnicę temperatur końców sztaby i przekroju środkowego, wyznaczaną zazwyczaj przy pomocy ogniwa termoelektrycznego, otrzymamy wzór następujący, który podamy tu bez wyprowadzenia:

$$k = \frac{1}{8}\,\lambda\,\frac{(V_1 - V_2)^2}{\Delta t}, \tag{b}$$

gdzie λ oznacza elektryczne przewodnictwo właściwe danego ciała, $V_1 - V_2$ — różnicę potencjałów na końcach sztaby, wyrażoną w woltach.

We wzorze tym k wyrażone jest w innych jednostkach, niż określone w ust. (1). Z prawa Ohma

$$i = \frac{V_1 - V_2}{r} = \frac{V_1 - V_2}{\frac{2l}{\lambda S}},$$

gdzie i — natężenie prądu w amperach, $2l$ — długość sztaby, otrzymujemy

$$\lambda = \frac{2li}{S(V_1 - V_2)},$$

skąd, po podstawieniu do (b)

$$k = \frac{1}{8} \frac{2l}{S} \frac{i(V_1 - V_2)}{\Delta t}.$$

Biorąc za jednostkę dzielności elektrycznej watt (wolt $\times$ amper), za jednostkę długości cm, na jednostkę cieplnego przewodnictwa właściwego otrzymujemy $\frac{\text{watt}}{\text{cm stop.}}$, a więc z uwagi, że $\frac{\text{kal}}{\text{sek}} = 4{,}184$ w, jednostkę 4,184 razy mniejszą, niż $\frac{\text{kal}}{\text{cm sek stop.}}$.

Najbardziej jednak warunkom, w jakich obowiązuje wzór (2), odpowiada metoda, wypracowana przez Nusselta (1908 r.). W pomiarach Nusselta badane ciało wypełnia przestrzeń między dwiema spółśrodkowymi kulami metalowymi, ogrzewanymi przez zasilane energią elektryczną źródło ciepła, umieszczone w ich wspólnym środku. W tym przypadku całe cieplo, dostarczone kuli mniejszej, przechodzi bez straty do kuli zewnętrznej poprzez badane ciało. Powierzchniami izotermicznymi są tym razem powierzchnie kul spółśrodkowych do kul metalowych, prąd ciepła płynie w kierunku promieni. Mierząc temperatury t_1 i t_2 w punktach odległych o r_1 i r_2 od środka kul i przyjmując na powierzchnię S średnią geometryczną powierzchni kul, ograniczających daną warstwę o grubości $r_2 - r_1$, otrzymujemy ze wzoru (2)

$$w = \frac{Q}{\tau} = k \,.\, 4\pi r_1 r_2 \cdot \frac{t_1 - t_2}{r_2 - r_1},$$

skąd

$$k = \frac{Q}{4\pi r_1 r_2}(r_2 - r_1) \cdot \frac{1}{t_1 - t_2} \cdot \frac{1}{\tau}, \tag{c}$$

gdzie Q obliczamy z energii elektrycznej, dostarczonej źródłu w ciągu czasu τ.

Oznaczając spad temperatury przez $-\frac{dt}{dr}$, mamy

$$Q = -k \cdot 4\pi r^2 \frac{dt}{dr} \cdot \tau$$

lub

$$\frac{Q \cdot dr}{4\pi r^2} = -k \cdot dt \cdot \tau.$$

Całkując w granicach od r_1 do r_2 i od t_1 do t_2, znajdziemy

$$\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = k(t_1 - t_2) \cdot \tau$$

i ostatecznie

$$\frac{Q(r_2 - r_1)}{4\pi r_1 r_2} = k(t_1 - t_2) \cdot \tau.$$

4. WYNIKI POMIARÓW PRZEWODNICTWA WŁAŚCIWEGO CIAŁ STAŁYCH

Wyniki, jakie otrzymali Wiedemann i Franz z porównywania przewodnictwa metali, doprowadziły ich do wniosku, że jest ono w ogromnej większości przypadków proporcjonalne do przewodnictwa elektrycznego danego ciała. Przyjmując przewodnictwo cieplne i elektryczne srebra za 100, Wiedemann i Franz znaleźli dla innych metali liczby następujące

	przew. cieplne k	przew. elektr. λ
srebro	100	100
miedź	73,6	73,3
złoto	53,2	58,5
cynk	19,0	24,0
cyna	14,5	13,6
żelazo	11,9	13,0
ołów	8,5	10,7
platyna	8,4	10,3
bizmut	1,8	1,9

Wniosek ten został następnie potwierdzony przez Bergeta (1888 r.), na podstawie pomiarów bezwzględnej (nie względnej, jak w pomiarach Wiedemanna i Franza) wartości *k*, przy użyciu metody, której tu opisywać nie będziemy. Berget znalazł, że istotnie stosunek *k* do λ zachowuje dla wielu metali wartość mniej więcej stałą, równą przeciętnie $1{,}7 . 10^3$ (cynk, mosiądz,

żelazo, antymon), a na ogół wahającej się w granicach od $1,6.10^3$ (miedź, ołów) do $1,8.10^3$ (cyna, rtęć). Późniejsze jednak badania wykazały, że reguła Wiedemanna-Franza odpowiada w pewnych tylko granicach ciśnień i temperatur rzeczywistości, na ogół tym lepiej, im lepszymi przewodnikami ciepła są badane ciała i im mniej ciśnienie, pod którym ciało się znajduje, różni się od ciśnienia 1 Atm (Bridgman, 1922 r.). Tym samym ograniczeniom podlega również i reguła L. Lorentza (1881 r.), według której wielkość $\frac{k}{\lambda T}$ (gdzie T — temperatura bezwzględna) ma wartość stałą.

Spółczynnik k dla znacznej większości metali zmniejsza się, jak się zdaje, ze wzrostem temperatury, szczególniej w niskich temperaturach. W stopach posiada on wartość mniejszą, niż w czystych składnikach stopów.

W ciałach krystalicznych wartość k zależy od kierunku prądu ciepła. Sénarmont, który pierwszy (1847 r.) badał doświadczalnie przewodnictwo kryształów, wykazał, że gdy płytkę, wyciętą z kryształu i pokrytą cienką warstwą wosku, ogrzewa się w jej środku, linia izotermiczna, odpowiadająca temperaturze topnienia wosku i wyraźnie zaznaczająca się na powierzchni płytki, nie jest kołem, lecz elipsą. Gdybyśmy więc ogrzewali nie płytkę, lecz kryształ w jego punkcie środkowym, powierzchnią izotermiczną byłaby (z wyjątkiem kryształów układu sześciennego) nie kula, lecz elipsoid. Wartość k może, zależnie od kierunku, zmieniać się w granicach bardzo szerokich: tak np. w kwarcu k ma w kierunku równoległym do osi krystalograficznej wartość dwa razy prawie większą, niż w kierunku do osi prostopadłym. W większości przypadków kryształy są lepszymi przewodnikami ciepła, niż ciała bezpostaciowe: kwarc krystaliczny przewodzi ciepło w kierunku równoległym do osi 10 razy lepiej, niż kwarc bezpostaciowy. Według Euckena (1911 r.) k kryształów zmniejsza się podobnie, jak w metalach, ze wzrostem temperatury, podczas gdy w ciałach bezpostaciowych wzrasta.

W ciałach porowatych k ma wartość tym mniejszą, im mniejsza jest przeciętna masa, przypadająca na jednostkę objętości; w tym jednak przypadku nie może być mowy o przewodnictwie oznaczonego ciała, mamy tu bowiem do czynienia

z ciałem niejednorodnym, częściowo stałym, częściowo gazowym, gdy pory są wypełnione gazem, częściowo ciekłym, gdy wypełnione są np. wodą, co, dodajmy, powoduje znaczny wzrost jego przewodnictwa.

5. PRZEWODNICTWO TERMOMETRYCZNE

W rozważanych dotychczas przypadkach zakładaliśmy, że ilość ciepła dopływająca do danego elementu ciała jest równa sumie ciepła wypływającego z danego elementu do dalszych elementów ciała i ciepła oddawanego przez element na zewnątrz na skutek przewodnictwa zewnętrznego. To założenie jest słuszne wtedy tylko, gdy temperatury wewnątrz ciała mają wartości stałe, niezmieniające się z czasem. Taki stan jednak następuje, nawet przy stałym ogrzewaniu lub oziębianiu ciała, dopiero po upływie pewnego czasu, w ciągu którego nie ma tej równości ciepła pobieranego i oddawanego na zewnątrz lub przewodzonego dalej. Nadwyżka ilości ciepła pobranego przez dany element ciała przy stopniowym ogrzewaniu lub niedobór ciepła przy stopniowym oziębianiu ciała wpływa na zmianę temperatury danego elementu. Zmiana ta odniesiona do jednostki czasu jest w danych warunkach tym większa, z im większymi ilościami ciepła mamy tu do czynienia, a więc im większe jest przewodnictwo właściwe ciała, oraz im mniejsza jest pojemność cieplna danego elementu. Oznaczając przez ϱ gęstość badanego ciała, c — jego ciepło właściwe, za miarę pojemności cieplnej danego elementu możemy przyjąć iloczyn $\varrho\, c$, wielkość zaś

$$a = \frac{k}{\varrho\, c} \tag{7}$$

za charakteryzującą przebieg zjawiska w tym przypadku. Wielkość a nazywamy przewodnictwem termometrycznym danego ciała lub spółczynnikiem przewodnictwa termometrycznego.

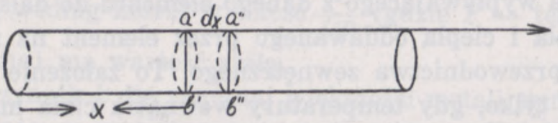
Ze wzoru (7) otrzymujemy na wymiar a

$$[a] = \frac{L^2}{T},$$

czemu w jednostkach C . G . S odpowiada $\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{sek}}$, w jednostkach

zaś technicznych $\frac{m^2}{godz}$; jednostka techniczna przewodnictwa termometrycznego jest zatem 0,36 razy mniejsza od jednostki C.G.S.

Przypuśćmy, że badane ciało jest sztabą, której boczne powierzchnie są podobnie, jak w przykładzie ust. 1, zabezpieczone przed wymianą ciepła z otoczeniem. Zacznijmy ogrzewać jeden z końców sztaby (rys. 255) i niech w pewnej chwili spad tem-



rys. 255

peratury w przekroju $a'b'$ sztaby, odległym o x od ogrzewanego końca, będzie równy $\left(-\frac{dt}{dx}\right)_{a'b'} = u'$, w przekroju zaś $a''b''$ leżącym dalej o dx, niech wynosi $\left(-\frac{dt}{dx}\right)_{a''b''} = u''$. Prąd ciepła, przepływający w danej chwili przez przekrój $a'b'$, będzie równy

$$dQ_1 = -kS\left(\frac{dt}{dx}\right)_{a'b'} \cdot d\tau = kSu' \cdot d\tau$$

gdzie S przekrój sztaby, prąd zaś przepływający przez przekrój $a''b''$ w tym samym kierunku

$$dQ_2 = -kS\left(\frac{dt}{dx}\right)_{a''b''} \cdot d\tau = kSu'' \cdot d\tau.$$

Różnica zatem ciepła wpływającego i wypływającego z elementu $a'b'a''b''$ wyniesie

$$dQ_1 - dQ_2 = kS\,d\tau(u' - u'').$$

Ta różnica spowoduje zmianę temperatury elementu o $dt = \frac{dQ_1 - dQ_2}{c\,.\,dm}$, gdzie dm — masa elementu, c — jego ciepło właściwe. Będziemy przeto mieli, po podstawieniu ϱSdx zamiast dm

$$dt = \frac{kS}{\varrho S \,.\, c\,dx} \cdot d\tau (u' - u'')$$

lub, kładąc $u' - u'' = du$

$$\frac{dt}{d\tau} = a \frac{du}{dx}. \tag{8}$$

Prędkość zatem zmiany temperatury jest proporcjonalna do spółczynnika przewodnictwa termometrycznego oraz do różnicy wartości spadu temperatury w krańcowych przekrojach danego elementu, odniesionej do jednostki długości.

Przypuśćmy, że z badanych sztab jedna jest srebrna, druga — żelazna, trzecia — szklana. Przy tych samych różnicach spadu temperatury $\frac{du}{dx}$ prędkości wzrostu w nich temperatury będą w stosunku takim, jak spółczynniki przewodnictwa termometrycznego. Dla srebra $k = 0{,}96 \frac{\text{kal}}{\text{cm sek stop.}}$ (Gray, 1895 r.), $c = 0{,}056$ i $\varrho = 10{,}5$ g/cm³, dla żelaza $k = 0{,}2 \frac{\text{kal}}{\text{cm sek stop.}}$ (Angström, 1863 r.), $c = 0{,}113$ i $\varrho = 7{,}85$ g/cm³, dla szkła (koronowego) $k = 0{,}0018 \frac{\text{kal}}{\text{cm sek stop.}}$ (Meyer, 1888 r.), $c = 0{,}18$ i $\varrho = 2{,}45$ g/cm³, wobec czego $a_{sr} = 1{,}63 \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}}$, $a_{ż} = 0{,}225 \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}}$ i $a_{sz} = 0{,}004 \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}}$. Jeżeli więc w danym elemencie sztaby srebrnej przeciętna wzrostu temperatury wynosi w danych warunkach 1 stop./sek, w sztabie żelaznej przy tych samych chwilowych różnicach spadów wyniesie około 0,14 stop./sek, w sztabie szklanej nieco więcej od 0,002 stop./sek.

Szczególny przypadek zachodzi wtedy, gdy temperatura jednego końca sztaby zmienia się okresowo. Wtedy i temperatura każdego przekroju będzie się zmieniała okresowo w ciągu tego samego czasu, dochodząc jednak do wartości największej nie w tej samej chwili, w jakiej temperatura końca sztaby będzie miała wartość najwyższą. Opóźnienie będzie tym większe, im dalej dany przekrój będzie się znajdował od miejsca, poddanego bezpośrednio zmiennemu ogrzewaniu i ostyganiu.

Podobnie i różnica największej i najniższej temperatury, którą przez analogię ze zjawiskami mechanicznymi nazwiemy obszernością wahań temperatury, będzie w miarę oddalania się od źródła zmian stopniowo się zmniejszała, prąd bowiem ciepła, płynący ku lub od przekrojów dalej położonych, będzie się w miarę wzrostu odległości stopniowo zmniejszał, gdyż część doprowadzonego przezeń ciepła będzie się zużywała na zmiany temperatury pośrednich elementów masy.

Niech badane ciało ma kształt bryły o płaskiej powierzchni i o rozmiarach dostatecznie dużych, abyśmy mogli pominąć straty na przewodnictwo zewnętrzne przy rozpatrywaniu zmian temperatur, zachodzących wewnątrz bryły. Przypuśćmy, że temperatura płaskiej powierzchni, ograniczającej bryłę, zmienia się periodycznie, tak że $t = t_0 \sin 2\pi \frac{\tau}{\tau_0}$, gdzie τ_0 — okres zmian. W odległości x od powierzchni, w głębi bryły, mamy, zgodnie ze wzorem (8), gdzie zamiast $\frac{du}{dx}$ piszemy $\frac{d^2 t}{dx^2}$ (por. ust. 2, wzór (4))

$$\frac{dt}{d\tau} = a \frac{d^2 t}{dx^2}. \tag{8 a}$$

Temu równaniu czyni zadość następująca wartość t

$$t = t_0 e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{a\pi\tau_0}}} \sin 2\pi \left(\frac{\tau}{\tau_0} - \frac{x}{\sqrt{a\pi\tau_0}} \right), \tag{9}$$

jak to można sprawdzić, obliczając $\frac{dt}{d\tau}$ i $\frac{d^2 t}{d\tau^2}$ i podstawiając do wzoru (8 a). Temperatura na głębokości x ma wartość największą nie w chwili $\tau = \frac{\tau_0}{4}$, jak temperatura na powierzchni, lecz w chwili późniejszej τ_1, wyznaczonej ze wzoru

$$\frac{\tau_1}{\tau_0} - \frac{x}{\sqrt{a\pi\tau_0}} = \frac{1}{4}$$

a więc, gdy
$$\tau = \tau_1 = \frac{\tau_0}{4} + x\sqrt{\frac{\tau_0}{a\pi}}.$$

Opóźnienie zatem wzrasta z głębokością i jest tym większe, im mniejszy jest spółczynnik przewodnictwa właściwego i im dłuższy jest okres zmiany τ_0. Jednocześnie zmniejsza się obszerność wahań: na głębokości x najwyższa wartość temperatury wynosi

$$t_x = t_0 e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{a\pi\tau_0}}}, \tag{9 a}$$

jest więc tym mniejsza, im większe jest x oraz im mniejsze są a i τ_0. Szybkie wahania temperatury zanikają szybciej, niż powolne.

Tym się między innymi tłumaczy, że dzienne wahania temperatury, jakim podlega powierzchnia ziemi, na niewielkiej już głębokości, rzędu co najwyżej metra, mają obszerności znikomo małe. Inaczej jednak jest z rocznymi wahaniami temperatury. Głębokość, na której można jeszcze stwierdzić roczne wahania temperatury o obszerności co najmniej 0,01° C, jest tym większa, im większe jest przewodnictwo danej warstwy oraz im głębiej sięga krążenie (p. niżej ust. 6) wody i powietrza, nie przekracza jednak nigdy, według Rudzkiego, z którego bierzemy te wszystkie dane, 30 metrów. O wielkości opóźnienia w przechodzeniu temperatury przez maximum i minimum mogą dać pojęcie następujące liczby. W Tyflisie warstwa powierzchniowa aż do głębokości 1,65 m posiada najwyższą temperaturę w sierpniu, warstwa zaś leżąca na głębokości 6,47 m — w grudniu. Poniżej pewnej granicznej warstwy temperatura nie ulega zmianom okresowym, lecz na ogół wzrasta wraz z głębokością. Odwrotność spadu temperatury w kierunku promienia — $\frac{dr}{dt}$ tzw. g r a d i e n t g e o t e r m i c z n y (gr. ge — ziemia) wynosi w dostępnej bezpośrednim badaniom warstwie o grubości 2 km około 35 m/stop., a więc innymi słowy temperatura w tej warstwie wzrasta na każde 35 m głębokości o 1° C. Od tej, otrzymanej jako przeciętna z wielu pomiarów, wartości gradientu geotermicznego niewiele odbiega wyznaczona w szybie w Paruszowcu na Górnym Śląsku koło Rybnika (głębokość szybu 2003 m) z pomiarów, sięgających 1959 m głębokości, wartość 34,1 m/stop.

Prąd zatem ciepła, płynący w tej warstwie ze środka ziemi ku powierzchni, wynosi przeciętnie w odniesieniu do jednostki powierzchni

$$\frac{w}{S} = \frac{Q}{S.\tau} = k \cdot \frac{1}{3500} \frac{\text{kal}}{\text{cm}^2\,\text{sek}}.$$

6. WYZNACZANIE PRZEWODNICTWA WŁAŚCIWEGO CIECZY I GAZÓW

Trudności, związane z wyznaczaniem spółczynnika k, które już dla ciał stałych są, jak widzieliśmy, dość znaczne i powodują pewne rozbieżności w wynikach pomiarów, zwiększają się, gdy badanymi ciałami są ciecze i gazy. Nierównomierne bowiem ogrzanie mas ciekłych i gazowych, wywołujące miejscowe zwiększenie lub zmniejszenie gęstości ciała, jest źródłem gwałtownych nieraz ruchów mas, ujawniających się w postaci tzw. p r ą d ó w u n o s z e n i a lub k o n w e k c y j n y c h (łac. convehere — prowadzić, przewozić). Element masy płynu, zetknięty ze źródłem o wysokiej temperaturze, po ogrzaniu do temperatury wyższej od temperatury elementów sąsiednich, jest, jako lżejszy, wypierany przez elementy sąsiednie, które wchodzą na jego miejsce,

ogrzewają się w zetknięciu ze źródłem i są z kolei wyparte przez elementy o temperaturze niższej. W ten sposób stopniowo wszystkie elementy masy ogrzewają się głównie kosztem ciepła pobranego bezpośrednio ze źródła, w niewielkim zaś stopniu kosztem ciepła przewodzonego przez elementy sąsiednie. Dopiero możliwie dokładne usunięcie prądów unoszenia może nam dać pojęcie o przewodnictwie płynów, które, jak się okazuje, jest na ogół niewielkie.

Napełnijmy probówkę wodą i wrzućmy do niej kawałek lodu, obciążony drutem tak, aby nie mógł wypłynąć na powierzchnię; ogrzewając górną część probówki (wąskim płomieniem gazowym), będziemy mogli wierzchnią warstwę wody doprowadzić do wrzenia, nie topiąc prawie wcale lodu, znajdującego się na dnie probówki.

Z metod, służących do wyznaczania spółczynnika przewodnictwa właściwego płynów, opiszemy metody Christiansena (1881 r.) i Schleiermachera (1889 r.).

Metoda Christiansena, stosowana również do pomiaru przewodnictwa właściwego ciał stałych, mających przewodnictwo niewielkie, polega na umieszczeniu badanych ciał między trzema poziomymi cienkimi płytkami miedzianymi, z których dolna i górna są w zetknięciu ze źródłami ciepła o temperaturach t_1 i t_3. Jeżeli odległość między płytkami jest mała (parę milimetrów), warstwa cieczy, znajdująca się między nimi, jest utrzymywana w spoczynku przez siły włoskowatości, które nie pozwalają jej wypływać. Oznaczmy przez k_1 przewodnictwo właściwe cieczy, zawartej między dolną płytką i środkową, przez k_2 — ciała, zawartego między środkową płytką i górną. Zakładając, że prąd ciepła płynie jedynie w kierunku prostopadłym do płytek, a więc, że płytki są powierzchniami izotermicznymi i że nie ma strat spowodowanych przez przewodnictwo zewnętrzne, z warunku stałości prądu (gdy temperatury płytek t_1, t_2, t_3, wyznaczone przy pomocy ogniwa termoelektrycznego, ostatecznie się ustalą) otrzymujemy

$$\frac{Q}{\tau} = k_1 S \frac{t_1 - t_2}{l_1} = k_2 S \frac{t_2 - t_3}{l_2}, \tag{a}$$

gdzie l_1 i l_2 są odległościami pionowymi płytek, równymi grubościom warstewek badanych ciał. Ze wzoru (a) znajdujemy

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{t_2 - t_3}{t_1 - t_2}. \tag{10}$$

Metoda Schleiermachera jest bardzo zbliżona do metody Nusselta (ust. 3), użytej znacznie później do wyznaczenia *k* ciał stałych. Badane ciało (Schleiermacher stosował tę metodę wyłącznie do gazów) wypełnia rurę, w której wzdłuż osi napięty jest drut platynowy, ogrzewany przez prąd elektryczny. Opierając się na spostrzeżeniu Kundta i Warburga (1875 r.), że przewodnictwo właściwe gazów jest aż do bardzo małych ciśnień niezależne od prężności gazu, — Schleiermacher rozrzedzał badany gaz, aby prądy unoszenia nie odgrywały znaczniejszej roli w przebiegu zjawiska, stratę zaś ciepła na promieniowanie obliczał z pomiaru wykonanego przy całkowitym usunięciu gazu z naczynia. Stosując analogiczne rozważania, jak w ust. 3, znajdziemy, że

$$k = \frac{Q}{2\pi . \tau} \lg \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{1}{l(t_2 - t_1)}, \tag{11}$$

gdzie r_1 i t_1 są odpowiednio promieniem i temperaturą rury, r_2 i t_2 — drutu, l — długością rury.

Prąd ciepła, płynący przez powierzchnię walca, spółosiowego z rurą, o promieniu r i tej samej wysokości l wynosi

$$\frac{Q}{\tau} = -k . 2\pi r . l \frac{dt}{dr}$$

lub
$$\frac{Q}{2\pi\tau} . \frac{dr}{r} = -k\, l\, dt.$$

Całkując w granicach od r_2 do r_1 i t_2 do t_1, otrzymamy

$$\frac{Q}{2\pi\tau} \lg \frac{r_1}{r_2} = k\, l\, (t_2 - t_1).$$

Metodę tę, po ulepszeniach wprowadzonych do niej przez Euckena (1911 r.), zastosował (1923 r.) Bridgman do wyznaczania spółczynnika *k* cieczy, zmniejszając dla uniknięcia prądów konwekcyjnych grubość warstwy cieczy, równą $r_1 - r_2$, do 0,4 mm.

Pomiary przewodnictwa wykazały, że pod ciśnieniami normalnymi przewodnictwo właściwe cieczy zmniejsza się ze wzrostem temperatury, pod ciśnieniami zaś wyższymi (w doświadczeniach Bridgmana dochodzącymi do 12000 kgc/cm²) wzrasta ze wzrostem temperatury, przy czym w miarę wzrostu ciśnienia wzrasta również, i to znacznie, wartość bezwzględna spółczynnika *k*.

W gazach wartość k jest, jak o tym wyżej wspominaliśmy, aż do bardzo małych ciśnień niezależna od prężności; ze wzrostem temperatury na ogół wzrasta, szczególniej w przypadku wodoru i bezwodnika węglowego. Tak np. według Gregory'ego i Archera (1926 r.) k powietrza równe jest w temperaturze 0° C — 0,0000583, wodoru w tej samej temperaturze 0,0004043; wzrost k wodoru ze wzrostem temperatury jest mniej więcej 10 razy większy, niż wzrost k powietrza.

7. PRZEWODNICTWO ZEWNĘTRZNE

W najpospolitszym przypadku, gdy badane ciało styka się przynajmniej częścią swej powierzchni z cieczą lub gazem, ciepło, oddawane przez ciało na zewnątrz i wyznaczające przewodnictwo zewnętrzne (ust. 2), jest sumą ciepła, przekształconego w energię promieniowania i w tej postaci wypromieniowanego przez ciało, ciepła unoszonego przez prądy konwekcyjne, powstające w stykającym się z danym ciałem środowisku, i wreszcie ciepła traconego na skutek przewodzenia. Stosunkowo najłatwiej wyznaczyć pierwszą ze składowych tej sumy, stosując np. podany wyżej sposób, użyty przez Schleiermachera, o wiele trudniej jednak wyznaczyć pozostałe dwa składniki. Przyjmijmy przez analogię ze zjawiskiem przewodzenia ciepła, że ilość ciepła, traconą przez ciało na skutek unoszenia i przewodzenia przez środowisko otaczające, możemy uważać za równą

$$Q = h \,.\, S \,.\, (t_1 - t_2)\tau, \qquad (12)$$

gdzie t_1 — temperatura badanego ciała, t_2 — temperatura środowiska, wyznaczona w pewnej odległości od powierzchni zetknięcia, S — powierzchnia zetknięcia. Wielkość h, którą nazwiemy współczynnikiem przewodnictwa zewnętrznego, będzie wtedy wielkością analogiczną do spółczynnika k, posiadającą jednak inny wymiar. Ze wzoru bowiem (12) otrzymujemy

$$[h] = \frac{Q}{[S][t][\tau]} = ML^{-2}T^{-1}, \qquad (12\,a)$$

czemu w układzie C . G . S odpowiada $\frac{\text{g}}{\text{cm}^2\ \text{sek}}$, w układzie zaś kal, cm, sek — $\frac{\text{kal}}{\text{cm}^2\ \text{sek stop.}}$

Spółczynnik h jest, w przeciwieństwie do k, zależny na ogół nie tylko od rodzaju stykających się ciał, lecz również od własności powierzchniowych ciała stałego, od rodzaju ruchu płynu, z którym ciało się styka, i wreszcie od kształtu ciała, oddającego ciepło. Stąd wynika, że wartość jego można wyznaczyć tylko przy dokładnym ustaleniu tych wszystkich czynników i, co więcej, w pewnych oznaczonych granicach temperatur. Wyniki pomiarów, wykonywanych dla doświadczalnego wyznaczenia h i polegających najczęściej na mierzeniu prędkości ostygania, nie zawsze są zgodne między sobą i, jak dotychczas, stanowią zbiór liczb, którymi należy się posługiwać z pewną ostrożnością.

Dlatego też ograniczymy się do przytoczenia paru jedynie danych. Gdy ciałem badanym jest płyta, umieszczona w nieporuszającym się jako całość względem niej płynie, spółczynnik h wzrasta przeszło 200 razy, gdy powietrze zastąpimy wodą, i przeszło 1000 razy, gdy zastąpimy je parą nasyconą (Nusselt i Jürges, 1922 r.); gdy ciałem badanym jest ogrzana rura, wisząca poziomo w powietrzu o temperaturze 15° C i ogrzana do 25° C, wzrost ciśnienia od 1 do 100 Atm zwiększa h mniej więcej 12 razy (Nusselt, 1922 r.).

Gdy temperatura ciała ostygającego nie jest zbyt wysoka, a więc gdy gęstość, a co za tym idzie i masa gazu, stykającego się z ciałem jest stosunkowo duża, wtedy można całkowicie pominąć wpływ przewodnictwa gazów i utratę ciepła przypisać jedynie prądom unoszenia. Stosując równania ruchu płynów doskonałych pod działaniem siły ciężkości i łącząc je z odpowiednio zmienionym równaniem przewodnictwa Fouriera, Boussinesq (1901 r.) wyprowadził na h wzór następujący

$$h = \frac{k\Theta}{l} F\left(C^2 g \,.\, l^3 a \frac{\Theta}{k^2}\right), \tag{13}$$

gdzie Θ — nadwyżka temperatury ciała ostygającego nad otoczeniem, C — pojemność cieplna jednostki objętości płynu, a — spółczynnik zmiany gęstości w zależności od temperatury, l — wymiar liniowy ciała, F — funkcja podanych w nawiasie wielkości, zależna na ogół od kształtu ciała.

Wzór ten, stosujący się jedynie do tzw. ostygania naturalnego, gdy środowisko, jako całość jest w spoczynku względem ciała ostygającego (w przeciwstawieniu do ostygania wymuszonego, gdy płyn jest stale w ruchu względem ciała), uzupełnił następnie Davis (1920 r. i 1922 r.), uwzględniając tarcie wewnętrzne

płynów. Na drodze podobnych rozważań Nusselt wyprowadził wzór na ostyganie poziomej rury w powietrzu. Zmieniając średnicę rury od 0,04 do 90 mm, ciśnienie powietrza od 150 mm rt. do 1500 mm rt. i różnicę temperatur od 18° C do 1570° C, otrzymał wyniki zgodne na ogół z wyprowadzonym wzorem.

Ta „hydrodynamiczna“ teoria ostygania zawodzi jednak, gdy masy poruszanego gazu są niewielkie, a więc gdy temperatura gazu jest wysoka i powierzchnia ciała ostygającego mała. Wtedy, według Langmuira (1906 r., 1912 r., 1917 r.), strata ciepła zachodzi głównie na skutek przewodzenia przez warstewkę płynu, stykającą się z ciałem; konwekcja występuje tylko na zewnętrznej stronie tej warstwy. Grubość warstwy, według Langmuira, nie zależy od temperatury ciała, lecz jedynie od rodzaju gazu: dla powietrza (pod ciśnieniem normalnym) wynosi 0,43 cm, dla wodoru — 3,05 cm. Pomiary, wykonane w warunkach, w jakich obowiązują założenia teorii „warstwowej“, nie są z nią, jak dotychczas, w sprzeczności.

Badania przewodnictwa zewnętrznego udowodniły, że wypowiadane dawniej przypuszczenie, jakoby na granicy zetknięcia dwu ciał zachodził nagły skok temperatury, w znakomitej większości przypadków nie znajduje potwierdzenia doświadczalnego. Nawet w przypadku rury, przez którą przepływa ruchem burzliwym ciecz lub gaz, gdy więc wskutek gwałtownych ruchów płynu temperaturę całej jego masy możemy uważać za wyrównaną i różną od temperatury rury, musimy na mocy założeń hydrodynamiki (rozdz. VII) przyjąć, że bezpośrednio stykająca się ze ścianą rury warstewka cieczy jest względem niej w spoczynku i w ruchu burzliwym nie uczestniczy. W tej właśnie warstewce zachodzi bardzo zazwyczaj gwałtowny spad temperatury od wartości, jaką ma na ścianach rury, do wartości, jaką ma poruszająca się masa płynu. Dlatego też podana wyżej uwaga, że temperaturę środowiska, w którym znajduje się dane ciało, należy wyznaczać w pewnej odległości od powierzchni ciała, jest całkowicie uzasadniona.

Inaczej rzecz się ma wtedy, gdy, jak to teoretycznie (1898 r.) i doświadczalnie (1910 r.) udowodnił Smoluchowski, środowiskiem tym są rozrzedzone gazy. Tym się tłumaczą izolujące własności ciał sproszkowanych, umieszczonych w atmosferze gazu rozrzedzonego. Skoki temperatury między każdym z ziaren i gazem, wypełniającym przestrzeń między nimi, mogą być tak znaczne, że suma ich staje się prawie równa różnicy temperatur powierzchni, ograniczających daną masę, wobec czego

spad temperatury w każdym z ziaren, a więc i ilość przewodzonego przez nie ciepła stają się znikomo małe. Tak np. według Smoluchowskiego, cynk sproszkowany w atmosferze powietrza pod ciśnieniem 760 mm rt. przewodzi ciepło prawie cztery razy lepiej, niż powietrze, pod ciśnieniem 35 mm rt. równie dobrze, jak powietrze, pod ciśnieniem 0,7 mm rt. osiem razy gorzej.

KONIEC TOMU PIERWSZEGO

SKOROWIDZ

SPIS NAZWISK

ERRATA

Str.:	jest:	ma być:
26, 4 w. od góry	nie w ciągu *s* sek	nie w ciągu 1 sek
155, 9 w. „ „	wymiar stały grawitacji	wymiar stałej grawitacji
320, 8 w. od dołu	$\beta_2 (\cos^2 \psi_M + \cos^2 \psi_N + \cos^2 \Theta_P)$	$\beta_2 (\cos^2 \psi_M + \cos^2 \psi_N + \cos^2 \psi_P)$
334, pod rysunkiem	rys. 203	rys. 203 (według Jellineka)
341, 7 w. od góry	79,3 kal	79,7 kal
357, 11 w. „ „	Bohna	Behna
„ 12 w. od dołu	Bohn	Behn

Tryckt i fotografisk reproduktion å Alb. Bonniers
Boktryckeri, Stockholm 1947

ERRATA

Str.	Jest	ma być
75, 5 w. od góry	nie w ciągu x sek	nie w ciągu 1 sek
106, 9 w. „ „	wymiar stały grawitacji	wymiar stałej grawitacji
220, 9 w. od dołu	[illegible]	[illegible]
351, pod rysunkiem	rys. 207	rys. 208 (według Jellinka)
381, 7 w. od góry	79,5 kal	79,7 kal
397, 11 w. „ „	Bohna	Bohna
„ 22 w. od dołu	Bohn	Bohr

[illegible]

«CZYTELNIK»
SPÓŁDZIELNIA WYDAWNICZA

PODRĘCZNIKI I MONOGRAFIE DLA SZKÓŁ WYŻSZYCH
drukowane w Szwecji jako dar Rządu Szwedzkiego

ADAMCZEWSKI Ignacy, Prof. Dr (Gdańsk). Krótki zarys fizyki

BANACH Stefan, Prof. Dr (†). Mechanika. Tomy 1/2

BER Artur, Prof. Dr (Łódź). Metodyka badania zaburzeń układu wewnątrzwydzielniczego

BIAŁASZEWICZ Kazimierz, Prof. Dr (†). Przemiany chemiczne w organizmie żywym

BORSUK Karol, Prof. Dr (Warszawa). Geometria analityczna w *n* wymiarach

GROTOWSKI Marian, Prof. Dr (Łódź). Wykłady fizyki. Tom 1

HIRSZFELD Ludwik, Prof. Dr (Wrocław). Immunologia ogólna

HUBER Maksymilian T., Prof. Dr (Gdańsk). Mechanika ogólna i techniczna

KURATOWSKI Kazimierz, Prof. Dr (Warszawa). Rachunek różniczkowy i całkowy

OSSOWSKA Maria, Prof. Dr (Łódź). Podstawy nauki o moralności

OSSOWSKI Stanisław, Prof. Dr (Łódź). U podstaw estetyki

OTTO Edward, Prof. Dr (Łódź). Geometria wykreślna

POGORZELSKI Witold, Prof. Dr (Warszawa). Geometria analityczna

— Analiza matematyczna. Tomy 1—3

POPLEWSKI Roman, Prof. Dr (Warszawa). Anatomia ssaków. Tomy 1—4

SAKS Stanisław, Prof. Dr (†) i ZYGMUND Antoni, Prof. Dr (Filadelfia). Teoria funkcyj analitycznych

SIERPIŃSKI Wacław, Prof. Dr (Warszawa). Działania nieskończone

— Rachunek różniczkowy

STEFANOWSKI Bohdan, Prof. Dr. (Łódź). Chłodnictwo

SZAFER Władysław, Prof. Dr (Kraków). Zarys ogólnej geografii roślin

SZYMANOWSKI Zygmunt, Prof. Dr (Łódź) i BER Artur, Prof. Dr (Łódź). Mikrobiologia szczegółowa. Tomy 1—2

VENULET Franciszek, Prof. Dr (Łódź). Fizjopatologia ogólna